HITP

数学奥林匹克系列

2008·第二辑（竞赛卷）

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

- 从 4444^{4444} 的各位数字和谈起
- 第46届国际数学奥林匹克试题三的证明、加强与推广
- 从一道伊朗数学奥林匹克试题的解法谈卡拉西奥多里定理
- 五朵“金花”如何排队
- 两正一反三相似图形
- 椭圆中的格点
- Position vectors;vector and complex-number methods in geometry
- 在波兰的数学竞赛会
- 几何学中的归纳法
- 一个判别 F_n 是否为素数的方程



$\sum_{i=0}^{19}$ 刘培杰数学工作室

责任编辑 李广鑫
整体设计 卞秉利

上架建议 数学竞赛/数学教育

ISBN 978-7-5603-2599-6

9 787560 325996 >

定价48.00元

012/17
:2008(2)
2008

HITP
数学奥林匹克系列
2008·第二辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化．第二辑，竞赛卷/刘培杰主编．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5603-2599-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课-中学-竞赛题-研究
Ⅳ．G634.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125148 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　康云霞
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 32　字数 694 千字
版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2599-6
印　　数　1~3 000 册
定　　价　48.00 元

（如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换）



《数学奥林匹克与数学文化》主编刘培杰等与俄罗斯《中学数学教学》编辑部负责人合影

简　讯

2007 年 9 月 5-15 日哈尔滨工业大学出版社一行四人参加第 20 届莫斯科国际图书博览会，并顺访了俄罗斯《中学数学教学》杂志社与《量子》杂志社，就双方开展数学奥林匹克的教学与研究的合作交流达成共识。



双方讨论具体合作事宜



《量子》杂志社一角



刘培杰与俄罗斯同行在数学图书展区



《数学奥林匹克与数学文化》主编刘培杰与俄罗斯数学奥林匹克选手合影

征稿启事

《数学奥林匹克与数学文化》是由哈尔滨工业大学出版社出版的数学普及系列文集。本文集发表原创性的数学奥林匹克和数学文化方面的学术论文（中文或英文），内容涉及数学竞赛试题背景研究，数学竞赛试题与现代数学的联系，专题综述，数学应用，数学趣闻，数学家小传等。本文集的宗旨是搭建高端平台，提供深度阅读，活跃奥数研究，促进数学传播。本文集倡导规范严谨的研究方法，提倡高等数学与初等数学相结合的学术取向，鼓励高校教师参与初等研究，期待数学大家现身数学普及。

来稿请寄哈尔滨工业大学出版社《数学奥林匹克与数学文化》文集编辑室

地址：中国 黑龙江省哈尔滨市南岗区复华四道街10号

邮编：150006

电话：0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

PDG

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
平面几何证明方法全书	2007－08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006－12	18.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2007－04	48.00
初等数论难题集	即将出版	98.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	即将出版	48.00
历届IMO试题集(1959—2005)	2006－05	58.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007－09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007－09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007－09	38.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007－10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008－01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	即将出版	88.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006－12	68.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007－03	28.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007－09	38.00
精神的圣徒 别样的人生——50位中国数学家成长的历程	即将出版	48.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
数学思想领悟	2008－03	38.00
数学眼光透视	2008－03	38.00
数学建模导引	2008－03	38.00
数学方法溯源	2008－03	38.00
数学史话揽胜	2008－03	38.00
数学应用展观	2008－03	38.00
初等数学研究	2008－06	38.00
多项式和无理数	2008－04	68.00
数论选讲	2008－04	48.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

邮　　编:150006

联系电话:0451－86281378　　13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

2007·第二辑　竞赛卷

目　录　CONTENTS

IMO 试题研究　Research on IMO Test

1　从 $4\,444^{4\,444}$ 的各位数字和谈起

4　关于一道 IMO 妙题的探讨

13　关于一道 IMO 名题的推广

30　第 46 届国际数学奥林匹克试题三的证明、加强与推广

高中联赛试题研究　Research on Test Questions of High School League Matches

43　2005 年全国高中数学联赛加试第二题的溯源与解答

49　2005 年全国高中数学联赛加试第二题解答与评述

52　一道数学竞赛试题的注记

57　2005 年全国高中数学联赛加试第一题新解

59　一道全国高中数学联赛试题与 Sperner 引理

普特南竞赛试题研究　Research on Test Questions of Putnam

90　一道普特南竞赛题的初等解法

莫斯科数学竞赛试题研究 Research on Test Questions of Moscow Mathematics Competition

93 关于一道莫斯科数学竞赛试题的背景

各国竞赛试题研究 Research on Multinational Test Questions

98 从一道伊朗数学奥林匹克试题的解法谈卡拉西奥多里定理

地方数学竞赛试题研究 Research on Local Mathematical Test

103 五朵"金花"如何排队

110 近年高考与竞赛试题中有关李普希兹条件的几个问题

几何天地 Geometry World

132 三个几何问题思考

140 两正一反三相似图形

172 一道几何题的证明及其联想

181 神灵相助　魔术分身

187 关于"平面等周问题的简单解法"的注记

189 平面等周问题的简单解法

198 分点圆———个预赛题背景

207 平面凸区域

210 椭圆中的格点

复域漫步 Stroll in Complex Domain

215 Rouché 定理的两个应用

219 复分析

228 关于在复平面上三角形重心的复数表示及其在数学竞赛中的应用

231 复数三角形面积公式的应用

237 Position vectors; vector and complex-number methods in geometry

解法研究 Problems Solving Mode

281 关于一道妙题的再推广

290 关于一道理科实验班复试试题的证明的几点注记

史海钩沉 Research on the Comptition in the Past

294 在波兰的数学竞赛会

303 写在 1956 年数学竞赛结束之后

306 夫妇圆桌公式的相互关系

经典重温 Sutra Once More

308 几何学中的归纳法

资料包 Data Base

363 数学奥林匹克中的切比雪夫逼近问题

446 舒尔定理和范德瓦尔登定理

数论杂谈 Talking about Number Theory

463 一个判别 F_n 是否为素数的方程

英语之角 English Corner

465 Classroom Notes

467 Note on a Remake of Wald

业内信息 Internal Information

469 "希望杯"全国数学邀请赛香港赛区命题委员会工作会议纪要

471 "希望杯"全国数学邀请赛香港赛区组织委员会顾问、主任委员、副主任委员名单

472 "希望杯"全国数学邀请赛香港赛区命题委员会名单

475 第二届全国数学奥林匹克研讨会通讯录　上海—2005

读者来信 Letters from Readers

480 读者来信　第一封

483 读者来信　第二封

试题之窗 The Column of Test Questions

484 2006年全国高中数学联合竞赛试题

486 2006年全国高中数学联合竞赛试题参考答案

490 2006年全国高中数学联合竞赛加试试卷

491 2006年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案

译文征集 Solicit Translations

494 ЭТюд о формуле Эйлера

498 Гипотеза Каталана

编后语 Postscript

从 $4\,444^{4\,444}$ 的各位数字和谈起

吴康[①] 龙开奋[②]

第16届国际数学奥林匹克(IMO)第4题为"当 $4\,444^{4\,444}$ 写成十进制时,它的各位数字之和是 A,设 B 为 A 的各位数字之和,求 B 的各位数字之和.(A 和 B 都写成十进制数)"

原题解用到著名的九余法,优雅且简洁:

解 设 $n = 4\,444^{4\,444}$,B 的各位数字和为 C,则由九余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \equiv (-2)^{4\,444} = (2^6)^{740} \cdot 2^4 \equiv 1^{740} \cdot 16 \equiv 7 \pmod 9$.又 $n < (10^4)^{4\,444} < 10^{20\,000}$,$A \leqslant 20\,000 \times 9 = 180\,000$,$B \leqslant 5 \times 9 = 45$,$C \leqslant 3 + 9 = 12$,故 $C = 7$.

本文拟推广此问题.以下不加说明时均在十进制中讨论.

定义1 设 k 为正整数,把非负整数 n 从右至左每 k 位分一段(最左一段不是 k 位时可在前面补零凑够 k 位),诸段从右至左记为 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_m$($m$ 为非负整数),称之为 n 的 k 分段.代数和 $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ 称为 n 的 k 分段和,$A_0 - A_1 + A_2 - \cdots + (-1)^m A_m$ 称为 n 的 k 分段交替和,分别记为 $g_k(n)$ 和 $h_k(n)$.

定义2 对负整数 n,定义 $g_k(n) = -g_k(-n)$,$h_k(n) = -h_k(n)$,仍称为 n 的 k 分段和、k 分段交替和.

引理1 设 k 为正整数,正整数 P 整除 $10^k - 1$,n 为整数,则 $n \equiv g_k(n) \pmod P$.

证明 对非负整数 i,有 $10^{ik} - 1 \equiv 1^i - 1 = 0 \pmod{10^k - 1}$,故 $10^{ik} \equiv 1 \pmod P$.若 $n \geqslant 0$,由引理1,$n = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i \cdot 10^{ik} \equiv \sum\limits_{i=0}^{m} A_i \cdot 1 = g_k(n) \pmod P$.若 $n < 0$,由引理2易得同样结论.

引理1又称为"P 余法".

引理2 设 k 为正整数,正整数 Q 整除 $10^k + 1$,n 为非负整数,则 $n \equiv h_k(n) \pmod Q$.

证明 对非负整数 i,有 $10^{ik} - (-1)^i \equiv (-1)^i - (-1)^i = 0 \pmod{10^k + 1}$,故

① 吴康(1957—),男,广东高州人,汉族,硕士,华南师范大学副教授,研究生导师,《中学数学研究》主编,数学教育指导组(硕士和教育硕士)组长,中国数学奥林匹克高级教练员.

② 龙开奋(1956—),男,广西天等人,壮族,广西师范大学副教授,研究生导师,"21世纪园丁工程"导师,中国数学奥林匹克高级教练员.

$10^{ik}\equiv(-1)^i(\bmod\ Q)$. 若 $n\geqslant 0$, 由引理 1, $n=\sum_{i=0}^{m}A_i\cdot 10^{ik}\equiv\sum_{i=0}^{m}A_i\cdot(-1)^i=h_k(n)(\bmod Q)$. 若 $n<0$, 由引理 2 易得同样结论.

引理 2 又称为"Q 余法". 以下是一些推广问题:

问题 1 设 $n=4\,444^{4\,444}$, n 的 2 分段和是 A, A 的 2 分段和是 B, 求 B 的 2 分段和 C.

解 由 99 余法得 $C\equiv B\equiv A\equiv n(\bmod 99)$. 注意到 $99=9\times 11$, 9 和 11 互质, $n\equiv 7(\bmod 9)$(原题解), $n\equiv 0(\bmod 11)$, 故易得 $C\equiv n\equiv 88(\bmod 99)$. 又 $n<10^{20\,000}$, $A\leqslant 10\,000\times 99=990\,000$, $B\leqslant 98+2\times 99=296$, $C\leqslant 1+99=100$. 故 $C=88$.

问题 2 设 $n=4\,444^{4\,444}$, n 的 3 分段和是 A, A 的 3 分段和是 B, 求 B 的 3 分段和 C.

解 由 999 余法得 $C\equiv B\equiv A\equiv n(\bmod 999)$. 注意到 $999=27\times 37$, 27 和 37 互质. 而 $n\equiv 16^{4\,444}=2^{17\,776}=(2^9)^{1\,975}\times 2\equiv(-1)^{1\,975}\times 2\equiv -2(\bmod 27)$; $n\equiv 4^{4\,444}=2^{8\,888}=(2^{18})^{493}\times 2^{14}\equiv(-1)^{493}\times 2^{14}\equiv 7(\bmod 37)$. 由孙子定理易得到 $n\equiv 673(\bmod 999)$. 又 $n<10^{20\,000}$, $A\leqslant 6\,667\times 999<6\,667\,000$. $B\leqslant 5+2\times 999=2\,003$, $C\leqslant 1+999=1\,000$. 故 $C=736$.

问题 3 设 $n=4\,444^{4\,444}$, $A=h_1(n)$, $B=h_1(A)$, $C=h_1(B)$, 求 C.

解 由 11 余法得 $C\equiv B\equiv A\equiv n\equiv 0(\bmod 11)$. 又 $n<(10^4)^{4\,444}$, $|A|\leqslant 8\,888\times 9=79\,992$, $|B|\leqslant 9-0+9-0+6=24$, $|C|\leqslant 9$. 故 $C=0$.

问题 4 设 $n=4\,444^{4\,444}$, $A=h_2(n)$, $B=h_2(A)$, $C=h_2(B)$, 求 C.

解 由 101 余法得 $C\equiv B\equiv A\equiv n\equiv 0(\bmod 101)$, 又 $n<(10^4)^{4\,444}$, $|A|\leqslant 4\,444\times 99=439\,956$, $|B|\leqslant 99-00+43=142$, $|C|\leqslant 99$. 故 $C=0$.

问题 5 设 $n=4\,444^{4\,444}$, $A=h_3(n)$, $B=h_3(A)$, $C=h_3(B)$, 求 C.

解 由 1 001 余法得 $C\equiv B\equiv A\equiv n(\bmod 1\,001)$. 注意到 $1\,001=7\times 11\times 13$, 7, 11, 13 两两互质, $n\equiv(-1)^{4\,444}=1(\bmod 7)$; $n\equiv 0(\bmod 11)$; $n\equiv(-2)^{4\,444}=(2^6)^{740}\times 2^4\equiv(-1)^{740}\times 16\equiv 3(\bmod 13)$. 由孙子定理算得 $n\equiv 484(\bmod 1001)$. 又 $n<(10^4)^{4\,444}=10^{17\,776}$, $|A|\leqslant 5\,926\times 999=5\,920\,074$, $|B|\leqslant 999-000+5=1\,004$, $|C|\leqslant 999$. $C=484$ 或 -515.

注:问题 5 尚未获得最后结果.

以下约定:对正整数 n, N_n 表示从左至右把 $1,2,3,\cdots,n$ 各项连排所得正整数. 如 $N_5=12345$, $N_{15}=123456789101112131415$, $N_{105}=123456789101112\cdots99100101\cdots105$.

问题 6 设 $A=g_1(N_{2006})$, $B=g_1(A)$, $C=g_1(B)$, 求 C.

解 $C\equiv B\equiv A\equiv N_{2\,006}\equiv 1+2+3+\cdots+2\,006=1\,003\times 2\,007\equiv 0(\bmod 9)$. 又 $N_{2\,006}$ 的位数为 $9\times 1+90\times 2+900\times 3+1\,007\times 4=6\,917$, 故 $A\leqslant 6\,917\times 9=62\,253$, $B\leqslant 5+4\times 9=41$, $C\leqslant 3+9=12$, 从而 $C=9$.

问题 7 设 $A=g_2(N_{2\,006})$, $B=g_2(A)$, $C=g_2(B)$, 求 C.

解 $C\equiv B\equiv A\equiv N_{2\,006}\equiv 1+23+45+67+89+10+11+12+\cdots+99+100\,101+102\,103+\cdots+998\,999+1\,000+1\,001+\cdots+2\,006=225+109\times 45+1\,099\,100\times 225+1\,503\times 1\,007\equiv 27+10\times 45+2\times 27+18\times 17\equiv 837\equiv 45(\bmod 99)$.

又 $N_{2\,006}$ 是 6 917 位数,故 $A \leqslant 3\,459 \times 99 = 342\,441, B \leqslant 33 + 2 \times 99 = 231, C \leqslant 1 + 99 = 100$,从而 $C = 45$.

问题 8 设 $A = g_3(N_{2\,007}), B = g_3(A), C = g_3(B)$,求 C.

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2\,007} \equiv 123 + 456 + 789 + 101\,112 + 131\,415 + \cdots + 979\,899 + 100 + 101 + 102 + \cdots + 999 + 100\,010\,011\,002 + 100\,310\,041\,005 + 200\,520\,062\,007 = 1\,368 + 1\,081\,011 \times 15 + 1\,099 \times 450 + 300\,530\,073\,009 \times 168 \equiv 369 + 93 \times 15 + 100 \times 450 + 912 \times 168 \equiv 199\,980 \equiv 180 \pmod{999}$. 又 $N_{2\,007}$ 是 6 921 位数,故 $A \leqslant 2\,307 \times 999 = 2\,304\,693, B \leqslant 1 + 2 \times 999 = 1\,999, C \leqslant 1 + 999 = 1\,000$. 从而 $C = 180$.

问题 9 设 $A = h_1(N_{2\,006}), B = h_1(A), C = h_1(B)$. 求 C.

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2\,006} \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$. 又 $N_{2\,006}$ 是 6 917 位数,故 $|A| \leqslant 3\,459 \times 9 = 31\,131, |B| \leqslant 3 + 9 + 9 = 21, |C| \leqslant 9$. 从而 $C = 1$.

问题 10 设 $A = h_2(N_{2\,006}), B = h_2(A), C = h_2(C)$,求 C.

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2006} \equiv 1 - 23 + 45 - 67 + 89 - 10 + 11 - 12 + 13 - \cdots - 98 + 99 - 100\,101 + 102\,103 - 104\,105 + 106\,107 - \cdots - 996\,997 + 998\,999 + 1\,000 + 1\,001 + \cdots + 2\,006 = 45 + 45 + 2\,002 \times 225 + 1\,503 \times 1\,007 \equiv 90 - 18 \times 23 + (-12) \times (-3) \equiv 15 \pmod{101}$. 又 $N_{2\,006}$ 是 6 917 位数,故 $|A| \leqslant 1\,730 \times 99 = 171\,270, |B| \leqslant 17 + 99 = 116, |C| \leqslant 99$. 从而 $C = 15$ 或 -86.

注:问题 10 尚未获得最后结果.

问题 11 设 $A = h_3(N_{2\,007}), B = h_3(A), C = h_3(B)$,求 C.

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2\,007} \equiv 123 - 456 + 789 + 101\,112 + 131\,415 + \cdots + 979\,899 - 100 + 101 - 102 + 103 - \cdots - 998 + 999 + 100\,010\,011\,002 + 100\,310\,041\,005 + \cdots + 200\,520\,062\,007 = 456 + 1\,081\,011 \times 15 + 450 + 300\,530\,073\,009 \times 168 \equiv 906 + (-69) \times 15 + 166 \times 168 = 27\,759 \equiv 732 \pmod{1\,001}$. 又 $N_{2\,007}$ 为 6 921 位数,故 $|A| \leqslant 1\,154 \times 999 = 1\,152\,846, |B| \leqslant 999 + 1 = 1\,000, |C| \leqslant 999$. 从而 $C = 732$ 或 -269.

注:问题 11 尚未获得最后结果.

题解中用到的一些技巧留给读者理解和发挥.

[**编者注**] 本文作者之一吴康先生文理兼备,好写诗文,抒发情怀.2007 年 7 月 23 日晚给编者发来短信赋诗一首.录于文末,奇文共赏.

荣升感言:“圆规粉笔过来人,平面风云今履新.莫道青春随数去,化为桃李又青春.”编者不解“荣升”二字何意,发过短信问荣升何意.不一会,短信回来;“今天年满 50,荣升老人”.编者大笑,怪自己不懂幽默.遂又回短信:“革命人永远是年轻”.

2007 年中秋节,吴先生又发来短信,赋诗一首:采桑子!中秋随想.“自由愿付登天价,古有嫦娥!今又嫦娥,华夏腾飞疾似梭,蟾宫折桂神仙梦,百族祥和,环宇祥和,碧海青天日月歌!”好诗!

关于一道IMO妙题的探讨

邓寿才[1]

1 加 强

第41届IMO第2题是由美国提供的一道妙题:

设 a,b,c 是正实数,且满足 $abc=1$.证明

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1 \tag{A}$$

放眼观察,(A)式的结构紧凑,外形优美.据笔者初探,本妙题约有10种证法,限于篇幅,从略.

如果我们证(A)式左边为 P,再证

$$T=\frac{1}{3}\left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\right] \quad ①$$

那么,我们可以首先将(A)式完善成一个漂亮的双向不等式

$$T\geqslant 1\geqslant P \tag{B}$$

证明　设 $x_1,x_2,x_3>0$,且 $a=\frac{x_1}{x_2},b=\frac{x_2}{x_3},c=\frac{x_3}{x_1}$,则不等式 $T\geqslant 1$ 化为

$$\sum x_1(x_1+x_2-x_3)(x_3+x_1-x_2)\geqslant 3x_1x_2x_3 \quad ②$$

令

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x_2+x_3-x_1)>0\\ y=\frac{1}{2}(x_3+x_1-x_2)>0\\ z=\frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y+z\\ x_2=z+x\\ x_3=x+y\end{cases}$$

代入②式得

[1] 四川省泸州市纳溪区上马镇银坪村.

$$4\sum yz(y+z)\geqslant 3\prod(y+z)\Leftrightarrow 4\sum x^2(y+z)\geqslant 3\sum x^2(y+z)+6xyz\Leftrightarrow$$
$$\sum x^2(y+z)\geqslant 6xyz\Leftrightarrow\sum x(y^2+z^2)-6xyz\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\sum x(y-z)^2\geqslant 0$$

即 ② 式成立,从而(B) 式得证,等号成立仅当 $x=y=z\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3\Leftrightarrow a=b=c=1$.

在题设条件下,笔者建立了不等式(A) 的五个加强式

$$P\leqslant 1-\frac{2}{3}Q_1\tag{C}$$

其中
$$Q_1=\sum\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\geqslant 0$$

$$P\leqslant 1-\frac{1}{9}Q_2\tag{D}$$

其中
$$Q_2=\sum\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 0$$

$$P\leqslant 27(\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{bc^2}+\sqrt[3]{ca^2})^{-3}\tag{E}$$

$$P\leqslant 1/(1+Q_3)\tag{F}$$

其中
$$Q_3=\frac{5}{6}\left[\prod\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{\frac{c}{b}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$P\leqslant 1/(1+Q_4)\tag{G}$$

其中
$$Q_4=\frac{1}{27}\left(\sum\left|\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|\right)^2$$

限于篇幅,本文仅给出(D) 式的证明,其余的留给大家练习.

(D) 式的证明:

设 $a=x/y,b=y/z,c=z/x(x,y,z>0)$, 则 $P=\prod\left(a-1+\frac{1}{b}\right)=\frac{\prod(y+z-x)}{xyz}$. 再设 $t=\sum x^2(y+z-x)$,且

$$\left.\begin{array}{l}x\geqslant y\geqslant z>0\\ x=z+m\\ y=z+n\\ (m\geqslant n\geqslant 0)\end{array}\right\}\Rightarrow 3xyz-\sum x^2(y+z-x)=\sum x(x-y)(x-z)=$$
$$(z+m)(m-n)m+(z+n)(n-m)n+zmn=$$
$$z(m-n)^2+(m+n)(m-n)^2+zmn\geqslant$$
$$z(m-n)^2=z(x-y)^2\Rightarrow 3xyz-t\geqslant z(x-y)^2$$

同理

$$\left\{\begin{array}{l}3xyz-t\geqslant y(z-x)^2\\ 3xyz-t\geqslant x(y-z)^2\end{array}\right.\Rightarrow 3(xyz-t)\geqslant\sum x(y-z)^2\Rightarrow$$

$$t\leqslant 3xyz-\frac{1}{3}\sum x(y-z)^2\tag{③}$$

现在证明

$$t = \sum x^2(y+z-x) \geqslant 3\prod(x+y-z) \quad ④$$

令
$$\begin{cases} y+z-x = 2\lambda \geqslant 0 \\ z+x-y = 2u \geqslant 0 \\ x+y-z = 2v \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u+v \\ y = v+\lambda \\ z = \lambda+u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3\prod(x+y-z) \leqslant \sum x^2(y+z-x) \Leftrightarrow$$

$$12\lambda uv \leqslant \sum \lambda(u+v)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum v[(\lambda-u)^2+4\lambda u] \geqslant 12\lambda uv \Leftrightarrow \sum \lambda(\mu-v)^2 \geqslant 0$$

即④式成立.③和④两式结合得

$$P \leqslant t/(3xyz) = \sum x^2(y+z-x)/(3xyz) \leqslant \frac{3xyz - \frac{1}{3}\sum x(y-z)^2}{3xyz} =$$

$$1-\frac{1}{9}Q_2 \Rightarrow P \leqslant 1-\frac{1}{9}Q_2$$

其中
$$Q_2 = \frac{\sum x(y-z)^2}{9xyz} = \sum\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 = \sum\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

即(D)式成立.等号成立仅当 $a=b=c=1$.

2 参数推广

许多不等式都可以从参数方面进行推广,不等式(A)也不例外.

推广一(参数推广) 设 a,b,c,λ 是正实数,且满足 $abc=\lambda^3$,证明

$$\left(a-\lambda+\frac{\lambda^2}{b}\right)\left(b-\lambda+\frac{\lambda^2}{c}\right)\left(c-\lambda+\frac{\lambda^2}{a}\right) \leqslant \lambda^3 \quad (H)$$

证明 设 $x,y,z>0$,令 $a=\frac{\lambda x}{y}, b=\frac{\lambda y}{z}, c=\frac{\lambda z}{x}$,于是(H)式等价于

$$\left(\frac{\lambda x}{y}-\lambda+\frac{\lambda^2 z}{\lambda y}\right)\left(\frac{\lambda y}{z}-\lambda+\frac{\lambda^2 x}{\lambda z}\right)\left(\frac{\lambda z}{x}-\lambda+\frac{\lambda^2 y}{\lambda x}\right) \leqslant \lambda^3$$

即
$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz \quad ⑤$$

设
$$\begin{cases} u = y+z-x \\ v = z+x-y \\ w = x+y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v = 2z > 0 \\ v+w = 2x > 0 \\ w+u = 2y > 0 \end{cases}$$

因此 u,v,w 中最多只有一个为负数.

若 u,v,w 中恰有一个为负数,则

$$uvw \leqslant 0 < xyz$$

⑤式成立;若 u,v,w 均大于0,则

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \leqslant \frac{1}{2}[(y+z-x)+(z+x-y)] = z$$

同理,$\sqrt{vw} \leqslant x, \sqrt{wu} \leqslant y$.所以 $uvw \leqslant xyz$,即⑤式成立,从而(H)式成立,等号成

立仅当

$$x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=\lambda$$

3 指数推广

现在我们从指数角度推广不等式(A).

推广二(指数推广) 设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc=1$,α,β,γ 均为正数,则

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\cdot\left(b-1+\frac{1}{c}\right)^{\beta}\cdot\left(c-1+\frac{1}{a}\right)^{\gamma}\leqslant a^{\alpha_1}\cdot b^{\beta_1}\cdot c_1^{\gamma_1} \qquad (\mathrm{I})$$

其中

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(3\alpha+\beta-\gamma),\quad \beta_1=\frac{1}{2}(3\beta+\gamma-\alpha),\quad \gamma_1=\frac{1}{2}(3\gamma+\alpha-\beta)$$

显然,当取 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\frac{3}{2}$.(I) 式化为(A) 式.

证明 从已知条件知 a,b,c 中最多两个大于等于1,或者最多有两个小于等于1.因此易知 $a-1+\frac{1}{b}$,$b-1+\frac{1}{c}$,$c-1+\frac{1}{a}$ 中最多有一个小于0,此时(I) 式显然成立,否则将导致矛盾.于是

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=(a-1+ac)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$a\left(1-\frac{1}{a}+c\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant a\left[\frac{\left(1-\frac{1}{a}+c\right)+\left(c-1+\frac{1}{a}\right)}{2}\right]^2=ac^2$$

设 $x,y,z>0$,则有

$$\left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\right]^{y}\leqslant(ac^2)^{y}$$

同理

$$\left[\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]^{z}\leqslant(a^2b)^{z}$$

$$\left[\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\right]^{x}\leqslant(b^2c)^{x}$$

将上面三式相乘,得

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)^{y+z}\cdot\left(b-1+\frac{1}{c}\right)^{z+x}\cdot\left(c-1+\frac{1}{a}\right)^{x+y}\leqslant a^{y+2z}\cdot b^{z+2x}\cdot c^{x+2y} \qquad ⑥$$

令

$$\begin{cases}y+z=\alpha>0\\ z+x=\beta>0\\ x+y=\gamma>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\\ y=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\\ z=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=y+2z=\frac{1}{2}(3\alpha+\beta-\gamma)\\ \beta_1=z+2x=\frac{1}{2}(3\beta+\gamma-\alpha)\\ \gamma_1=x+2y=\frac{1}{2}(3\gamma+\alpha-\beta)\end{cases}$$

代入 ⑥ 式即得(I) 式.等号成立仅当 $a=b=c=1$.

其实,由于 $\alpha_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha-\gamma)$,$\beta_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)$,$\gamma_1=$

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma-\beta)$,有

$$a^{\alpha_1}b^{\beta_1}c^{\gamma_1}=(abc)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}\cdot(a^{\alpha-\gamma}\cdot b^{\beta-\alpha}\cdot c^{\gamma-\beta})=a^{\alpha-\gamma}\cdot b^{\beta-\alpha}\cdot c^{\gamma-\beta}$$

因此(I)式又可简化为

$$(a-1+\frac{1}{b})^2\cdot(b-1+\frac{1}{c})^\beta\cdot(c-1+\frac{1}{a})^\gamma\leqslant a^{\alpha-\gamma}\cdot b^{\beta-\alpha}\cdot c^{\gamma-\beta}$$

不等式虽然外观简洁优美,是一个不错的指数推广,但是它的右边没有摆脱 a,b,c 的“纠缠”,为了寻觅更好的指数推广,我们再建立:

推广三(指数推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$,指数 $k>0,\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{4}{3})$,满足 $\alpha+\beta+\gamma=3.a^k-1+b^{-k}>0,b^k-1+c^{-k}>0,c^k-1+a^{-k}>0$,则

$$(a^k-1+b^{-k})^\alpha\cdot(b^k-1+c^{-k})^\beta\cdot(c^k-1+a^{-k})\gamma\leqslant(p^pq^qr^r)^{1/3}\quad\text{(J)}$$

其中

$$p=4-3\alpha>0,\quad q=4-3\beta>0,\quad r=4-3\gamma>0$$

显然,当 $\alpha=\beta=\gamma=1\Rightarrow p=q=r=1$ 时,及 $k=1$ 时,(J)式化为(A)式.

证明 由于 $abc=1\Leftrightarrow a^kb^kc^k=1$.因此,我们只须证明当 $k=1$ 时的情形即可.由已知条件,我们可设

$$\begin{cases}x=a-1+\frac{1}{b}\\ y=b-1+\frac{1}{c}\\ z=c-1+\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2=\frac{ab+b+1}{b}\\ y+2=\frac{ab+b+1}{1}\\ z+2=\frac{ab+b+1}{ab}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1\Rightarrow$$

$$\sum(y+2)(z+2)=\prod(x+2)\Rightarrow yz+zx+xy+xyz=4\quad ⑦$$

设 $t=\sqrt[3]{xyz}$,则有

$$4\geqslant 3t^2+t^3\Rightarrow(t-1)(t+2)^2\leqslant 0\Rightarrow t\leqslant 1\Rightarrow xyz\leqslant 1\quad ⑧$$

注意到

$$p+q+r+1=(4-3\alpha)+(4-3\beta)+(4-3\gamma)+1=12-3(\alpha+\beta+\gamma)+1=4$$

应用加权不等式有

$$4=p(\frac{yz}{p})+q(\frac{zx}{q})+r(\frac{xy}{r})+xyz\geqslant$$

$$(p+q+r+1)\left[\left(\frac{yz}{p}\right)^p\cdot\left(\frac{zx}{q}\right)^q\cdot\left(\frac{xy}{r}\right)^r\cdot(xyz)\right]^{\frac{1}{p+q+r+1}}=$$

$$4\left(\frac{x^{q+r+1}\cdot y^{r+p+1}\cdot z^{p+q+1}}{p^pq^qr^r}\right)^{\frac{1}{4}}=4\left(\frac{x^{4-p}\cdot y^{4-q}\cdot z^{4-r}}{p^pq^qr^r}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$4\left(\frac{x^{3\alpha}y^{3\beta}z^{3\gamma}}{p^pq^qr^r}\right)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow x^{3\alpha}y^{3\beta}z^{3\gamma}\leqslant p^pq^qr^r\Rightarrow x^\alpha y^\beta z^\gamma\leqslant(p^pq^qr^r)^{1/3}$$

即(I)式成立,等号成立仅当

$$\frac{yz}{p}=\frac{zx}{q}=\frac{xy}{r}=xyz\Rightarrow px=qy=rz=1$$

及
$$yz + zx + xy + xyz = 4$$

4 常数推广

(A)式左边三个括号内的常数均为 -1. 只要给一定的约束条件,我们就能建立它的常数推广:

推广四(常数推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc = 1$. 参数 λ, u, v 满足条件
$$0 < \lambda < a + \frac{1}{b},\quad 0 < u < b + \frac{1}{c},\quad 0 < v < c + \frac{1}{a}$$
则
$$(a - \lambda + \frac{1}{b})(b - u + \frac{1}{c})(c - v + \frac{1}{a}) \leqslant (1 + Q)^3 \tag{K}$$
其中
$$Q = \frac{1}{6}\sqrt{\sum(1-\lambda)^2 \cdot \sum(b + \frac{1}{a})^2} \tag{⑨}$$
特别地,当取 $\lambda = u = v = 1$ 时,(K)式中的 $Q = 0$,化为(A)式.

证明 证(K)式左边为 P_λ,由已知条件 $abc = 1$,可设 $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ $(x,y,z > 0)$
$$P_\lambda = \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - \lambda\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{x}{z} - u\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} - v\right) = W/(xyz) \tag{⑩}$$
其中 $W = \sqrt{ABC}$,且
$$\begin{cases} A = (z + x - \lambda y)(x + y - uz) \\ B = (x + y - uz)(y + z - vx) \\ C = (y + z - vx)(z + x - \lambda y) \end{cases} \tag{⑪}$$
由于
$$\left.\begin{array}{l} 0 < \lambda < a + \frac{1}{b} \\ 0 < u < b + \frac{1}{c} \\ 0 < v < c + \frac{1}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z + x - \lambda y > 0 \\ x + y - uz > 0 \\ y + z - vx > 0 \end{cases} \Rightarrow A \leqslant$$
$$\left[\frac{(z + x - \lambda y) + (x + y - uz)}{2}\right]^2 =$$
$$\{x + \frac{1}{2}[(1-\lambda)y + (1-u)z]\}^2 \Rightarrow$$
$$\frac{A}{x^2} \leqslant \left\{1 + \frac{1}{2}\left[(1-\lambda)\frac{y}{x} + (1-u)\frac{z}{x}\right]\right\}^2 \Rightarrow$$
$$\frac{A}{x^2} \leqslant \left\{1 + \frac{1}{2}[(1-\lambda)\frac{1}{a} + (1-u)c]\right\}^2$$
同理

$$\left.\begin{cases}\dfrac{B}{y^2}\leqslant\left\{1+\dfrac{1}{2}[(1-u)\dfrac{1}{b}+(1-v)a]\right\}^2\\\dfrac{C}{z^2}\leqslant\left\{1+\dfrac{1}{2}[(1-v)\dfrac{1}{c}+(1-\lambda)b]\right\}^2\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$P_\lambda=\frac{W}{xyz}=\frac{\sqrt{ABC}}{xyz}\leqslant\prod\left\{1+\frac{1}{2}[(1-\lambda)\frac{1}{a}+(1-u)c]\right\}\leqslant$$

$$\left\{1+\frac{1}{6}\sum[(1-\lambda)\frac{1}{a}+(1-u)c]\right\}^3=\left\{1+\frac{1}{6}\sum(1-\lambda)(\frac{1}{a}+b)\right\}^3\leqslant$$

$$\left\{1+\frac{1}{6}\sqrt{\sum(1-\lambda)^2\cdot\sum(\frac{1}{a}+b)^2}\right\}^3\Rightarrow P_\lambda\leqslant(1+Q)^3$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=u=v$.

特别地,当 $a=b=c=1$ 时,(M) 式化为一个新的不等式

$$(2-\lambda)(2-u)(2-v)\leqslant(1+Q)^3 \tag{12}$$

其中

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{(1-\lambda)^2+(1-u)^2+(1-v)^2} \tag{13}$$

顺便指出:如果我们再设参数 λ,u,v 满足条件

$$\lambda>\left|\frac{1}{a}-c\right|,\quad u>\left|\frac{1}{b}-a\right|,\quad v>\left|\frac{1}{c}-b\right|$$

则有

$$\sqrt{P_\lambda T_\lambda}\leqslant\lambda uv \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases}P_\lambda=(\lambda a+\dfrac{1}{b}-1)(ub+\dfrac{1}{c}-1)(vc+\dfrac{1}{a}-1)\\T_\lambda=(b+\dfrac{\lambda}{c}-1)(c+\dfrac{u}{a}-1)(a+\dfrac{v}{b}-1)\end{cases} \tag{15}$$

显然,当取 $\lambda=u=v=1$ 时,有

$$P_\lambda=T_\lambda=P=(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})$$

此时 ⑬ 式化为(A) 式 $P\leqslant1$.

5 元数推广

设 $x,y,z>0$,并作代换 $(a,b,c)=\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$,那么(A) 式化为等价形式

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\leqslant xyz \tag{16}$$

这正巧是 1983 年瑞士数奥题,它的一个推广便是著名的 Schur 不等式的特例,即

$$\prod_{i=1}^{n}(S-2x_i)\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left[x_i+\frac{n-3}{n-1}(S-x_i)\right] \tag{17}$$

其中 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n$,且 $n\geqslant3)$. $S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. 显然,当 $n=3$ 时,⑰ 式与 ⑯ 式等价.

下面我们先建立 ⑯ 式的带有约束条件的另一个推广:

设 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n;3 \leqslant n \in N)$.证 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$.且满足条件 $S > (n-1)x_i$,则

$$\prod_{i=1}^{n}[S-(n-1)x_i] \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{18}$$

显然,当 $n = 3$ 时,⑱ 式与 ⑯ 式等价.

证明 我们证 ⑱ 式左边为 T,则

$$\frac{T}{S-(n-1)x_i} = [S-(n-1)x_i]\cdots[S-(n-1)x_{i-1}]\cdot[S-(n-1)x_{i+1}]\cdots$$

$$[S-(n-1)x_n] \leqslant \left\{\frac{1}{n-1}[(S-(n-1)x_1)+\cdots+(S-(n-1)x_{i-1})+\right.$$

$$\left.(S-(n-1)x_{i+1})+\cdots+(S-(n-1)x_n)]\right\}^{n-1} =$$

$$\left\{\frac{(n-1)S-(n-1)(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)}{n-1}\right\}^{n-1} =$$

$$\left[\frac{(n-1)S-(n-1)(S-x_i)}{n-1}\right]^{n-1} = x_i^{n-1} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{T}{S-(n-1)x_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \Rightarrow \frac{T_n^n}{\prod_{i=1}^{n}[S-(n-1)x_i]} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{T_n^n}{T} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} \Rightarrow T \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i$$

即 ⑱ 式成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

如果我们再取 $n = 4$ 得

$$(x_2+x_3+x_4-2x_1)(x_3+x_4+x_1-2x_2)\cdot (x_4+x_3+x_2-2x_3)(x_1+x_2+x_3-2x_4) \leqslant x_1x_2x_3x_4 \tag{19}$$

令 $a,b,c,d > 0$,且 $abcd = 1.(a,b,c,d) = \left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\frac{x_3}{x_4},\frac{x_4}{x_1}\right)$,代入 ⑲ 式得

$$\left(a+ad+\frac{1}{b}-2\right)\left(b+ab+\frac{1}{c}-2\right)\cdot\left(c+bc+\frac{1}{d}-2\right)\left(d+cd+\frac{1}{a}-2\right) \leqslant 1 \tag{20}$$

这便是(A)式的一个四元推广.

最后,我们将不等式(A)从关于 a,b,c 的三元推广到多元的一个情形:

推广五 设 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n;n \geqslant 3)$.约定 $a_{n+i} \equiv a_i$,满足 $a_1a_2\cdots a_n = 1$. $a_i + \frac{1}{a_{i+1}} > 1$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_{i+1}}-1\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(1+a_ia_{i+1}a_{i+2}) \tag{L}$$

显然,当 $n = 3$ 时,上式化为(A)式.

证明 由已知条件可设,$a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow a_ia_{i+1}a_{i+2} = \frac{x_i}{x_{i+3}}$,再设

$$c = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+3}\right) = \prod_{i=1}^{n}(x_ix_{i+3}) = \left(\prod_{i=1}^{n}\sqrt{x_ix_{i+3}}\right)^2$$

再设

$$\begin{cases}A_i = x_i - x_{i+1} + x_{i+2} > 0\\ B_i = x_{i+1} - x_{i+2} + x_{i+3} > 0\end{cases}\Rightarrow A_iB_i = \frac{1}{4}(A_i + B_i)^2 = \frac{x_i + x_{i+3}}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{x_i + x_{i+3}}{\sqrt{x_ix_{i+3}}} = \sqrt{\frac{x_i}{x_{i+3}}} + \sqrt{\frac{x_{i+3}}{x_i}} = \sqrt{a_ia_{i+1}a_{i+2}} + \frac{1}{\sqrt{a_ia_{i+1}a_{i+2}}} = \frac{1 + a_ia_{i+1}a_{i+2}}{\sqrt{a_ia_{i+1}a_{i+2}}}\Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1)^2 = \prod_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1)(a_{i+1} + \frac{1}{a_{i+2}} - 1) =$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} - 1\right)\left(\frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} + \frac{x_{i+3}}{x_{i+2}} - 1\right) = \prod_{i=1}^{n}(A_iB_i)\Big/\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i+1}x_{i+2}\right) =$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}A_iB_i\right)\Big/C \leqslant \frac{1}{4^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i + x_{i+3}}{\sqrt{x_ix_{i+3}}}\right)^2 = \frac{1}{4^n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + a_ia_{i+1}a_{i+2})^2}{\prod_{i=1}^{n}(a_ia_{i+1}a_{i+2})} =$$

$$\left[\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(1 + a_ia_{i+1}a_{i+2})\right]^2\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1\right)\leqslant\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(1 + a_ia_{i+1}a_{i+2})$$

即(L)式成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

特别地,当 $n = 4$ 时,(L)式化为

$$(a_1 + \frac{1}{a_2} - 1)(a_2 + \frac{1}{a_3} - 1)(a_3 + \frac{1}{a_4} - 1)\cdot(a_4 + \frac{1}{a_1} - 1)\leqslant$$

$$\frac{1}{16}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4) \quad ㉑$$

这是(A)式的另一个四元推广.

最后指出,(L)式还可再从参数、指数方面进行综合推广.

关于一道 IMO 名题的推广

邓寿才

1 两个引理

第 28 届 IMO 有一道预选题是：

引理 1 对任何正数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3，有不等式

$$[a_1(b_2+b_3)+a_2(b_3+b_1)+a_3(b_1+b_2)]^2 \geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1) \quad ①$$

① 式等号成立的条件是 $\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

不等式 ① 的结构对称、外形优美. 而且它的用途非常广泛，应用它可将许多漂亮的代数不等式、几何不等式、三角不等式从系数方面进行加权推广，使原不等式倍显今非昔比，焕然一新.

如果我们作置换

$$(a_1,a_2,a_3)\to(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$(b_2+b_3,b_3+b_1,b_1+b_2)\to(x,y,z)$$

那么我们可以得到 ① 式的等价形式：

设 α,β,γ 中至少有两个正数，且 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$. x,y,z 为任意实数，则

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \geqslant (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\cdot(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2) \quad ②$$

等号成立仅当 $\frac{x}{\beta+\gamma}=\frac{y}{\gamma+\alpha}=\frac{z}{\alpha+\beta}$.

在应用方面，② 式有时比 ① 式更方便.

其实，① 式又可以加强为

$$a_1(b_2+b_3)+a_2(b_3+b_1)+a_3(b_1+b_2) \geqslant \frac{k}{\lambda}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)+\frac{\lambda}{k}(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1) \quad ③$$

其中 $k=b_1+b_2+b_3,\lambda=a_1+a_2+a_3$，等号成立的条件不变.

下面我们将 ① 式从三元推广到多元的情形：

推广 设 $a_i>0,b_i>0(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$. 记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$，则

$$S_n \equiv a_1(b_2+b_3+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_3+\cdots+b_n)+\cdots+ a_n(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}) \geqslant 2\sqrt{(\sum a_ia_j)(\sum b_ib_j)} \quad ④$$

等号成立仅当

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

特别地,当 $n=2$ 时,④式化为

$$a_1b_2+b_1a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2}$$

当 $n=3$ 时,④式化为①式.

证明 证 $A=\sum_{i=1}^{n}a_i, B=\sum_{i=1}^{n}b_i$,则

$$S_n=AB-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

应用 Cauch 不等式有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+2\sqrt{(\sum a_ia_j)(\sum b_ib_j)}\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sqrt{(\sum 2a_ia_j)(\sum 2b_ib_j)}\right]^2 \leqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum 2a_ia_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\sum 2b_ib_j\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2=(AB)^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+2\sqrt{\sum(a_ia_j)(\sum b_ib_j)} \leqslant AB \Rightarrow AB-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \geqslant 2\sqrt{(\sum a_ia_j)(\sum b_ib_j)} \Rightarrow$$

$$S_n \geqslant 2\sqrt{(\sum a_ia_j)(\sum b_ib_j)}$$

等号成立仅当

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sum 2a_ia_j}{\sum 2b_ib_j}$$

如果设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意 n 个正数,那么,众所周知,有 3 元对称不等式

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) \quad ⑤$$

在许多数奥资料上,还有 4 元对称不等式

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^3 \geqslant \frac{1}{4}(a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2) \quad ⑥$$

将⑤和⑥两式推广到多元,便是本文将要引用的:

引理 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n \geqslant 2)$ 为 n 个正数,则

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-1} \geqslant \frac{1}{n}(a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_2a_3\cdots a_n+\cdots+a_na_1\cdots a_{n-2}) \quad ⑦$$

证明 用数学归纳法.

(i)易知当 $n=2,3$ 时,⑦式成立:

(ii)假设当 $n=k$ 时,⑦式成立,证

$$A_k=\frac{1}{k}(a_1+a_2+\cdots+a_k)$$

此时⑦式右边为 P_k，则

$$P_k = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right)a_1a_2\cdots a_k$$

即有

$$P_k \leqslant A_k^{k-1} \qquad ⑧$$

（ⅲ）那么当 $n = k + 1$ 时，由于

$(k+1)P_{k+1} = a_1a_2\cdots a_k + a_2a_3\cdots a_{k+1} + \cdots + a_{k+1}a_1\cdots a_{k-1} =$

$a_1a_2\cdots a_k + (a_1a_2\cdots a_{k-1} + a_2a_3\cdots a_k + a_ka_1\cdots a_{k-2})a_{k+1}$(应用平均值不等式和归纳假设) $\leqslant$

$A_k^k + kA_k^{k-1}\cdot a_{k+1} = A_k^{k-1}(A_k + ka_{k+1}) \Rightarrow P_{k+1} \leqslant \underbrace{A_k\cdots A_k}_{(k-1\text{个}A_k)}\left(\frac{A_k + ka_{k+1}}{k+1}\right)$(应用平均值不等式) $\leqslant$

$$\left(\frac{A_k + \cdots + A_k + \frac{A_k + ka_{k+1}}{k+1}}{k}\right)^k = \left(\frac{(k-1)A_k + \frac{A_k + ka_{k+1}}{k+1}}{k}\right)^k =$$

$$\left(\frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^k = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^k = A_{k+1}^k \Rightarrow A_{k+1}^k \geqslant P_{k+1}$$

即当 $n = k + 1$ 时，⑦式仍然成立. 故对任意 $n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}$ 引理 2 成立，等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2 名题完善

第 36 届 IMO 中的第 2 题是俄罗斯提供的一道名题：

题 1 设 a, b, c 为正实数，且满足 $abc = 1$，试证

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2} \qquad ⑨$$

据笔者初探，本题有近 20 种证法，7 个加强，一系列推广，不愧为一道名题.

显然，当 $a = b = c = 1$ 时，⑨式等号成立. 其实，如果我们将题 1 中的已知条件 $abc = 1$ 改为 $a + b + c = 3$ 时. ⑨式仍然成立，且证法依然美妙，因此我们可以将题 1 完善成更妙的：

题 2 设正实数 a, b, c 满足 $abc = 1$ 或 $a + b + c = 3$，则

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

等号成立仅当 $a = b = c = 1$.

证明 我们只须让 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$ 即可，应用平均值不等式有

$$8a^3(b+c) = 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot(b+c) \leqslant \left(\frac{2a+2a+2a+b+c}{4}\right)^4 =$$

$$\left[\frac{(a+b+c)+5a}{4}\right]^4 = \left(\frac{3+5a}{4}\right)^4$$

记⑨式左边为 P，则

$$P = \sum\frac{1}{a^3(b+c)} \geqslant 8\sum\left(\frac{4}{3+5a}\right)^4 \text{(应用平均不等式)} \geqslant$$

$$24\left[\prod\left(\frac{4}{3+5a}\right)^4\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{24\times 4^4}{[(3+5a)(3+5b)(3+5c)]^{4/3}}\geqslant$$

$$24\times 4^4\cdot\left[\frac{(3+5a)+(3+5b)+(3+5c)}{3}\right]^{-4}=$$

$$24\times 4^4\times\left[\frac{9+5(a+b+c)}{3}\right]^{-4}=24\times 4^4\times\left(\frac{9+5\times 3}{3}\right)^{-4}=$$

$$3\times 8\times 4^4\times 8^{-4}=\frac{3}{2}\Rightarrow P\geqslant\frac{3}{2} \tag{⑩}$$

即 ⑨ 式成立.等号成立仅 $a=b=c=1$.

3 参数推广

不等式 ⑨ 可从参数方面推广为:

推广一(参数推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc=3$ 或 $a+b+c=3$.非负参数 x,y 不同时为 0,则

$$P_x=\frac{1}{a^3(xb+yc)}+\frac{1}{b^3(xc+ya)}+\frac{1}{c^3(xa+yb)}\geqslant\frac{3}{x+y} \tag{⑪}$$

显然,当 $x=y>0$ 时,⑪ 式化为 ⑨ 式.

证明 当 x,y 中有一个为 0 时,如 $y=0$,⑪ 式化为

$$\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\geqslant 3 \tag{⑫}$$

应用平均值定理易证 ⑫ 式成立:

当 $x>0,y>0$ 时,有:

(ⅰ)当 $abc=1$ 时,设

$$S=\sum a(xb+yc)=(x+y)\sum bc\Rightarrow(x+y)(\sum bc)P_x=$$

$$\sum a(xb+yc)\sum\frac{(bc)^2}{a(xb+yc)}\geqslant(\sum bc)^2\Rightarrow$$

$$P_x\geqslant\frac{\sum bc}{x+y}\geqslant\frac{3(abc)^{2/3}}{x+y}=\frac{3}{x+y}$$

即 ⑨ 式成立.等号成立仅当 $a=b=c=1$.

(ⅱ)当 $a+b+c=3$ 时,由于

$$(1+\lambda)^3a^3(b+\lambda c)=[(1+\lambda)a]^3(b+\lambda c)\leqslant\left[\frac{3(1+\lambda)a+(b+\lambda c)}{4}\right]^4\Rightarrow$$

$$P_\lambda=\sum\frac{1}{a^3(b+\lambda c)}=\sum\frac{(1+\lambda)^3}{(1+\lambda)^3a^3(b+\lambda c)}\geqslant$$

$$4^4(1+\lambda)^3\sum[3(1+\lambda)a+(b+\lambda c)]^{-4}\geqslant$$

$$3\times 4^4(1+\lambda)^3\left\{\prod[3(1+\lambda)a+b+\lambda c]\right\}^{-4/3}\geqslant$$

$$3\times 4^4(1+\lambda)^3\left\{\frac{\sum[3(1+\lambda)a+b+\lambda c]}{3}\right\}^{-4}=$$

IMO试题研究

$$3\times 4^4(1+\lambda)^3\left(\frac{3(1+\lambda)\sum a+\sum b+\lambda\sum c}{3}\right)^{-4}=$$

$$3\times 4^4(1+\lambda)^3\left[\frac{3(1+\lambda)\times 3+3+3\lambda}{3}\right]^{-4}=$$

$$\frac{3}{1+\lambda}\Rightarrow\frac{1}{a^3(b+\lambda c)}+\frac{1}{b^3(c+\lambda a)}+\frac{1}{c^3(a+\lambda b)}\geqslant\frac{3}{1+\lambda} \qquad ⑬$$

令 $\lambda=\frac{x}{y}$ 代入⑬式即得⑪式,等号成立仅当 $a=b=c=1$.

无独有偶,⑨式还有一个参数推广:

推广二(参数推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$,参数 $\lambda,u,v\geqslant 0$,则

$$P_\lambda\equiv\frac{1}{a^3(\lambda+b+c)}+\frac{1}{b^3(u+c+a)}+\frac{1}{c^3(v+a+b)}\geqslant\frac{9}{6+Q} \qquad ⑭$$

其中

$$Q=\sqrt{(\lambda^2+u^2+v^2)(a^2+b^2+c^2)} \qquad ⑮$$

显然,当取 $\lambda=u=v=0$ 时,$Q=0$.⑭式化为⑨式.当取 $a=b=c=1$,$\lambda=u=v=m$ 时,⑭式左右两边均等于 $3/(2+m)$.

证明 当 $\lambda=u=v=0$ 时,⑭式化为⑨式,成立;

当 λ,u,v 不全为0时,设 $t=\lambda a+ub+vc\leqslant Q$(应用 Cauchy 不等式),记

$$S=\sum a(\lambda+b+c)=t+2\sum ab=\left(\sum ab\right)\left(\frac{t}{\sum ab}+2\right)\leqslant\left(\sum ab\right)\left(\frac{t}{3(abc)^{2/3}}+2\right)=$$

$$\left(\sum ab\right)\left(\frac{t}{3}+2\right)=\frac{1}{3}(6+t)\sum ab\Rightarrow\frac{1}{3}(6+t)\left(\sum ab\right)P_\lambda\geqslant$$

$$S\cdot P_\lambda=\sum a(\lambda+b+c)\cdot\sum\frac{(bc)^2}{a(\lambda+b+c)}\geqslant\left(\sum bc\right)^2=\left(\sum ab\right)^2\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{3\sum ab}{6+t}\geqslant\frac{9(abc)^{2/3}}{6+t}=\frac{9}{6+t}\Rightarrow P_\lambda\geqslant\frac{9}{6+t}\geqslant\frac{9}{6+Q}$$

⑭式成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=u=v$.

4 加权推广

如果允许我们增设一个约束条件,那么我们就可以首先建立不等式⑨的加权推广:

推广三(加权推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$,正数 λ,u,v 与 a,b,c 反序,则

$$P_\lambda\equiv\frac{\lambda}{a^3(b+c)}+\frac{u}{b^3(c+a)}+\frac{v}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(\lambda+u+v) \qquad ⑯$$

显然,当取 $\lambda=u=v$ 时,⑯式化为⑨式.

证明 设 $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$,于是 $abc=1\Leftrightarrow xyz=1$.

再设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^2\geqslant y^2\geqslant z^2\\ \frac{1}{y+z}\geqslant\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{1}{x+y}\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}\geqslant\frac{y^2}{z+x}\geqslant\frac{z^2}{x+y}$$

且

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\text{ 与}(x,yz)\text{ 反序}\\(a,b,c)\text{ 与}(\lambda,u,v)\text{ 反序}\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda,u,v)\text{ 与}(x,y,z)\text{ 同序}\Rightarrow$$

$$(\lambda,u,v)\text{ 与}\left(\frac{x^2}{y+z},\frac{y^2}{z+x},\frac{z^2}{x+y}\right)\text{同序}\Rightarrow$$

$$P_\lambda=\sum\frac{\lambda}{a^3(b+c)}=\sum\frac{\lambda x^2}{y+z}(\text{应用切比雪夫不等式})\geqslant$$

$$\frac{1}{3}(\sum\lambda)\sum\frac{x^2}{y+z}=\left(\frac{\sum\lambda}{3}\right)\sum\frac{1}{a^3(b+c)}\geqslant\frac{1}{3}(\lambda+u+v)\times\frac{3}{2}\Rightarrow P_\lambda\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\lambda+u+v)$$

即 ⑯ 式成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$.

仿照上述方法,可建立 ⑪、⑭ 两式的加权推广.

⑯ 式虽然美观简洁,但增设的条件"λ,u,v 与 a,b,c 反序"太苛刻,令人感到不满意.为此,我们另辟蹊径,重新建立 ⑨ 式的另外三个加权推广:

推广四(加权推广) 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$,权系数 λ,u,v 满足条件 $\lambda+u+v=1$,且 $\lambda,u,v<\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{u}+\sqrt{v})^2-1$,则

$$P_\lambda=\frac{\lambda}{a^3(b+c)}+\frac{u}{b^3(c+a)}+\frac{v}{c^3(a+b)}\geqslant3\prod\left[\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-1-\lambda\right]^{1/3}\quad⑰$$

特别地,当取 $\lambda=u=v$ 时,⑰ 式化为 ⑨ 式.

证明 记 $S=\sum\frac{1}{a},t_1=\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-1-\lambda>0,t_2=\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-1-u>0,t_3=\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-1-v>0$.于是

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=a^{-1}\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}\right)=a^{-1}\left(\frac{S}{b^{-1}+c^{-1}}-1\right)=S\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}\right)-\frac{1}{a}=$$

$$S\left(\frac{S}{b^{-1}+c^{-1}}-1\right)-\frac{1}{a}=\frac{S^2}{b^{-1}+c^{-1}}-\frac{1}{a}-S\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{a^3(b+c)}=\frac{\lambda S^2}{b^{-1}+c^{-1}}-\lambda S-\frac{\lambda}{a}\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{\lambda}{a^3(b+c)}=$$

$$\sum\frac{\lambda S^2}{b^{-1}+c^{-1}}-S\sum\lambda-\sum\frac{\lambda}{a}=$$

$$\frac{S}{2}\sum(b^{-1}+c^{-1})\sum\left(\frac{\lambda}{b^{-1}+c^{-1}}\right)-S-\sum\frac{\lambda}{a}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}S(\sum\sqrt{\lambda})^2-S-\sum\frac{\lambda}{a}=\left[\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-1\right]\sum\frac{1}{a}-\sum\frac{\lambda}{a}=$$

$$\sum\frac{t_1}{a}\geqslant3\left(\frac{t_1}{a}\cdot\frac{t_2}{a}\cdot\frac{t_3}{c}\right)^{1/3}=3(t_1t_2t_3)^{1/3}$$

即 ⑰ 式成立.等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=u=v=\frac{1}{3}$.

不等式 ⑨ 的第三个加权推广是:

推广五(加权推广) 设正数 a,b,c,满足 $abc=1$,正数 λ,u,v 满足

$$M = 9(\lambda u + uv + v\lambda) - 8(\lambda^2 + u^2 + v^2) > 0$$

则

$$P_\lambda = \frac{\lambda}{a^3(b+c)} + \frac{u}{b^3(c+a)} + \frac{v}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3M} \quad ⑱$$

证明 由于

$$\sum \lambda\left(\frac{bc}{\sqrt{a(b+c)}} - \frac{\sqrt{a(b+c)}}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\sum \frac{\lambda b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{1}{4}\lambda a(b+c) \geqslant \sum \lambda bc \Rightarrow$$

$$4\sum \frac{\lambda}{a^3(b+c)} + \sum \lambda a(b+c) \geqslant \sum 4\lambda bc \Rightarrow$$

$$4P_\lambda + \sum (u+v)bc \geqslant \sum 4\lambda bc \Rightarrow$$

$$4P_\lambda \geqslant \sum (4\lambda - u - v)bc = \sum (5\lambda - S)bc$$

其中 $S = \lambda + u + v$.

令

$$\begin{cases} 5\lambda - S = \beta + \gamma \\ 5u - S = \gamma + \alpha \\ 5v - S = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2S - 5\lambda \\ \beta = 2S - 5u \\ \gamma = 2S - 5v \end{cases} \Rightarrow \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta =$$

$$\sum (2S - 5u)(2S - 5v) = \sum [4S^2 - 10(u+v)s + 25uv] =$$

$$12S^2 - 10S\sum (u+v) + 25\sum uv = 12S^2 - 20S^2 + 25\sum uv =$$

$$25\sum uv - 8S^2 = 25\sum uv - 8(\sum \lambda)^2 = 25\sum uv - 8(2\sum uv + \sum \lambda^2) =$$

$$9\sum uv - 8\sum \lambda^2 \Rightarrow \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = M > 0 \Rightarrow$$

$$4P_\lambda \geqslant (\beta+\gamma)bc + (\gamma+\alpha)ca + (\alpha+\beta)ab(\text{应用引理 }1) \geqslant$$

$$2\{[\sum (bc)(ca)] \cdot (\sum \beta\gamma)\}^{1/2} = 2[abc(a+b+c)M]^{1/2} =$$

$$2[(a+b+c)M]^{1/2} \geqslant 2(3M \cdot \sqrt[3]{abc})^{1/2} = 2\sqrt{3M} \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3M}$$

即⑱式成立,等号成立仅当 $a = b = c = 1, \lambda = u = v$.

对于满足条件的三个正数 $abc = 1$, 记 $p = \frac{1}{a^3(b+c)}, q = \frac{1}{b^3(c+a)}, r = \frac{1}{c^3(a+b)}$,那么⑨式即为

$$P = p + q + r \geqslant \frac{3}{2} \quad ⑲$$

为了建立⑨式的第四个加权推广,我们先将⑨式加强为

$$qr + rp + pq \geqslant \frac{3}{4} \quad ⑳$$

加强式 ⑳ 至少有 3 种证法,下面我们选一种.

证明 ⑳ 式即为

$$T \equiv \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{4} \quad ㉑$$

记

$$M = \sum(a+b)(a+c) \leqslant \frac{1}{3}[\sum(a+b)]^2 = \frac{4}{3}(\sum a)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}(\sum a)^2 T \geqslant MT = \sum(a+b)(a+c) \cdot \sum \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geqslant$$

$$(\sum a^{3/2})^2 \geqslant \left[3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = \frac{1}{3}(\sum a)^3 \Rightarrow$$

$$T \geqslant \frac{1}{4}\sum a \geqslant \frac{3}{4}(abc)^{1/3} = \frac{3}{4}$$

推广六(加权推广) 设 $\lambda, u, v > 0, a, b, c > 0$,且 $abc = 1$,则

$$P_\lambda = \frac{u+v}{a^3(b+c)} + \frac{v+\lambda}{b^3(c+a)} + \frac{\lambda+u}{c^3(a+b)} \geqslant \sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)} \quad ㉒$$

虽然,当 $\lambda = u = v$ 时,㉒ 式化为 ⑨ 式. 记 $p = \dfrac{1}{a^3(b+c)}, q = \dfrac{1}{b^3(c+a)}, r = \dfrac{1}{c^3(a+b)}$.

应用引理 1 和 ㉑ 式有

$$P_\lambda = (u+v)p + (v+\lambda)q + (\lambda+u)r \geqslant 2[(uv+v\lambda+\lambda u)(qr+rp+pq)]^{1/2} \geqslant$$

$$2\left[\frac{3}{4}(uv+v\lambda+\lambda u)\right]^{1/2} \Rightarrow P_\lambda = \sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)}$$

即 ㉒ 式成立,等号成立仅当 $a = b = c = 1, \lambda = u = v$.

推广三至六均是不等式 ⑨ 的加权推广. 而一个不等式有四个加权推广并不多见,这点令我们备感兴喜.

5 指数推广

和许多美妙的不等式一样,⑨ 式也有漂亮的指数推广:

推广七(指数推广) 设正数 a, b, c 满足 $abc = 1$,指数 $m \geqslant 0$,且 $K \geqslant \max(2, 2m)$,则

$$P(m,k) \equiv \frac{1}{a^k(b+c)^m} + \frac{1}{b^k(c+a)^m} + \frac{1}{c^k(a+b)^m} \geqslant \frac{3}{2^m} \quad ㉓$$

显然,当 $m = 1, k = 3$ 时,㉓ 式化为 ⑨ 式. ㉓ 式右边的值只与 m 有关,而与 k 无关,这是 ㉓ 式的特点和个性.

证明 $k \geqslant \max(2, 2m) \Rightarrow k \geqslant \begin{cases} 2(0 \leqslant m \leqslant 1) \\ 2m(m > 1) \end{cases}$

(i) 当 $m = 0$ 时,易证 ㉓ 式成立.

（ⅱ）当 $0 < m \leqslant 1$ 时，$k \geqslant 2$，且

$$\left.\begin{array}{l} k \geqslant 2 \\ 0 < m \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} k - m \geqslant 1 \\ k - 2m \geqslant 0 \end{cases}$$

设 $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$，则 $abc = 1 \Leftrightarrow xyz = 1$.

再设

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{k-m} \geqslant y^{k-m} \geqslant z^{k-m} \\ (y+z)^{-m} \geqslant (z+x)^{-m} \geqslant (x+y)^{-m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum (y+z)^m \leqslant 3\left[\frac{1}{3}\sum (y+z)\right]^m = 3\left(\frac{2}{3}\sum x\right)^m \text{（应用幂平均不等式）} \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}\sum x\right)^m \cdot P \geqslant P \cdot \sum (y+z)^m =$$

$$\left[\sum \frac{x^{k-m}}{(y+z)^m}\right]\sum (y+z)^m \text{（应用切比雪夫不等式）} \geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum x^{k-m}\right)\sum (y+z)^{-m} \cdot \sum (y+z)^m \text{（应用柯西不等式）} \geqslant$$

$$3\sum x^{k-m} \geqslant 9\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{k-m} = 3^{2+m-k} \cdot \left(\sum x\right)^{k-m} \text{（应用幂平均不等式）} \Rightarrow$$

$$2^m \cdot 3^{1-m}\left(\sum x\right)^m \cdot P \geqslant 3^{2+m-k} \cdot \left(\sum x\right)^{k-m} \Rightarrow$$

$$P \geqslant 2^{-m} \cdot 3^{1+2m-k} \cdot \left(\sum x\right)^{k-2m} = \frac{3}{2^m}\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{k-2m} \geqslant$$

$$\frac{3}{2^m}\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^{k-2m} \Rightarrow P \geqslant \frac{3}{2^m}$$

（ⅲ）当 $m \geqslant 1, k \geqslant 2m$ 时，有

$$\left.\begin{array}{l} m \geqslant 1 \\ k \geqslant 2m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} k - m \geqslant 1 \\ k - 2m \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow P = \sum \frac{1}{a^k(b+c)^m} = \sum \frac{x^{k-m}}{(y+z)^m} \geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum x^{k-m}\right)\sum \left(\frac{1}{y+z}\right)^m \text{（应用切比雪夫不等式）} \geqslant$$

$$\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{k-m} \cdot 3\left(\frac{1}{3}\sum \frac{1}{y+z}\right)^m = 3^{1-k}\left(\sum x\right)^{k-2m}\left[\left(\sum x\right)\sum \left(\frac{1}{y+z}\right)\right]^m \geqslant$$

$$3^{1-k}\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^{k-2m} \cdot \left[\frac{1}{2}\sum (y+z)\sum \frac{1}{y+z}\right]^m \text{（应用柯西不等式）} \geqslant$$

$$3^{1-k} \cdot 3^{k-2m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\right)^m = \frac{3}{2^m} \Rightarrow P \geqslant \frac{3}{2^m}$$

即㉓式成立，等号成立仅当

$$x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c$$

下面我们再以参数、指数两方面推广⑨式：

推广八（参数－指数推广） 设正数 a, b, c 满足 $abc = 1$，参数 $\lambda > 0$，指数 $0 \leqslant m \leqslant 1$. $k \geqslant m + 2$，则

$$P_\lambda^1 \equiv \frac{1}{a^k(b+\lambda c)^m}+\frac{1}{b^k(c+\lambda a)^m}+\frac{1}{c^k(a+\lambda b)^m} \geqslant \frac{3}{(1+\lambda)^m} \quad ㉔$$

证明 （ⅰ）$m=0$ 时易证㉔式成立；

（ⅱ）当 $0<m\leqslant 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(k-m)\geqslant 1\\(abc)^m=1\end{array}\right\}\Rightarrow P_\lambda^1=\sum \frac{(a^{-1})^{k-m}}{(\lambda b^{-1}+c^{-1})^m}$.

设

$$S=\sum(\lambda b^{-1}+c^{-1})^m \leqslant 3\left[\frac{\sum(\lambda b^{-1}+c^{-1})}{3}\right]^m=3\left[\frac{(1+\lambda)\sum a^{-1}}{3}\right]^m \Rightarrow$$

$$3\left[\frac{1}{3}(1+\lambda)(\sum a^{-1})\right]^m \cdot P_\lambda^1 \geqslant SP_\lambda^1=$$

$$\sum(\lambda b^{-1}+c^{-1})^m \cdot \sum \frac{(a^{-1})^{k-m}}{(\lambda b^{-1}+c^{-1})^m} \geqslant \left[\sum(a^{-1})^{\frac{1}{2}(k-m)}\right]^2 \geqslant$$

$$\left[3\left(\frac{\sum a^{-1}}{3}\right)^{\frac{k-m}{2}}\right]^2 \Rightarrow P_\lambda^1 \geqslant 3^{1+2m-k}\cdot(\sum a^{-1})^{k-2m}\cdot(1+\lambda)^{-m} \geqslant$$

$$3^{1+2m-k}\cdot[3(abc)^{-1/3}]^{k-2m}\cdot(1+\lambda)^{-m}=$$

$$3^{1+2m-k}\cdot 3^{k-2m}\cdot(1+\lambda)^{-m} \Rightarrow P_\lambda^1 \geqslant \frac{3}{(1+\lambda)^m}$$

即㉔式成立，等号成立仅当 $a=b=c=1$（与 λ,k,m 无关）.

另证：$k\geqslant m+2 \Rightarrow \frac{k-m}{2}\geqslant 1$.

设

$$S=\sum[a(b+\lambda c)]^m \leqslant 3\left[\frac{1}{3}\sum a(b+\lambda c)\right]^m=3^{1-m}\cdot(1+\lambda)^m(\sum bc)^m \quad ㉕$$

又

$$SP_\lambda^1=S\sum\left\{\frac{1}{a^{k-m}[a(b+\lambda c)]^m}\right\}=\sum[a(b+\lambda c)]^m\cdot\sum\frac{(bc)^{k-m}}{[a(b+\lambda c)]^m} \geqslant$$

$$\left[\sum(bc)^{\frac{1}{2}(k-m)}\right]^2 \geqslant \left[3\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^{\frac{1}{2}(k-m)}\right]^{-2}=3^{2+m-k}\cdot\left(\sum bc\right)^{k-m} \quad ㉖$$

由㉕和㉖结合得

$$P_\lambda^1 \geqslant (1+\lambda)^{-m}\cdot 3^{1+2m-k}\cdot(\sum bc)^{k-2m} \geqslant (1+\lambda)^{-m}\cdot 3^{1+2m-k}\cdot[3(abc)^{\frac{2}{3}}]^{k-2m}=$$

$$(1+\lambda)^{-m}\cdot 3^{1+2m-k}\cdot 3^{k-2m}=\frac{3}{(1+\lambda)^m}$$

即㉔式成立，等号成立仅当 $a=b=c=1$.

仿照上述推广技巧，我们不难将推广二再推广为：

推广九（参数－指数推广） 设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$；指数 $\alpha\geqslant 1\geqslant\beta\geqslant 0$，参数 $\lambda,u,v\geqslant 0$，则

$$\frac{1}{a^{2\alpha+\beta}(\lambda+b+c)^\beta}+\frac{1}{b^{2\alpha+\beta}(u+c+a)^\beta}+\frac{1}{c^{2\alpha+\beta}(v+a+b)^\beta} \geqslant \frac{3^{1+\beta}}{(6+t)^\beta} \quad ㉗$$

其中 $t=\lambda a+ub+vc$.

证明 记㉗式左边为 P_t，易证若 $\beta = 0$ 时㉗式成立.

当 $0 < \beta \leqslant 1$ 时，由 $\alpha \geqslant 1 \geqslant \beta > 0 \Rightarrow 2\alpha - \beta > 0$，易得 $\sum bc \geqslant 3$.

$$P_t = \sum \frac{(bc)^{2\alpha}}{[a(\lambda + b + c)]^{\beta}}$$

从推广二中的证明有

$$\sum a(\lambda + b + c) \leqslant \frac{1}{3}(6 + t)\sum ab$$

设

$$S = \sum[a(\lambda + b + c)]^{\beta} \leqslant 3\left[\frac{1}{3}\sum a(\lambda + b + c)\right]^{\beta} = 3^{1-2\beta} \cdot (t + 6)^{\beta}(\sum bc)^{\beta} \quad ㉘$$

又

$$SP_t = \sum[a(\lambda + b + t)]^{\beta} \cdot \sum \frac{(bc)^{2\alpha}}{[a(\lambda + b + c)]^{\beta}} \geqslant [\sum(bc)^{\alpha}]^2 \geqslant$$

$$\left[3\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^{\alpha}\right]^2 = 3^{2-2\alpha} \cdot (\sum bc)^{2\alpha} \quad ㉙$$

由㉘和㉙得

$$(t + 6)^{\beta} \cdot P_t \geqslant 3^{1-2\alpha+2\beta} \cdot (\sum bc)^{2\alpha-\beta} \geqslant 3^{1-2\alpha+2\beta} \cdot 3^{2\alpha-\beta} = 3^{1+\beta} \Rightarrow P_t \geqslant \frac{3^{1+\beta}}{(t + 6)^{\beta}}$$

即㉗式成立.等号成立仅当 $\lambda = u = v$ 及 $a = b = c = 1$.

在⑨式的四个加权推广中，推广六最讨人喜爱，而且它还可以从指数方面进行推广，必须先将⑨式的一个加强式⑳式进行指数推广：

推广十 设 $a,b,c > 0$，且 $abc = 1.0 \leqslant m \leqslant 1, k \geqslant 2$ 或 $k \geqslant \max(3m, m + 1)$ $(m \geqslant 0)$，则

$$\frac{a^k}{[(a + b)(a + c)]^m} + \frac{b^k}{[(b + c)(b + a)]^m} + \frac{c^k}{[(c + a)(c + b)]^m} \geqslant \frac{3}{4^m} \quad ㉚$$

显然，当取 $m = 1, k = 3$ 时，㉚式化为⑳式.

由于当 $m = 0$ 时，㉚式显然成立，因此，我们只须证 $m > 0$ 即可，并记㉚式左边为 T_m.

证明 (ⅰ)当 $0 < m \leqslant 1$ 时 $k \geqslant 2$，有 $k - 2m \geqslant 0$ 及 $\sum a = a + b + c \geqslant 3$.
设

$$S = \sum[(a + b)(a + c)]^m \leqslant 3\left[\frac{1}{3}\sum(a + b)(a + c)\right]^m \leqslant$$

$$3\left[\frac{1}{3}\sum(a + b)\right]^{2m} = 2^m \cdot 3^{1-2m} \cdot (\sum a)^{2m} \quad ㉛$$

又

$$S \cdot T_m \geqslant (\sum a^{k/2})^2 \geqslant 3^{2-k}(\sum a)^k \quad ㉜$$

由㉛和㉜推得

$$T_m \geqslant 2^{-2m} \cdot 3^{1+2m-k} \cdot (\sum a)^{k-2m} \geqslant \frac{3}{4^m}$$

（ⅱ）当 $m>0, k\geqslant \max(3m, m+1)$ 时，有 $k-3m\geqslant 0, k-m\geqslant 1$.

设 $x=a^{-1}, y=b^{-1}, z=c^{-1}$，则 $xyz=1$. 于是

$$\sum(xy)^{k-m}=\frac{1}{2}\sum 2(xy)^{k-m}=\frac{1}{2}\sum(x^{k-m}+y^{k-m})z^{k-m}\geqslant$$

$$\frac{3}{2}\left[\prod(x^{k-m}+y^{k-m})z^{k-m}\right]^{1/3}=\frac{3}{2}\left[(xyz)^{k-m}\cdot\prod(x^{k-m}+y^{k-m})\right]^{1/3}\geqslant$$

$$3\times 2^{m-k}\left[\prod(x+y)\right]^{(k-m)/3} \tag{33}$$

及

$$\sum(x+y)^m\geqslant 3\left[\prod(x+y)\right]^{m/3} \tag{34}$$

设

$$x\geqslant y\geqslant z\Rightarrow\begin{cases}(xy)^{k-m}\geqslant(zx)^{k-m}\geqslant(yz)^{k-m}\\(x+y)^m\geqslant(z+x)^m\geqslant(y+z)^m\end{cases}\Rightarrow T_m=$$

$$\sum\frac{(xy)^{k-m}}{[(y+z)(x+z)]^m}=\frac{\sum(xy)^{k-m}\cdot(x+y)^m}{\left[\prod(x+y)\right]^m}\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left[\sum(xy)^{k-m}\right]\cdot\sum(x+y)^m\cdot\left[\prod(x+y)\right]^{-m}\geqslant$$

$$\frac{3\times 2^{m-k}\left[\prod(x+y)\right]^{(k-m)/3}\cdot 3\left[\prod(x+y)\right]^{m/3}}{3\left[\prod(x+y)\right]^m}=$$

$$3\times 2^m\cdot\left[\prod(x+y)\right]^{(k-3m)/3}\geqslant 3\times 2^{m-k}\cdot\left(\prod 2\sqrt{xy}\right)^{(k-3m)/3}=$$

$$3\times 2^{m-k}\cdot 2^{k-3m}\cdot(xyz)^{(k-3m)/3}=3\times 2^{-2m}\Rightarrow T_m\geqslant\frac{3}{4^m}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$.

将推广六和推广十“珠联合璧”，就会“鸾凤齐鸣”，“鸳鸯并举”成一个漂亮的：

推广十一（系数－指数推广） 设 $a,b,c>0$，且 $abc=1, 0\leqslant m\leqslant 1, k\geqslant 2$ 或 $k\geqslant \max(3m, m+1)(m>0), \lambda, u, v>0$，则

$$\frac{u+v}{a^k(b+c)^m}+\frac{v+\lambda}{b^k(c+a)^m}+\frac{\lambda+u}{c^k(a+b)^m}\geqslant\frac{1}{2^{m-1}}\cdot\sqrt{3(\lambda u+uv+v\lambda)} \tag{35}$$

证明 设㉟式左边为 $P_\lambda^{(m)}$，则

$$\begin{cases}p=[a^k(b+c)^m]^{-1}\\q=[b^k(c+a)^m]^{-1}\\r=[c^k(a+b)^m]^{-1}\end{cases}\Rightarrow qr+rp+pq=T_m\geqslant\frac{3}{4^m}\text{（应用㉚式）}\Rightarrow$$

$$P_\lambda^{(m)}=(u+v)p+(v+\lambda)q+(\lambda+u)r\geqslant$$

$$2\sqrt{(uv+v\lambda+\lambda u)(qr+rp+pq)}\geqslant 2\sqrt{(\lambda u+uv+v\lambda)\cdot\frac{3}{4^m}}\Rightarrow$$

$$P_\lambda^{(m)}\geqslant\frac{\sqrt{3(\lambda u+uv+v\lambda)}}{2^{m-1}}$$

即㉟式成立，等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=u=v$.

6　元数推广

⑨式是关于3个元数 a,b,c(满足 $abc=1$)的分式型不等式

$$P=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2} \quad ㊱$$

为了将⑨式以3元推广到多元,我们先将⑨式变形为

$$P=\frac{a^{-2}}{b^{-1}+c^{-1}}+\frac{b^{-2}}{c^{-1}+a^{-1}}+\frac{c^{-2}}{a^{-1}+c^{-1}}\geqslant\frac{3}{2} \quad ㊲$$

现在我们先将⑨式以指数、元数两个方面推广为:

推广十二(指数－元数推广)　设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且 $a_1a_2\cdots a_n=1$,记 $A_i=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-1})-a_i^{-1}(1\leqslant i\leqslant n)$.指数 $\alpha\geqslant1,\alpha\geqslant\beta\geqslant0$,则

$$P_n^{(\alpha)}\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{2\alpha}A_i^{\beta}}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}} \quad ㊳$$

证明　设 $x_i=a_i^{-1}(1\leqslant i\leqslant n),S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$,则 $A_i=S-x_i,P_n^{(\alpha)}\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2\alpha}}{A_i^{\beta}}$,则

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=1\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}x_i=1\Rightarrow S\geqslant n$$

又

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}(S-x_i)=nS-\sum_{i=1}^{n}x_i=(n-1)S=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

(ⅰ)当 $\beta=0$ 时,易证 $P_n^{(\alpha)}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{2\alpha}\geqslant n$.此时㊳式成立;

(ⅱ)当 $\alpha\geqslant1\geqslant\beta>0$ 时,$2\alpha-\beta>0$,有

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^{\beta}\leqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}{n}\right)^{\beta}=n\left[\frac{(n-1)S}{n}\right]^{\beta}\Rightarrow n\left[\frac{(n-1)S}{n}\right]^{\beta}\cdot P_n^{(\alpha)}\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^{\beta}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2\alpha}}{A_i^{\beta}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^2\geqslant\left[n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{\alpha}\right]^2=\left[n\left(\frac{S}{n}\right)^{\alpha}\right]^2\Rightarrow$$

$$P_n^{(\alpha)}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\cdot\left(\frac{S}{n}\right)^{2\alpha-\beta}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}$$

(ⅲ)当 $\alpha\geqslant\beta\geqslant l$ 时,$2\alpha-\beta>0$.设

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0\Rightarrow S-x_1\leqslant S-x_2\leqslant\cdots\leqslant S-x_n\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{A_1^{\beta}}\geqslant\frac{1}{A_2^{\beta}}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{A_n^{\beta}}\\ x_1^{2\alpha}\geqslant x_2^{2\alpha}\geqslant\cdots\geqslant x_n^{2\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2\alpha}}{A_i^{\beta}}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i^{\beta}}\geqslant$$

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{2\alpha}\cdot n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i}\right)^{\beta}\geqslant\left(\frac{S}{n}\right)^{2\alpha}\cdot n\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}\right)^{\beta}=$$

$$\left(\frac{S}{n}\right)^{2\alpha}\cdot n\left[\frac{n}{(n-1)S}\right]^{\beta}=\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\cdot\left(\frac{S}{n}\right)^{2\alpha-\beta}\geqslant$$

$$\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\Rightarrow P_n^{(\alpha)}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}$$

总结上述，㊳ 式成立，等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$(与 α,β 无关).

我们刚才虽然建立了 ⑨ 式的一个多元推广，但它却是 ⑨ 式的变形多元推广，不是 ⑨ 式原汁原味的多元推广，令人不够满意，而追求更好更满意的结果，是我们探讨数学的动力. 其实只要将前面的引理 2 请“出山”来帮助我们建立：

推广十三(元数 - 指数推广) 设 $n(2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，指数 k,m 满足 $k\geqslant n-1\geqslant(n-1)m\geqslant 0$. 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，则

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^k(S-a_i)^m}\geqslant\frac{m}{(n-1)^m}\tag{39}$$

特别地，当 $n=3,k=3,m=1$ 时，㊴ 式即为 ⑨ 式.

证明 当 $k=m=0$ 或 $k>m=0$ 时易证 ㊴ 式成立；

当 $m>0$ 时，由 $k\geqslant n-1\geqslant(n-1)m>0\Rightarrow\begin{cases}1\geqslant m>0\\ k\geqslant 2\end{cases}$，且易知 $S\geqslant n$.

设 $A_i=S-a_i\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=(n-1)S$. 再记 $x_i=(a_i^kA_i^m)^{-1}\Rightarrow P_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow T_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_2x_3\cdots x_n+\cdots+x_nx_1\cdots x_{n-2}$. 由

$$a_1a_2\cdots a_n=1\Rightarrow T_n=\frac{a_n^k}{(A_1A_2\cdots A_{n-1})^m}+\frac{a_1^k}{(A_2A_3\cdots A_n)^m}+\cdots+\frac{a_{n-1}^k}{(A_nA_1\cdots A_{n-2})^m}\tag{40}$$

再记

$$A=(A_1A_2\cdots A_{n-1})^m+(A_2A_3\cdots A_n)^m+\cdots+(A_nA_1\cdots A_{n-2})^m\tag{41}$$

应用 Cauchy 不等式有

$$A\cdot T_n\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^k}\Big)^2\geqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\frac{k}{2}}=n^2\left(\frac{S}{n}\right)^k$$

应用引理有

$$A\leqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i^m}{n}\right)^{n-1}\leqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}{n}\right)^{(n-1)m}=n\left(\frac{n-1}{n}S\right)^{(n-1)m}\tag{42}$$

由 ㊶ 和 ㊷ 结合得

$$T_n\geqslant n^2\left(\frac{S}{n}\right)^k\Big/A\geqslant\frac{n}{(n-1)^{(n-1)m}}\left(\frac{S}{n}\right)^{k-(n-1)m}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{(n-1)m}}\tag{43}$$

再度应用引理得

$$\left(\frac{P_n}{n}\right)^{n-1}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{n-1}\geqslant\frac{T_n}{n}\geqslant\frac{1}{(n-1)^{(n-1)m}}\Rightarrow P_n\geqslant\frac{n}{(n-1)^m}$$

总括上述，㊴ 式成立，等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$(与 k,m 无关).

回顾上述证明,多亏了引理2两度“出山”相助.帮人帮到底,才避免了我们在证明过程中“万里长征”.

7 以旧翻新

再让我们回顾不等式⑨那迷人的风采

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

如果当你心不在焉地误写为

$$\frac{1}{a^{3(b+c)}}+\frac{1}{b^{3(c+a)}}+\frac{1}{c^{3(a+b)}}\geqslant 3 \qquad ㊹$$

后,也许你会骂自己是笨蛋.但当你仔细推敲时,你就会惊奇地发现,㊹式不仅正确,而且结构同样对称紧凑,外观同样漂亮,仍不失为一个优美的代数不等式.不仅如此,㊹式还有两个漂亮的推广:

新题1 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$ 或 $a+b+c=3,k>0,\lambda,u,v>0$,则

$$F_\lambda=\frac{u+v}{a^{k(b+c)}}+\frac{v+\lambda}{b^{k(c+a)}}+\frac{\lambda+u}{c^{k(a+b)}}\geqslant 2\sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)} \qquad ㊺$$

证明 记

$$S=a+b+c$$

$$m=\sum(b^{(c+a)}\cdot c^{a+b})^{-k}\geqslant 3\left(\prod b^{c+a}\cdot c^{a+b}\right)^{-\frac{k}{3}}=3\left(\prod a^{b+c}\right)^{-2k/3}=$$

$$3\left(\prod a^{S-a}\right)^{-2k/3}=\frac{3(a^ab^bc^c)^{2k/3}}{(abc)^{2kS/3}}$$

(ⅰ)当

$$abc=1\Rightarrow a+b+c\geqslant 3\Rightarrow m\geqslant 3(a^ab^bc^c)^{2k/3}\geqslant$$

$$3\left[\frac{a+b+c}{a\left(\frac{1}{a}\right)+b\left(\frac{1}{b}\right)+c\left(\frac{1}{c}\right)}\right]^{\frac{2k(a+b+c)}{3}}=3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{2k(a+b+c)}{3}}\geqslant 3\Rightarrow$$

$$F_\lambda\geqslant 2\sqrt{m(uv+v\lambda+\lambda u)}(\text{应用引理 }1)\geqslant 2\sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)}$$

(ⅱ)当

$$a+b+c=3\Rightarrow abc\leqslant 1\Rightarrow m\geqslant 3(a^ab^bc^c)^{2k/3}\geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{2k(a+b+c)}{3}}=3\Rightarrow$$

$$F_\lambda\geqslant 2\sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)}$$

综合上述,㊺式成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=u=v$.

㊹式的另一个推广便是:

新题2 设 $k>0,a_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=n$ 或 $\prod\limits_{i=1}^n a_i=1$,则

$$F_n=\sum_{i=1}^n a_i^{-k(S-a_i)}\geqslant n \qquad ㊻$$

其中 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

应用加权不等式,还可寻觅到 ㊻ 式的配对式:

新题 3 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N}),k>0,S=\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant\frac{n}{n-1}$,则

$$f_n=\sum_{i=1}^{n}(S-a_i)^{-ka_i}\geqslant n \tag{47}$$

8 探讨无限

名言道:学无止境.我们对名题的探讨也是无限的.比如,关于不等式 ⑨,就还可从系数、参数两个方面再推广为:

推广十四 正数 a,b,c 满足 $abc=1$:参数 $k>0$,系数 $\lambda,u,v>\frac{1}{4}$,则

$$\frac{\lambda}{a^3(b+kc)}+\frac{u}{b^3(c+ka)}+\frac{v}{c^3(a+kb)}\geqslant\frac{3}{1+k}\sqrt[3]{(2\sqrt{\lambda}-1)(2\sqrt{u}-1)(2\sqrt{v}-1)} \tag{48}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$ 且 $\lambda=u=v=1$.

显然,当 $\lambda=u=v=1$ 时,㊽ 式即为 ⑨ 式的参数推广.

推广十五 正数 a,b,c 满足 $abc=1$,参数 $k>0$,系数 λ,u,v 满足

$$\delta=9(uv+v\lambda+\lambda u)-8(\lambda^2+u^2+v^2)>0$$

则

$$\frac{\lambda}{a^3(b+kc)}+\frac{u}{b^3(c+ka)}+\frac{v}{c^3(a+kb)}\geqslant\frac{\sqrt{3\delta}}{1+k} \tag{49}$$

进一步地,我们从系数、参数、指数三个方面将不等式 ⑨,推广为:

推广十六 正数 a,b,c 满足 $abc=1$;参数 $t\geqslant 0$,系数 $\lambda,u,v>0$,指数 $k\geqslant 2m\geqslant 0$,且 $k\geqslant 1+m$,则

$$\frac{u+v}{a^k(b+tc)^m}+\frac{v+\lambda}{b^k(c+ta)^m}+\frac{\lambda+u}{c^k(a+tb)^m}\geqslant\frac{2}{(1+t)^m}\cdot\sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)} \tag{50}$$

显然,㊿ 式包括了三个推广式,因此它的综合性很强.

略证 记 ㊿ 式左边为 $P_k^{(t)},\delta=uv+v\lambda+\lambda u,S=\sum(a+tb)(c+ta)$,则

$$S=t\sum a^2+(t^2+t+1)\sum bc=t(\sum a)^2+(t^2-t+1)\sum bc\leqslant$$

$$t(\sum a)^2+\frac{1}{3}(t^2-t+1)(\sum a)^2\Rightarrow S\leqslant 3(1+t)^2\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2 \tag{51}$$

证

$$T_K(t)=\sum\frac{a^k}{[(a+tb)(c+ta)]^m}=\sum\frac{(a^{\frac{k}{1+m}})^{1+m}}{[(a+tb)(c+ta)]^m}(\text{应用权方和不等式})\geqslant$$

$$\frac{\left(\sum a^{\frac{k}{1+m}}\right)^{1+m}}{S^m} \geqslant \frac{\left[3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^{\frac{k}{1+m}}\right]^{1+m}}{\left[3(1+t)^2\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2\right]^m} \Rightarrow$$

$$T_k^{(t)} \geqslant \frac{3}{(1+t)^{2m}}\left(\frac{\sum a}{3}\right)^{k-2m} \geqslant \frac{3}{(1+t)^{2m}} \Rightarrow$$

$$P_k^{(t)} \equiv \sum \frac{u+v}{a^k(b+tc)^m} \geqslant 2\sqrt{\delta T_k^{(t)}} \geqslant \frac{2}{(1+t)^m} \cdot \sqrt{3\delta}$$

等号成立仅当 $a = b = c = 1$,且 $\lambda = u = v$.

应用同样的技巧,我们又可将推广十三修缮成:

推广十七 设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n (3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$;指数 k, m 满足 $k \geqslant (n-1)m \geqslant 0$ 及 $k \geqslant 1 + m$,则

$$P_n^1 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^k (S - a_i)^m} \geqslant \frac{n}{(n-1)^m} \tag{52}$$

证明 (ⅰ)当 $k = m = 0$ 或 $k > m = 0$ 时,易证 ⑬ 式成立;

(ⅱ)当 $m > 0$ 时,注意到 $S = \sum_{i=1}^n a_i \geqslant n$.

记 $A_i = S - a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i = (n-1)S, x_i = (a_i^k A_i^m)^{-1} \Rightarrow P_n^1 = \sum_{i=1}^n x_i$

$$T_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + x_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + x_n x_1 \cdots x_{n-2}$$

由 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1 \Rightarrow T_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{B_i^m}$,其中 $B_i = \frac{A_1 A_2 \cdots A_n}{A_i} (1 \leqslant i \leqslant n)$.

应用引理有

$$\sum_{i=1}^n B_i \leqslant n\left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n}\right)^{n-1} \leqslant n\left(\frac{n-1}{n}S\right)^{n-1} \tag{53}$$

再应用权方和不等式有

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{B_i^m} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(a_i^{\frac{k}{m+1}}\right)^{m+1}}{B_i^m} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{k/(m+1)}\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^m} \geqslant \frac{\left[n\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^{\frac{k}{m+1}}\right]^{m+1}}{\left[n\left(\frac{n-1}{n}S\right)^{n-1}\right]^n} =$$

$$\frac{n}{(n-1)^{(n-1)m}}\left(\frac{S}{n}\right)^{k-(n-1)m} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{(n-1)m}} \Rightarrow T_n \geqslant \frac{n}{(n-1)^{(n-1)m}} \tag{54}$$

再次应用引理得

$$\left(\frac{P_n^1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^{n-1} \geqslant \frac{T_n}{n} \geqslant \frac{1}{(n-1)^{(n-1)m}} \Rightarrow P_n^1 \geqslant \frac{n}{(n-1)^m} \tag{55}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$(与 k 和 m 无关).

第46届国际数学奥林匹克试题三的证明、加强与推广

蒋明斌[①]

1　引　言

2005年7月在墨西哥梅里达(MERIDA)举行的第46届国际数学奥林匹克(IMO 2005)第一天的试题三为:设 x,y,z 为正数且 $xyz \geqslant 1$.求证

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geqslant 0 \qquad ①$$

这道由韩国提供的不等式题成为本届IMO中得分率最低的一题,所有参赛选手的平均得分仅为0.92分,得满分者只有55位(占10.87%),得零分的高达417位(占82.41%),足见此题的难度.摩尔多瓦(Moldova)选手 Boreico Iurie 因此题的解法获得了组委会授予的特别奖.

本文拟给出此题的证明、加强与推广.

2　证明与加强

证明本题的关键是构造"零件不等式",将"零件不等式"组装即得所证不等式.若不然,欲通过"去分母化为整式不等式"的方法来证明,可能要困难得多.

对于几项和的对称分式不等式来讲,所谓构造"零件不等式",实际上就是将和式中的每一项放缩成分母相同、分子可轮换的式子.具体如何放缩往往需要经过猜测、试探、推理等.

此外,在证明不等式①时还需要注意到条件 $xyz \geqslant 1$ 可变形为 $\frac{1}{x} \leqslant yz$ 或 $x \geqslant \frac{1}{yz}$ 而达到换元或消元的目的.

证明1　首先证明"零件不等式"

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqslant \frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} \qquad ②$$

① 四川省蓬安县蓬安中学(邮编:637851)　Email:jmb8680555@tom.com

因为

$$x^3(x^3-1)(x^2+y^2+z^2)-(x^3-1)(x^5+y^2+z^2)=(x^3-1)^2(y^2+z^2)\geqslant 0$$

所以

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2} \qquad ③$$

又由 $xyz\geqslant 1$,有$\frac{1}{x}\leqslant yz\leqslant\frac{y^2+z^2}{2}$,那么

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

即不等式 ② 成立.同理,有

$$\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}\geqslant\frac{y^2-\frac{1}{2}(z^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geqslant\frac{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

三式相加,有

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geqslant$$

$$\frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2-\frac{1}{2}(z^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}=0$$

故不等式 ① 成立.

注 前面提到的摩尔多瓦(Moldova)选手 Boreico Iurie 获特别奖的解法其基本思路与证明 1 相同,他先证明的 ③ 式.

证明 2 由$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$,知不等式 ① 等价于

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5}\leqslant\frac{3}{x^2+y^2+z^2} \qquad ④$$

注意到 $yz\geqslant\frac{1}{x}$,并应用柯西不等式,有

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2$$

所以

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\leqslant\frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

即

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad ⑤$$

同理,有

$$\frac{1}{x^2+y^5+z^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^5}\leqslant\frac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

三式相加,有

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5}\leqslant$$

$$\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3}{x^2+y^2+z^2}$$

即不等式 ④ 成立,故不等式 ① 成立.

注 本题的命题者韩国的 Hojoo Lee 先生提供的解答其基本思路与上述证明 2 类似,他先将 ① 化为等价的

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}\leqslant 3 \qquad ⑥$$

然后用柯西不等式得到$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$,同理得出另两式,三式相加得

$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}\leqslant 2+\frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2}\leqslant 3$,即 ⑥ 成立.

证明 3 由证明 2 知,要证明不等式 ①,只需证明不等式 ⑤,注意到 $x\geqslant\frac{1}{yz}$,有

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}=\frac{1}{x\cdot x^4+y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{\frac{x^4}{yz}+y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{\frac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2}=$$

$$\frac{y^2+z^2}{\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)^2+\frac{1}{3}(2x^2-y^2-z^2)^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

即$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.以下同证明 2.

证明 4 注意到不等式 ① 等价于

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\geqslant\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \qquad ⑦$$

我们证明更强的

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\geqslant 1\geqslant\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \qquad ⑧$$

为证 ⑧ 左边的不等式,先证“零件不等式”

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4} \qquad ⑨$$

由

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}=x^5\cdot\frac{y^4+z^4-\frac{1}{x}(y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}\geqslant$$

$$x^5\cdot\frac{y^4+z^4-yz(y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}\geqslant x^5\cdot\frac{y^4+z^4-\frac{1}{2}(y^2+z^2)^2}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}=$$

$$\frac{x^5}{2}\frac{(y^2-z^2)^2}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}\geqslant 0$$

知不等式 ⑨ 成立.

同理,有

$$\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}\geqslant\frac{y^4}{x^4+y^4+z^4},\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\geqslant\frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

三式相加即得式 ⑧ 左边的不等式.

应用前面已证的不等式 ⑤,有

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{x^2y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad ⑩$$

同理有

$$\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}\leqslant\frac{3}{2}\frac{y^2z^2+x^2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\leqslant\frac{3}{2}\frac{z^2x^2+y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

三式相加得

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\leqslant$$

$$\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\leqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=1$$

即式 ⑧ 右边的不等式成立,因而不等式 ⑧ 成立,故不等式 ① 成立.

注 前面我们证明不等式 ①、④、⑧,是通过分别构造了“零件不等式”②、⑤、⑨、⑩来实现的,这使我们回想起 2001 年在美国华盛顿举行的第 42 届国际数学奥林匹克(IMO 2001)中,也是由韩国 Hojoo Lee 先生提供的那道脍炙人口的不等式题(即 IMO 42 - 2):设 $a,b,c>0$,求证

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1 \qquad ⑪$$

此题的命题者提供的证法同样是先证“零件不等式”:$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{3}{4}}}$,同理得出另两式,相加即得 ⑪.

由此可以看出,IMO 46 - 3 与 IMO 42 - 2 表面上似乎不同,但其证法何其相似,从这个意义上讲这两道试题同出一源.只是 IMO 46 - 3 的命题者在证明 ① 时,先对 ① 作代数变形化成等价不等式 ⑥ 后再巧妙应用柯西不等式得出“零件不等式”:$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

另外 IMO 42 – 2 用常规方法(即去分母去根号的方法)容易证出,而 IMO 46 – 3 用常规方法(即去分母的方法)就困难得多,这也就是 IMO 46 – 3 得分率低,而 IMO 42 – 2 得分率并不低的原因所在.

当然用去分母的方法证明此题并不是不可行,只是运算量较大,且需要较强的代数变形能力,本次竞赛中获得金牌的中国台湾选手王琨杰同学就是用此法证出了本题:

证明 5 记 $\sum x^m y^n = x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n$, $\sum x^m y^n z^k = x^m y^n z^k + y^m z^n x^k + z^m x^n y^k$, $\sum x^m = x^m + y^m + z^m$,将 ① 左边通分展开并化简可得,所证明不等式等价于

$$3x^5y^5z^5+2\sum x^7y^5+2\sum x^5y^7+\sum x^9+\sum x^5y^2z^2\geqslant$$
$$\sum x^5y^5z^2+\sum x^5y^4+\sum x^4y^5+\sum x^6+\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+3x^2y^2z^2 \qquad ⑫$$

由平均值不等式有

$$\frac{1}{4}(x^5y^5z^5+x^5y^5z^5+x^7y^5+x^5y^7)\geqslant\sqrt[4]{x^{22}y^{22}z^{10}}=x^5y^5z^2\sqrt{xyz}\geqslant x^5y^5z^2$$

对 x,y,z 轮换求和得

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5+\frac{1}{4}\sum x^7y^5+\frac{1}{4}\sum x^5y^7\geqslant\sum x^5y^5z^2$$

由平均值不等式有

$$\frac{1}{3}(x^7y^5+x^5y^7+x^5y^2z^2)\geqslant\sqrt[3]{x^{17}y^{14}z^2}=x^5y^4\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant x^5y^4$$

交换 x,y 得

$$\frac{1}{3}(x^5y^7+x^7y^5+y^5x^2z^2)\geqslant x^4y^5$$

两式相加得

$$\frac{2}{3}x^7y^5+\frac{2}{3}x^5y^7+\frac{1}{3}x^5y^2z^2+\frac{1}{3}y^5x^2z^2\geqslant x^5y^4+x^4y^5$$

对 x,y,z 轮换求和得

$$\frac{2}{3}\sum x^7y^5+\frac{2}{3}\sum x^5y^7+\frac{2}{3}\sum x^5y^2z^2\geqslant\sum x^5y^4+\sum x^4y^5$$

由平均值不等式有

$$\frac{1}{3}(x^9+x^9+x^2y^2z^2)\geqslant\sqrt[3]{x^{20}y^2z^2}=x^6\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant x^6$$

对 x,y,z 轮换求和得

$$\frac{2}{3}\sum x^9+x^2y^2z^2\geqslant\sum x^6$$

由平均值不等式有

$$\frac{1}{6}(x^7y^5+x^5y^7+x^9+x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2)\geqslant\sqrt[6]{x^{30}y^{18}z^6}=x^4y^2xyz\geqslant x^4y^2$$

交换 x,y 得

$$\frac{1}{6}(x^5y^7+x^7y^5+y^9+x^2y^5z^2+2x^2y^2z^2)\geqslant x^2y^4$$

两式相加得

$$\frac{1}{3}x^7y^5+\frac{1}{3}x^5y^7+\frac{1}{6}(x^9+y^9)+\frac{1}{6}(x^5y^2z^2+x^2y^5z^2)+\frac{2}{3}x^2y^2z^2\geqslant x^4y^2+x^2y^4$$

对 x,y,z 轮换求和得

$$\frac{1}{3}\sum x^7y^5+\frac{1}{3}\sum x^5y^7+\frac{1}{3}\sum x^9+\frac{1}{3}\sum x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2\geqslant\sum x^4y^2+\sum x^2y^4$$

又

$$\frac{3}{4}(\sum x^7y^5+\sum x^5y^7)\geqslant\frac{3}{4}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{x^{24}y^{24}z^{24}}=\frac{9}{2}x^2y^2z^2(xyz)^2\geqslant\frac{9}{2}x^2y^2z^2$$

以及

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5\geqslant\frac{3}{2}x^2y^2z^2$$

将以上不等式相加即得⑫,因而不等式①成立.

3 推 广

将不等式①、⑧推广到 n 个字母的情形,得到:

命题1 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$,则

(i) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant 0;\qquad ⑬$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant 1\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}.\qquad ⑭$$

注记1 在命题1中取 $n=3$,由⑬、⑭即得①、⑧.所以命题1是不等式①、⑧的推广.

证明 显然不等式⑭是⑬的加强,故只需证明⑭.

为证明⑭左边的不等式,先证明

$$\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant\frac{(x_i^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2}\qquad ⑮$$

$$⑮\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x_i}(x_i^{2n-1}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})\geqslant 0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x_i}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}\geqslant 0\qquad ⑯$$

因为

$$\frac{1}{x_i}\leqslant\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}$$

又由柯西不等式有

$$(n-1)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2\geqslant(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2$$

所以

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x_i}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{n-1}(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2=$$

$$\frac{1}{n-1}[(n-1)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2]\geqslant 0.$$

即不等式 ⑯ 成立,因而不等式 ⑮ 成立.于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2}=1$$

即式 ⑭ 左边的不等式成立.又由 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$,有 $\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\geqslant\frac{1}{x_i}$,由柯西不等式有

$$(x_i^{2n-1}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})\geqslant(x_i^{2n-1}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(\frac{1}{x_i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})\geqslant(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2$$

所以

$$\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\leqslant\frac{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}\leqslant\frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}=$$

$$\frac{n}{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$$

即

$$\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\leqslant\frac{n}{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2} \qquad ⑰$$

于是

$$\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\leqslant\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}-x_i^{n-1})}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}=\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})-(x_i^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$$

对 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})-(x_i^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}=\frac{n}{n-1}\frac{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$$

要证式 ⑭ 右边的不等式,只需证明

$$n(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2-n\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2\leqslant(n-1)(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2\Leftrightarrow n\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2\geqslant(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2$$

由柯西不等式知后一不等式成立,所以 ⑭ 右边的不等式成立.故不等式 ⑭ 成立.

注记 2 不等式 ⑬ 的一种直接证明:

因为

$$\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}-\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=\frac{x_i^{n-1}(x_i^{n-1}-1)^2\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(x_i^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})}\geqslant 0$$

由此并注意到

$$\frac{1}{x_i}\leqslant\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}$$

则

$$\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{x_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=0$$

即不等式 ⑬ 成立.

注记 3 不等式 ⑬ 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\leqslant\frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}\qquad⑱$$

这可由前面已证得的 ⑰ 对 i 求和即得.

4 进一步的推广

作替换 $x_i^{n-1}\to x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 ⑬、⑭、⑱ 分别等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{(2n-1)/(n-1)}-x_i}{x_i^{(2n-1)/(n-1)}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant 0\qquad⑲$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{(2n-1)/(n-1)}}{x_i^{(2n-1)/(n-1)}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant 1\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i^{(2n-1)/(n-1)}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\qquad⑳$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{(2n-1)/(n-1)}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\leqslant\frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}\qquad㉑$$

其中 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n),x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$.

下面考虑 ⑲、⑳、㉑ 的进一步推广，首先推广 ⑲、㉑ 得到：

命题 2 设 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，$x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$，$p \geqslant 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \geqslant 0 \quad ㉒$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} \quad ㉓$$

注记 在命题2中取 $p = \frac{2n-1}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1}$，由 ㉒、㉓ 即得 ⑲、㉑；又取 $n = 3$，$p = \frac{5}{2}$，$x_1 = x^2$，$x_2 = y^2$，$x_3 = z^2$，由 ㉒ 即得 ①. 可见命题2是 ⑲、㉑ 的推广，当然也是 ① 的推广.

证明 显然 ㉒ 与 ㉓ 等价，因此只需证明 ㉒，下面证明中 $p = 2 + \frac{1}{n-1}$ 成为两种情形的分界处.

(Ⅰ) 当 $1 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{1}{n-1}$ 时，首先证明

$$\frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \geqslant \frac{x_i - x_i^{2-p}}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} \quad ㉔$$

因为

$$㉔ \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) x_i (x_i^{p-1} - 1) \geqslant \left(x_i^p + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j\right) x_i^{2-p} (x_i^{p-1} - 1) \Leftrightarrow$$

$$(x_i^{p-1} - 1)\left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) x_i^{p-1} - \left(x_i^p + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j\right)\right] \geqslant 0 \Leftrightarrow (x_i^{p-1} - 1)^2 \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j \geqslant 0$$

后一式显然成立，所以 ㉔ 成立.

对 ㉔ 两边求和，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_i^{2-p}}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^{2-p}\right)$$

因此，要证 ㉒ 只需证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{2-p} \quad ㉕$$

为证 ㉕，先证如下：

引理 设 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，$x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^t. \quad ㉖$$

证明 当 $t = 0$ 时，由 $x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$，知 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^t$，即 ㉖

成立;

当 $1 \geqslant t > 0$,由幂平均不等式,有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^t \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^t}{n}$$

又

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant 1, 0 < t \leqslant 1$$

所以 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^t$,因此 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^t}{n}$,即㉖成立.

现回到㉕的证明:

(i) 当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时,有 $0 \leqslant 2 - p \leqslant 1$,由引理,有 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{2-p}$,即㉕成立.

(ii) 当 $2 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{1}{n-1}$ 时,因 $p - 2 \geqslant 0$,及由 $x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant 1$ 有 $\frac{1}{x_i} \leqslant \prod_{j=1, j\neq i}^{n} x_j$,所以

$$x_i^{2-p} = \frac{1}{x_i^{p-2}} \leqslant \Big(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} x_j\Big)^{p-2} = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^{p-2} \leqslant \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^{(n-1)(p-2)}}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2-p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^{(n-1)(p-2)}}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)(p-2)}$$

因为 $2 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{1}{n-1}$,所以 $0 \leqslant (n-1)(p-2) \leqslant 1$,由引理有 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)(p-2)}$,所以 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)(p-2)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{2-p}$,即㉕成立.

综上可知,当 $1 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{1}{n-1}$ 时,不等式㉒成立.

(II) 当 $p \geqslant 2 + \frac{1}{n-1}$ 时,设 k 为待定常数,使

$$\frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \geqslant \frac{x_i^k - \frac{1}{n-1}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^k}{\sum_{j=1}^{n} x_j^k} \quad ㉗$$

㉗ $\Leftrightarrow (n-1)(x_i^p - x_i)\sum_{j=1}^{n} x_j^k \geqslant (n-1)x_i^k\Big(x_i^p + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j\Big) - \Big(x_i^p + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j\Big)\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^k \Leftrightarrow$

$(n-1)(x_i^p x_i^k - (n-1)x_i x_i^k + (n-1)(x_i^p - x_i)\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^k \geqslant$

$$(n-1)x_i^k x_i^p+(n-1)x_i^k\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j-(x_i^p-x_i)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k-(\sum_{j=1}^{n}x_j)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k\Leftrightarrow$$

$$n(x_i^p-x_i)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k\geqslant[(n-1)x_i^k-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k]\sum_{j=1}^{n}x_j\Leftrightarrow$$

$$\frac{nx_i}{\sum_{j=1}^{n}x_j}(x_i^{p-1}-1)\geqslant\frac{(n-1)x_i^k}{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}-1 \qquad ㉘$$

因为 $\prod_{i=1}^{n}x_i\geqslant 1,p\geqslant 2$,所以 $(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\frac{p-1}{n}}\geqslant 1$,要使㉘成立,只需

$$\frac{nx_i}{\sum_{j=1}^{n}x_j}\left(\frac{x_i^{p-1}}{(\prod_{j=1}^{n}x_j)^{\frac{p-1}{n}}}-1\right)\geqslant\frac{(n-1)x_i^k}{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}-1 \qquad ㉙$$

令 $a_j=\frac{x_j}{x_i}(j=1,2,\cdots,n)$,显然 $a_i=1$,㉙等价于

$$\frac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j}\left(\frac{1}{(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j)^{\frac{p-1}{n}}}-1\right)\geqslant\frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j^k}-1 \qquad ㉚$$

令 $A=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j^k,B=(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j)^{\frac{p-1}{n}}$,则㉚等价于

$$\frac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j}(\frac{1}{B}-1)\geqslant\frac{1}{A}-1 \qquad ㉛$$

由平均值不等式,有 $A=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j^k\geqslant(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j)^{\frac{k}{n-1}}$,为使 $A\geqslant B$,可取 $\frac{k}{n-1}=\frac{p-1}{n}$,即 $k=\frac{(n-1)(p-1)}{n}$,这时 $A\geqslant B>0\Rightarrow\frac{1}{B}-1\geqslant\frac{1}{A}-1$.

(i)当 $\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\geqslant 1$ 时,则 $B=(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j)^{\frac{p-1}{n}}\geqslant 1\Rightarrow 0\geqslant\frac{1}{B}-1\geqslant\frac{1}{A}-1$,要证㉛,只需证 $\frac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j}\leqslant 1$,即 $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\geqslant n-1$,这由 $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\geqslant(n-1)(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j)^{\frac{1}{n-1}}\geqslant n-1$ 知显然成立,因而㉛成立.

(ii)当 $\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\leqslant 1$ 时,则 $B\leqslant 1$. 若 $A\geqslant 1$,则㉛显然成立;若 $0<A\leqslant 1$,则 $\frac{1}{B}-1\geqslant\frac{1}{A}-1\geqslant 0$,要证㉛只需证

$$\frac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j}\geqslant 1\Leftrightarrow\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\leqslant n-1 \qquad ㉜$$

因为 $p\geqslant 2+\frac{1}{n-1}$,则 $k=\frac{(n-1)(p-1)}{n}\geqslant 1$,由幂平均不等式有

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j^k\right)^{\frac{1}{k}}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\right)^k\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j^k=A\leqslant 1$$

所以

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\right)^k\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\leqslant 1\Leftrightarrow\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_j\leqslant n-1$$

即㉜成立.

因此,当 $p\geqslant 2+\frac{1}{n-1}$ 时,取 $k=\frac{(n-1)(p-1)}{n}$,有

$$\frac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant\frac{x_i^k-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^k}$$

对 i 求和,有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^k}=\frac{1}{(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^k}\sum_{i=1}^{n}\left(nx_i^k-\sum_{j=1}^{n}x_j^k\right)=0$$

即不等式㉒成立.证毕.

注记 上述证明中,第一种情形构造的"零件不等式"㉔受启发于前面证明1中"零件不等式"③(也就 Boreico Iurie 获特别奖的证法中首先证明的);第二种情形构造的"零件不等式"㉗受启发于前面证明1中"零件不等式"②.

再来推广⑳左边的不等式,得到:

命题3 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$,$p\geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant 1 \qquad ㉝$$

证明 由 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$,$p\geqslant 1$,有 $(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n}}\geqslant 1$,因此

$$\frac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geqslant\frac{x_i^p}{x_i^p+(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n}}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}=\frac{x_i^k}{x_i^k+\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\right)^{\frac{p-1}{n}}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}$$

其中 $k=\frac{(n-1)p+1}{n}\geqslant 1$.

由平均值不等式及幂平均不等式有

$$\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\right)^{\frac{p-1}{n}}\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}{n-1}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}}\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j=\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}}\cdot$$

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}+1}=(n-1)\left(\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}{n-1}\right)^k\leqslant(n-1)\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}{n-1}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k$$

即

$$\Big(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} x_j\Big)^{\frac{p-1}{n}} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k$$

所以

$$\frac{x_i^p}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \geqslant \frac{x_i^k}{x_i^k + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k} = \frac{x_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^k}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^k} = 1$$

即不等式㉝成立.

我们猜测,⑳右边不等式也可作类似的推广,即有:

猜想 设 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \leqslant 1 \qquad ㉞$$

2005 年全国高中数学联赛加试第二题的溯源与解答

蒋明斌[①]

1 题 目

2005 年全国高中数学联合竞赛加试第二题为[1]:

问题 1 设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy+bz=a, az+cx=b, bx+ay=c$,求函数 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

本文拟探讨此题的背景与解法.

2 溯 源

从条件 $cy+bz=a, az+cx=b, bx+ay=c$ 很容易想到 $\triangle ABC$ 中的射影定理: $c\cos B+b\cos C=a, a\cos C+c\cos A=b, b\cos A+a\cos B=c$,事实上,直接由条件可求得 $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0, y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0, z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$,由余弦定理知,$x,y,z$ 可看做锐角 $\triangle ABC$ 三内角的余弦,因此,可令 $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$,问题转化为:

问题 2 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求函数 $f=f(\cos A,\cos B,\cos C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的最小值.

由 f 的对称性,可猜测,当 $A=B=C$ 时,f 取最小值$\frac{1}{2}$,问题又转化为

问题 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geqslant\frac{1}{2} \qquad ①$$

当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时 ① 取等号.

---

① 四川省蓬安县蓬安中学(邮政编码 637851) Email:jmb8680555@tom.com

为书写方便,用$\sum$表示对 a,b,c 的循环和,因为

$$f=\sum\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\sum\frac{1-\sin^2 A}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=$$

$$1+\frac{1}{2}\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\sum\sin^2\frac{A}{2}=1+\frac{1}{2}\sum\tan^2\frac{A}{2}-2(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})=$$

$$\frac{1}{2}(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})+\frac{1}{2}$$

所以不等式①等价于:

命题 1 在锐角$\triangle ABC$中,有

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad ②$$

当且仅当 $A=B=C$ 时②取等号.

实际上,不等式②对任意三角形都成立.此不等式被称作 Garfunkel-Bankoff 不等式(简称为G-B不等式),它是1983年Jack Garfunkel在《Crux Mathematicorum》上提出[2]的一个猜想,1984年,Leon-Bankoff 指出②式等价于O.Kooi在1958年得到的不等式[3]

$$R(4R+r)^2\geqslant 2s^2(2R-r) \quad ③$$

其中,R,r,s 分别为$\triangle ABC$的外接圆半径、内切圆半径及半周长.

不等式②、③就是本赛题的题源.20世纪80年代末,浙江宁波大学陈计和王振将此不等式介绍到国内后,曾一度掀起研究此不等式的热潮.1988年10月,陈计和王振在文[5]给出了②的一个漂亮的代数证明:

利用三角形中的恒等式$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$,$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$等,作代换

$$\begin{cases}b+c-a=x\\c+a-b=y\\a+b-c=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=(y+z)/2\\b=(z+x)/2\\c=(x+y)/2\end{cases}$$

则③式等价于

$$\frac{yz}{(x+y+z)x}+\frac{zx}{(x+y+z)y}+\frac{xy}{(x+y+z)z}\geqslant 2-\frac{8xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \quad ④$$

由④式的对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$,则④的等价式

$$\frac{x^2(y-z)^2[(x^2-yz)(y+z)+x(y^2+z^2)]+y^2z^2(y+z)(x-y)(x-z)}{(x+y+z)xyz(y+z)(z+x)(x+y)}\geqslant 0 \quad ⑤$$

显然成立.

1991年6月,湖南省绥宁县一中黄汉生先生在用Wolstenholme不等式[6](也叫三角形内角嵌入不等式)即在$\triangle ABC$中,有

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\geqslant 2\lambda_2\lambda_3\cos A+2\lambda_3\lambda_1\cos B+2\lambda_1\lambda_2\cos C \quad ⑥$$

给出了②的一个简单的证明:设 $\lambda_1=\tan\frac{A}{2}$,$\lambda_2=\tan\frac{B}{2}$,$\lambda_3=\tan\frac{C}{2}$,并注意到

$\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$ 及 $\sum \sin A=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，应用⑥，有

$$\sum \tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A=2\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$2-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$2-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\frac{\sum \sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

1991年7月，江西南昌职业技术师范学院陶平生先生（现为江西技术师范学院教授）给出了G－B不等式②的一个等价形式[8]：

命题2 在△ABC中，有

$$\frac{1+\cos 2A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos 2B}{1+\cos B}+\frac{1+\cos 2C}{1+\cos C}\geqslant 1 \qquad ⑦$$

当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时⑦取等号.

很显然⑦就是①. 只是当时陶先生在证明⑦与G－B不等式②等价时并没用我们前面介绍的三角变换，而是通过作代换 $u=\cot A, v=\cot B, w=\cot C$，将②和⑦均化为代数不等式而证得的. 那时陶先生正提出了"三角形不等式的一个证题系统"[9]：即对涉及三角形内角的不等式，作代换 $u=\cot A, v=\cot B, w=\cot C$，化为代数不等式，并利用所建立的一些基本恒等式和一些基本不等式使问题获解. 上述竞赛题1的官方解答就是按这一思路给出的，笔者见到竞赛题1的这一解答后，联想到此题的上述背景，猜测此题的命题人应当为陶平生教授，后来证实此题的命题人确实为陶教授.

综上所述，竞赛题1的命题思路为：将G－B不等式②化为等价的三角不等式①，再改为求最小值问题2，最后通过射影定理 $c\cos B+b\cos C=a, a\cos C+c\cos A=b, b\cos A+a\cos B=c$ 将表达式中的 $\cos A, \cos B, \cos C$ 隐藏于条件 $cy+bz=a, az+cx=b, bx+ay=c$ 之中即得竞赛题1.

3 解 答

3.1 官方解答

由前一节可知，只需解答问题2，令 $u=\cot A, v=\cot B, w=\cot C, u, v, w\in \mathbf{R}^+$，$uv+vw+wu=1$，且 $u^2+1=(u+v)(u+w)$ 等，那么

$$\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}}=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}(\sqrt{u^2+1}+u)}=\frac{u^2(\sqrt{u^2+1}-u)}{\sqrt{u^2+1}}=$$

$$u^2-\frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}\geqslant u^2-\frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}\right)$$

同理

$$\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}\geqslant v^2-\frac{v^3}{2}\left(\frac{1}{v+w}+\frac{1}{v+u}\right),$$

$$\frac{\cos^2 c}{1+\cos c}\geqslant w^2-\frac{w^3}{2}\left(\frac{1}{w+u}+\frac{1}{w+v}\right)$$

则

$$f\geqslant u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}\left(\frac{u^3+v^3}{u+v}+\frac{v^3+w^3}{v+w}+\frac{w^3+u^3}{w+u}\right)=\frac{1}{2}(uv+vw+wu)=\frac{1}{2}$$

当且仅当 $u=v=w$ 时,上式取等号,此时 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.故当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时,f 取小值$\frac{1}{2}$.

评注:命题人陶教授这一解法的基本思路来源于前面提到过的他的“三角形不等式的证题系统”,如果不知道此题的前述背景,是很难想到的.

3.2 代数解法

本题为一代数问题,上述解法先将代数问题化为三角问题,又将三角问题化为代数问题,来回辗转,为何不直接用代数解法求解呢?有没有简捷的代数解法呢?回答是肯定的.

用$\sum$表示循环和,由条件得

$$b(az+cx)+c(bx+ay)-a(cy+bz)=b^2+c^2-a^2$$

即

$$2bcx=b^2+c^2-a^2$$

所以

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

同理

$$y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

应用柯西不等式,有

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}=\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}\geqslant$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2)} \tag{8}$$

得到⑧后,有三种处理方法:

方法1 用均值不等式将 $2bc$ 放大为 b^2+c^2,并注意到 $b^2+c^2-a^2>0$,有

$$4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2)\leqslant 4\sum b^2c^2+\sum(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)=$$

$$4\sum b^2c^2+\sum(b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2)=$$

$$4\sum b^2c^2+2(a^4+b^4+c^4)=2(a^2+b^2+c^2)^2 \tag{9}$$

因此

$$f(x,y,z) \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2)} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{1}{2}$$

并且 ⑨ 中等号成立当且仅当 $a=b=c$，即 $x=y=z=\frac{1}{2}$，此时 ⑧ 中等号成立，故当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y,z)$ 取最小值$\frac{1}{2}$.

方法 2 直接证明$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2)} \geqslant \frac{1}{2}$，它等价于

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b-abc(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) \geqslant 0 \qquad ⑩$$

由 ⑩ 是对称的，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，则

$$c^2(c-a)(c-b) \geqslant 0$$
$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) \geqslant$$
$$a^2(a-b)(a-c)-b^2(b-c)(a-b)=(a-b)^2(b-c)(a+b) \geqslant 0$$

当且仅当 $a=b=c$，即 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y,z)$ 取最小值$\frac{1}{2}$.

注 不等式 ⑩ 是 Schur 不等式[7]："$a^\alpha(a-b)(a-c)+b^\alpha(b-c)(b-a)+a^\alpha(c-a)(c-b) \geqslant 0$，其中 $a,b,c>0,\alpha \in \mathbf{R}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号"$\alpha=2$ 的情形.

方法 3 由前一节知，可设 $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C, a,b,c$ 分别为锐角 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 所对的边，由余弦定理，有 $4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2)=4\sum b^2c^2+4\sum b^2c^2\cos A$.

在三角形内角嵌入不等式 ⑥ 中取 $\lambda_1=a^2, \lambda_2=b^2, \lambda_3=c^2$，有

$$4\sum b^2c^2+4\sum b^2c^2\cos A \leqslant 4\sum b^2c^2+2(a^4+b^4+c^4)=2(a^2+b^2+c^2)^2$$

即

$$4\sum b^2c^2+\sum 2bc(b^2+c^2-a^2) \leqslant 2(a^2+b^2+c^2)^2$$

以下同方法 1.

3.3 三角解法

按前面第二节所介绍的，先把问题 1 化为问题 2，再转化为证明不等式 ①，又将不等式 ① 化为等价的不等式 ②，再用三角形内角嵌入不等式 ⑥ 证明不等式 ②. 这样得到的就是一种三角解法，这里从略.

另一种三角解法是将不等式 ① 化为关于 R,r,s 的不等式，其中，R,r,s 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径、半周长.

由前面第 2 节的计算知，需证

$$f=\sum \frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\frac{1}{2}\sum \tan^2\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \qquad ⑪$$

由三角形中的恒等式，$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，$s=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，有

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

$$\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{1+\frac{r}{4R}}{\frac{s}{4R}}=\frac{4R+r}{s}$$

又

$$\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

所以

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}=\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2-2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\left(\frac{4R+r}{s}\right)^2-2$$

代入知

$$⑪\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{4R+r}{s}\right)^2-1+\frac{r}{R}\geqslant 1\Leftrightarrow R(4R+r)^2\geqslant 2s^2(2R-r) \qquad ⑫$$

由 $R\geqslant 2r$[11] 及 $s^2\leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}$[11]，要证 ⑫ 只需证

$$16R^3+8R^2r+Rr^2\geqslant(4R-2r)\left[2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\right]\Leftrightarrow$$

$$(R-2r)(8R^2-12Rr+r^2)\geqslant 4(2R-r)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\Leftrightarrow$$

$$(R-2r)^2(8R^2-12Rr+r^2)^2\geqslant 16R(2R-r)^2(R-2r)^3\Leftrightarrow$$

$$(R-2r)^2(16R^2r^2+8Rr^3+r^4)\geqslant 0$$

后一不等式显然成立，所以，不等式 ⑪ 成立，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，⑪ 取等号，故当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y,z)$ 取最小值$\frac{1}{2}$.

[编者的话]　中学数学奥林匹克圈中有一个共识：刊物上原创性文章很少，考卷中原创性题目很少，从事的人中逐利者多求道者少. 这与人没关系与社会环境有关系. 中国古代数学大家多生于乱世，治世人们多奔功名，乱世才不得不退隐以求完善自身. 日本在二战刚结束后的最艰苦岁月产生了三位诺贝尔物理奖得主，而经济腾飞之后倒显得默默无闻，足以说明选择太多，反而会失去目标. 以中国目前状况而论，初等数学中的好文章多出自经济不发达地区. 他们选择更少，心更静，气更沉. 身居僻壤对于个人来讲或许是件憾事，但对学术对数学绝对是幸事.

2005 年全国高中数学联赛加试第二题解答与评述

武瑞新[①]

试题 设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy+bz=a,az+cx=b,bx+ay=c$,求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}+\dfrac{z^2}{z+1}$ 的最小值.

解 由题设条件容易求得

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

因为 a,b,c,x,y,z 均为正数

$$b^2+c^2>a^2,\quad a^2+c^2>b^2,\quad a^2+b^2>c^2$$

故 a,b,c 可视为一锐角三角形的三边,且

$$x=\cos A,\quad y=\cos B,\quad z=\cos C$$

$$f(\cos A,\cos B,\cos C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$$

当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时,我们有

$$f(\cos A,\cos B,\cos C)=\frac{1}{2}$$

下证对任意三角形 ABC 均有

$$\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geqslant\frac{1}{2} \qquad ①$$

我们需要以下熟知的结果:

(1)$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

(2)$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

(3)$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$;

(4)$\dfrac{\sin A}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}+\dfrac{\sin B}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\sin C}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}=2$;

(5)$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C(x,y,z\in\mathbf{R})$.

① 武汉市汉阳区永丰派出所

我们将证明

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right) \qquad ②$$

在(5)中令

$$x=\tan\frac{A}{2},\quad y=\tan\frac{B}{2},\quad z=\tan\frac{C}{2}$$

得

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\cos B+$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cos C=2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+$$
$$\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)+$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right).$$
$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant$$
$$4-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot$$
$$\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)=$$
$$4-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

② 式得证.

对 ② 式变形得

$$\sec^2\frac{A}{2}+\sec^2\frac{B}{2}+\sec^2\frac{C}{2}\geqslant 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+1$$

$$\frac{1}{2}\left(\sec^2\frac{A}{2}+\sec^2\frac{B}{2}+\sec^2\frac{C}{2}\right)\geqslant 2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{B}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{1}{2}$$

此即

$$\frac{\cos^2A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2C}{1+\cos C}\geqslant\frac{1}{2}$$

我们还可以写成更对称的形式

$$\frac{\cos^2A}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2B}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\cos^2C}{\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant 1$$

由证明过程可知 ① 对任意三角形均成立.2005 年全国联赛加试第二题的核心部分即证明 ① 对锐角三角形成立,并且我们现在所见到的证明均较繁琐(见《走向 IMO 数学奥林匹克试题集锦(2006)》华东师范大学出版社)且证法仅适用于锐角三角形的情形。

我们认为,既然代数计算的考查价值不大,该题不妨直接命为:

“设 A,B,C 为任意三角形 ABC 的三个内角,试求表达式 $\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的最小值”.顺便指出,在锐角三角形的情形李世杰给出了一个精彩而简洁的代数证明.(见李世杰:高中数学竞赛专题讲座《不等式》浙江大学出版社 2007)



一道数学竞赛试题的注记[①]

刘培杰

1988 年全国高中数学竞赛第二试的第二题是一道被普遍认为题意新颖，质量较高的平面几何题.题目叙述如下：

设在 $\triangle ABC$ 中，P,Q,R 将其周长三等分，且 P,Q 在 AB 边上，求证：$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.

本文将指出在取消了 P,Q 在同一条边上的限制后，结论仍然成立，即可以证明：

设在 $\triangle ABC$ 中，P,Q,R 分别在 AB,BC,CA 上，且将其周长三等分，则有 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.

我们将用一种不同的方法证明之.

证法一　先证明几个简单的引理：

引理 1　对任一 $\triangle ABC$，如果其三边 AB,BC,CA 长分别为 x,y,z，则一定存在三个正实数 α,β,γ 使得：$\frac{x}{3}=\alpha+\beta,\frac{y}{3}=\beta+\gamma,\frac{z}{3}=\gamma+\alpha$.

证明　从以上三式中不难解得：$\alpha=\frac{1}{3}(2x+y+2z),\beta=\frac{1}{3}(2x+2y+z),\gamma=\frac{1}{3}(x+2y+2z)$.且由 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$，即有 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^{+}$.　（证毕）

引理 2　如果在 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 上分别有三点 P,Q,R，且满足 $AP=2\beta+\alpha,BQ=2\gamma+\beta,CR=2\alpha+\gamma$，则 P,Q,R 三点将 $\triangle ABC$ 的周长三等分.

证明　容易验证

$$AP+AR=2\beta+\alpha+[(3\gamma+3\alpha)-(2\alpha+\gamma)]=2(\alpha+\beta+\gamma)$$

同理

$$BP+BQ=2(\alpha+\beta+\gamma),\quad CQ+CR=2(\alpha+\beta+\gamma)$$

即有

$$AP+AR=BP+BQ=CQ+CR=2(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{3}(x+y+z)$$ （证毕）

引理 3　$\triangle PQR$ 是所有将 $\triangle ABC$ 周长三等分点所构成的三角形中面积最小的一个，

① 本文部分发表于《中学数学研究》2007 年第 7 期上

即若 L,M,N 是 $\triangle ABC$ 周长的另一个三等分点，且 L,M,N 分别在 AB,BC,CA 三个边上，则必有 $S_{\triangle LMN}\geqslant S_{\triangle PQR}$.

证明 不失一般性，可设

$$AL=2\beta+\alpha+\theta,\quad BL=2\alpha+\beta-\theta$$
$$BM=2\gamma+\beta+\theta,\quad CM=2\beta+\gamma-\theta$$
$$CN=2\alpha+\gamma+\theta,\quad AN=2\gamma+\alpha-\theta$$

其中 θ 为参数. 由

$$S_{\triangle ALN}=\frac{1}{2}AL\cdot AN\cdot\sin A,\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$$

可得 $\dfrac{S_{\triangle ALN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AL\cdot AN}{AB\cdot AC}$，故

$$S_{\triangle ALN}=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{AL\cdot AN}{AB\cdot AC}=\frac{S_{\triangle ABC}}{9}\cdot\frac{(2\beta+\alpha+\theta)(2\gamma+\alpha-\theta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}=$$
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{9}\cdot\frac{(2\beta+\alpha)(2\gamma+\alpha)+2(\gamma-\beta)\theta-\theta^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}=$$
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{9}\cdot\frac{(2\beta+\alpha)(2\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)+2(\gamma^2-\beta^2)\theta-(\beta+\gamma)\theta^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

同理可得

$$S_{\triangle BCM}=\frac{S_{\triangle ABC}}{9}\cdot\frac{(2\alpha+\beta)(2\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)+2(\alpha^2-\gamma^2)\theta-(\gamma+\alpha)\theta^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$
$$S_{\triangle CMN}=\frac{S_{\triangle ABC}}{9}\cdot\frac{(2\beta+\gamma)(2\alpha+\gamma)(\beta+\alpha)+2(\beta^2-\alpha^2)\theta-(\alpha+\beta)\theta^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

故 $S_{\triangle ALN}+S_{\triangle BLM}+S_{\triangle CMN}$ 是关于 θ 的二次函数，设其为 $f(\theta)$，显然 $f(\theta)$ 不含 θ 的一次项，且二次项恒为负，故当 $\theta=0$ 时，$f(\theta)$ 取得最大值. 又由于 $S_{\triangle LMN}=S_{\triangle ABC}-f(\theta)$，$S_{\triangle ABC}$ 为一定值，故当 $\theta=0$ 时，$S_{\triangle LMN}$ 取得最小值，而当 $\theta=0$ 时，$\triangle LMN$ 即为 $\triangle PQR$，故有 $S_{\triangle LMN}\geqslant S_{\triangle PQR}$. （证毕）

引理 4 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PQR}=\dfrac{7(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}{9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}S_{\triangle}$

证明 由引理 3

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PQR}=$$
$$\frac{S_{\triangle ABC}[(2\alpha+\beta)(2\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)+(\alpha\beta+\gamma)(2\alpha+\gamma)(\beta+\alpha)(2\beta+\alpha)(2\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)]}{9(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

注意到以下两个恒等式

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=[(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha][(\alpha+\beta+\gamma)-\beta][(\alpha+\beta+\gamma)-\gamma]=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\alpha+\beta+\gamma)^3+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma(2\alpha+\beta)(2\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)+$$
$$(2\beta+\gamma)(2\alpha+\gamma)(\beta+\alpha)+(2\beta+\alpha)(2\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)=$$
$$[4\alpha\gamma+2\beta(\alpha+\gamma)+\beta^2](\gamma+\alpha)+[4\beta\alpha+2\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2](\beta+\alpha)+$$
$$[4\beta\gamma+2\alpha(\beta+\gamma)+\alpha^2](\beta+\gamma)=$$

$$4\alpha\gamma^2+4\alpha\beta\gamma+2\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+4\alpha^2\gamma+2\beta\alpha^2+\alpha\beta^2+4\beta^2\alpha+4\alpha\beta\gamma+2\gamma\beta^2+\beta\gamma^2+$$
$$4\alpha^2\beta+2\alpha^2\gamma+\gamma^2\alpha+4\beta^2\gamma+4\alpha\beta\gamma+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+4\beta\gamma^2+2\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma=$$
$$7(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)+12\alpha\beta\gamma=$$
$$7(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+3\alpha\beta\gamma)-9\alpha\beta\gamma=$$
$$7(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma$$

故

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PQR}=\frac{7(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}{9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}S_{\triangle ABC}\qquad\text{(证毕)}$$

下面我们来证明开始提出的问题：

由引理 4 得

$$S_{\triangle PQR}=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}S_{\triangle ABC}$$

故

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma}>\frac{2}{9}\qquad\text{(证毕)}$$

注 上式只能取严格大于号，因只有当 $\alpha\beta\gamma=0$ 时才能取得等号，而这时 α,β,γ 中必有一个为零，但不论哪一个为零都会导致 $\triangle ABC$ 退化为一直线.

证法 2 设 $AB=z,BC=x,CA=y$，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，并记 $AP=t$，则 $PB=z-t$，经简单计算可得

$$AR=\frac{x+y+z}{3}-t,\quad CR=\frac{2y-x-z}{3}+t$$

$$BQ=\frac{x+y-2z}{3}+t,\quad CQ=\frac{2x+2z-y}{3}-t$$

利用公式

$$\sin A=\frac{x}{2R},\quad \sin B=\frac{y}{2R},\quad \sin C=\frac{z}{2R}$$

得

$$S_{\triangle APR}=\frac{1}{4R}x\cdot AP\cdot AR,\quad S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{4R}y\cdot BP\cdot BQ,\quad S_{\triangle CQR}=\frac{1}{4R}z\cdot CQ\cdot CR$$

并注意到 $S_{\triangle ABC}=\frac{xyz}{4R}$，可得

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle APR}+S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle CQR})}{S_{\triangle ABC}}=$$
$$1-\frac{S_{\triangle APR}+S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle CQR}}{S_{\triangle ABC}}=$$
$$1-\frac{x\cdot AP\cdot AR+y\cdot BP\cdot BQ+z\cdot CQ\cdot CR}{xyz}$$

将前面计算的 AP,AR,BP,BQ,CQ,CR 代入上式，并设第二项的分子为 $\theta(t)$，得

$$\theta(t)=-(x+y+z)t^2+\frac{1}{3}(x+y+z)(x-y+3z)t+\frac{1}{9}z\cdot$$

$$[(2y-x-z)(2x+2z-y)+3y(x+y-2z)]$$

注意到 $\theta(t)$ 为关于 t 的二次三项式，且首项系数恒为负，则 $\theta(t)$ 的最大值 $\max\theta(t)$ 为

$$\max\theta(t)=\frac{\frac{1}{9}[(x+y+z)(x-y+3z)]^2+\frac{4}{9}(x+y+z)z[(2x+2z-y)x(2y-x-z)+3y(x+y-2z)]}{4(x+y+z)}=$$

$$\frac{1}{36}(x+y+z)(x-y+3z)^2+\frac{1}{9}z[(2y-x-z)(2x+2z-y)+3y(x+y-2z)]=$$

$$\frac{7}{9}xyz-\frac{1}{36}(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

因 x,y,z 为三角形的三边长，故 $x+y-z,y+z-x,z+x-y$ 均大于零，故 $\max\theta(t)<\frac{7}{9}xyz$，所以

$$\min\left\{\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}\right\}=1-\frac{1}{xyz}\cdot\max\theta(t)>1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9} \qquad \text{(证毕)}$$

需要指出的是，从以上两个证明中都可以看出 $\frac{2}{9}$ 已是最好的结果，不可再改进了.

另外，我们再介绍一个据称到目前为止从来没有被人证明出来的命题：假定 P,Q,R 是 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、AC 上的三点，并且满足 $RA+AP=PB+BQ=QC+CR=\frac{1}{3}$，则 $PQ+QR+RP\geqslant\frac{1}{2}$. 据北京计算机学院的洪加威介绍说：这个定理无论是分析的证明还是几何的证明都太复杂了. 但是陶懋颀和张景中（中国科技大学教授）等利用例证法通过计算机给出了证明[2]. 我们在两个证明中所使用的方法似乎为这一富有挑战性的问题的人工解决提供了可行的途径，有兴趣的读者不妨一试.

1977 年，著名数学家吴文俊院士在《中国科学》(1977 年第 6 期) 发表了"初等几何判定问题与机械化证明" 这一具有划时代的意义的科学论文，文中提出了初等几何定理机器证明的新方法，首次在计算机上证明了一大类初等几何定理（例如 5 条牛顿线所共之点就被称为"吴点". 详见本文集中叶中豪先生的文章），从而开创了一条从公理到机械化的新路，在国际上引起了巨大反响. 国际著名数学家 Kupur 就曾评价说："吴的工作使自动证明领域发生了革命性的变化". 吴文俊博士所提出的方法在国际上被称为"吴方法". 2001 年 3 月，吴文俊院士因此项工作荣获中国首届国家最高科学技术奖，并从江泽民总书记手中接过 500 万元大奖的支票.

1992 年，张景中院士利用自己所创立的消点算法与周威青，高小山等合作，成功地研制出具有可读功能的几何定理机器证明自动生成的软件，使得能在计算机上显示出与人用笔在纸上所演算相一致的证明. 并能以动态形式将作图步骤与证明步骤结合起来，还可以在计算机上将所要证明的定理的图形画出来，这项成果被某名计算机专家 Boyer 誉为"一个里程碑".

1986 年，洪加威提出了单点例证法. 从理论上证明了可以用举例子的方法来证明几何定理，由于其方法的复杂性，到今天为止还没人在计算机上加以实现. 但可喜的是，几乎同时，张景中院士和杨路教授创立了数值并行算法，首次在计算机上用举例子的方法

证明了一批几何定理.想用举例来证明数学定理.以往即使不说对数学的无知,也是在数学界十分忌讳的事情.因此这一成果对的哲学基础造成了很大的震动.

现在这一领域已渗透到了中学.江西临川二中的一个实验班的68名学生在孙熙椿和李盛光的带领下进行了长达3年的中学数学现代化(机械化)的探索.这是世界上首次在中学范围内的探索.张景中院士为此亲自到该校主持了该课题的鉴定会,并题词"国内第一,世界领先".最后,需要指出的是,文中开始提出的试题源于一本学生刊物——中国科学技术大学数学系办的《蛙鸣》杂志.在该刊物的27期上,沈刚提出了如下问题:

$\triangle ABC$ 的周界的三等分点 P,Q,R 构成一个三角形,证明或否定 $S_{\triangle PQR}>\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$.

在该刊第33期上,罗承辉和陈计证明了这一点,并指出常数 $\frac{2}{9}$ 是最好的.

仿此我们也可以提出一个类似的有背景的问题供读者研究.

设 E、F、G 分别为 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 上三点,若 $AE=\frac{1}{3}AB$,$BF=\frac{1}{3}BC$,$CG=\frac{1}{3}CA$.CE,AF,BG 交于 P,Q,R,则一定有

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{7}$$

类似的问题还可以提出许多.



2005 年全国高中数学联赛加试第一题新解

孙自良[①]

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB > AC$，过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D，交直线 l 于 E、F.

证明：直线 DE、DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.

（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心.）

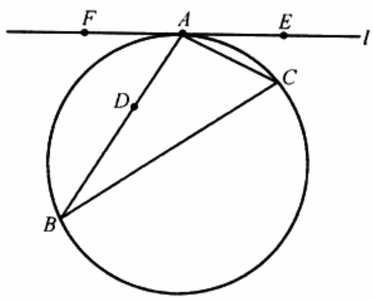


图 1

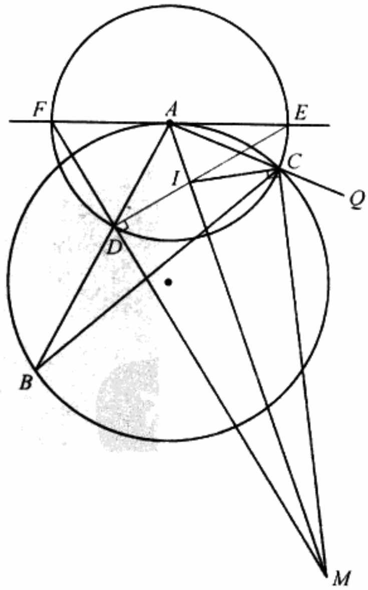


图 2

证明　如图 2，连结并延长 FD，连结 DE，作 $\angle BAC$ 平分线与 DE，FD 交于 I，M.

连结 IC，有 $\angle IAD = \angle IAC$，半径 $AD = AC$，又 $AI = AI$，所以

$$\triangle AIC \cong \triangle AID \qquad ①$$

同理

$$\triangle ADM \cong \triangle ACM \qquad ②$$

所以 $\angle ADI = \angle ACI$，又 $AD = AE$，所以 $\angle ADI = \angle AED$.

弦切角 $\angle EAB = \angle ACB$，所以

$$\angle ACI = \angle AED = \frac{1}{2}\angle EAB = \frac{1}{2}\angle ACB \qquad ③$$

即 IC 平分角 $\angle ACB$，故 DE 过 $\triangle ABC$ 内心．延长 AC 至 Q．由①、②知

$$\angle IDM = \angle ADM - \angle ADI$$

$$\angle ICM = \angle ACM - \angle ICA$$

所以 $\angle ICM = IDM$．又 $\angle FDE = 90°$，所以 $\angle IDM = \angle ICM = 90°$.

① 该生已保送至哈尔滨工业大学

由③，$\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$，又 $\angle ICM=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle BCQ)$，所以 $\angle BCM=\frac{1}{2}\angle BCQ$.所以 CM 平分 $\angle BCQ$，故 FD 过 $\triangle ABC$ 旁心.

[编者的话] 该作者才思敏捷，颇具数学天赋，曾获全国初中数学联赛黑龙江赛区一等奖和全国高中数学联赛黑龙江赛区一等奖，但同时他又是令其家长极为头疼的网络游戏沉溺者.虽已上大学，但至今未愈，编发此文一是提醒那些已患网瘾的青少年不要图一时之快浪费了自己的才华.二是想告诉老师们，不要放弃他们.那个群体中不乏同龄人中的佼佼者，智力超常者也时有所见.三是想让作者通过本文不忘曾经的辉煌，更上一层楼.



一道全国高中数学联赛试题与 Sperner 引理

刘培杰

1　一道全国高中联赛试题

在 1993 年全国高中数学联赛中,浙江省提供了一道颇有背景的试题(第二试第二题):

试题 A　设 A 是一个包含 n 个元素的集合,它的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含,试证:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

其中,$|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数;$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个组合数.

证明　(1) 证明的关键在于证明如下不等式

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n! \quad ①$$

设 $|A_i|=m_i,i=1,2,\cdots,m$. 一方面 A 中 n 个元素的全排列为 $n!$;另一方面,考虑这样一类 n 元排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{m_i}\qquad b_1,b_2,\cdots,b_{n-m_i} \quad ②$$

其中,$a_j\in A_i,1\leqslant j\leqslant m_i;b_j\in A\setminus A_i$(即 $\bar{A}_i$),$1\leqslant j\leqslant n-m_i$.

我们先证明一个引理.

引理 1　若 $i\neq j$,则 A_i 与 A_j 由上述方法所产生的排列均不相同.

证明　用反证法,假设 A_j 所对应的一个排列

$$a'_1,a'_2,\cdots,a'_{m_j}\qquad b'_1,b'_2,\cdots,b'_{n-m_j}$$

与 A_i 所对应的一个排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{m_i}\qquad b_1,b_2,\cdots,b_{n-m_i}$$

相同,则有以下两种情况:

① 当 $|A_i|\leqslant|A_j|$ 时,有 $A_j\supseteq A_i$;

② 当 $|A_i|>|A_j|$ 时，有 $A_i \supseteq A_j$.
而这均与 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不包含相矛盾，故引理 1 成立.

由引理 1 可知式 ① 成立. 由式 ① 立即可得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{|A_i|!(n-|A_i|)!}{n!}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$$

(2) 利用 Cauchy 不等式及式 ① 可得

$$m\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\leqslant 1$$

2 E.Sperner 引理及 IMY 不等式

近几年来，背景法命题在数学奥林匹克中已形成潮流，一道优秀的竞赛试题应有较高深的背景已成为命题者的共识，试题 A 就是一例.

首先就研究对象来看，试题 A 实际上研究了一个子集族，即 A 是一个 n 阶集合，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 且满足：

(1) $A_i\subseteq A,i=1,2,\cdots,m$;

(2) 对任意的 $A_i,A_j\in S,i\neq j$ 时满足 $A_i\not\subseteq A_j,A_j\not\subseteq A_i$.
那么这样的子集族称为 S 族，S 族中的元素都是集合. 之所以称为 S 族，是因为数学家 E. Sperner 最先研究了这类问题. 1928 年 Sperner 证明了一个被许多组合学书中称为 Sperner 引理的结果，它是组合集合论中的经典结果之一.

Sperner 引理 设集合 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，$A_1,A_2,\cdots,A_p$ 为 X 的不同子集，$E=\{A_1,A_2,\cdots,A_p\}$ 是 X 的子集族. 如果 E 为 S 族，则 E 族的势至多为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$（其中 $[x]$ 为 Gauss 函数），即 $\max p=C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

证明 令 $q_k\triangleq|\{k\mid |A_i|=k,1\leqslant i\leqslant p\}|$，则由试题 A 中的式 ① 有

$$\sum_{k=1}^{n}q_k k!(m-k)!\leqslant n!$$

由于

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_n^k=C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

所以

$$p=\sum_{k=1}^{m}q_k\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}q_k\frac{k!(n-k)!}{n!}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}q_k\frac{1}{C_n^k}=C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

Sperner 引理在数学竞赛中有许多精彩的特例. 1981 年 5 月，加拿大举行了第 13 届数学竞赛，其最后一道试题为：

试题 B 共有 11 个剧团参加汇演，每天都排定其中某些剧团演出，其余的剧团则跻于普通观众之列. 在汇演结束时，每个剧团除了自己的演出日外，至少观看过其他每个剧团的一次表演. 问这样的汇演至少要安排几天？

用 Sperner 引理可以很容易证明试题 B.

证法 1 令 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,以 $A_i(i=1,2,\cdots,11)$ 表示第 i 个剧团做观众的时间集合,则 $A_i\subset A(i=1,2,\cdots,11)$.

由于每个剧团都全面观摩过其他剧团的演出,所以 $A_i,A_j(1\leqslant i,j\leqslant 11)$ 互不包含(第 i 个剧团观摩第 j 个剧团的那一天属于 A_i 而不属于 A_j).故 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{11}\}$ 为 S 族.由 Sperner 引理知,只需求 $n_0=\min\{n\mid C_n^{[\frac{n}{2}]}\geqslant 11\}$.由于 $f(n)=C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 是增函数,故由 $C_5^2=10,C_6^3=20$ 知,$n_0=6$.证毕.

证法 1 固然简洁明快,但它是以知道 Sperner 引理为前提的,不适合于中学生,下面给出另一种证法:

证法 2 设共有 m 天,集合 $M=\{1,2,\cdots,m\}$;有 n 个队,$A_i=\{$第 i 个队的演出日期$\}$.显然 $A_i\subseteq M$.我们将满足全面观摩要求称为具有性质 P.

定义 $f(n)\triangleq\min\{n\mid A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 $P\}$,故我们只需证 $f(11)=6$.

为了便于叙述,先来证明两个简单的引理.

引理 2 以下三个结论是等价的:

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 P;

(2) 对任意的 $1\leqslant i\neq j\leqslant n,A_i\bar{A}_j\neq\varnothing$;

(3)$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 S 族.

证明 (1)⇒(2) 用反证法:假若存在 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$,使得 $A_i,\bar{A}_j=\varnothing$,则第 j 个队就无法观看第 i 个队的演出,与(1) 矛盾.

(2)⇒(3) 假若 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 不是 S 族,则必定存在 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$,使得 $A_i\subseteq A_j$,则有 $A_i\bar{A}_j\subseteq A_j\bar{A}_j$.而 $A_i\bar{A}_j=\varnothing$,故 $A_i\bar{A}_j=\varnothing$,与(2) 矛盾.

(3)⇒(1) 如果第 i 个队始终看不到第 j 个队的演出,意味着第 i 个队在演出时,第 j 个队也一定在演出,即 $A_i\subseteq A_j$,与(3) 矛盾.

引理 3 若 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是具有性质 P 的,则 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\cdots,\bar{A}_n$ 也具有性质 P.

证明 注意到对任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$,有关系式

$$\bar{A}_i\bar{\bar{A}}_j=\bar{A}_i\bar{\bar{A}}_jA_j\bar{A}_i$$

故由引理 1 知结论为真.

下面我们来证明试题 B.首先证明 $f(11)\leqslant 6$.今构造一个安排如下:

$$A_1=\{1,2\},A_2=\{1,3\},A_3=\{1,4\},A_4=\{1,5\},$$
$$A_5=\{2,3\},A_6=\{2,4\},A_7=\{2,5\},$$
$$A_8=\{3,4\},A_9=\{3,5\},$$
$$A_{10}=\{4,5\},$$
$$A_{11}=\{6\}.$$

显然这个安排满足引理 2 中的(3),由引理 2 知它满足全面观摩的要求,故 $f(1)\leqslant 6$.

接着证 $f(11)>5$,即对 $M_1=\{1,2,3,4,5\}$ 无法构造出 $A_1,A_2,\cdots,A_{11}$ 使之具有性质 P.为此我们还需要证明几个引理,对于 M_1 我们有如下的引理:

引理 4 $|A_i|\neq 1,1\leqslant i\leqslant 11$.

证明 用反证法:假设存在某个 $i(1 \leqslant i \leqslant 11)$,使 $|A_i| = 1$;不失一般性可设 $|A_1| = 1, A_1 = \{1\}$.

则由引理 2 中(3)可知,$\{1\} \not\subseteq A_j, 2 \leqslant j \leqslant 11$,即它们也具有性质 P.下面证 $|A_j| \neq 1,2,3, 2 \leqslant j \leqslant 11$.

(1) 若存在某个 $2 \leqslant i \leqslant 11$,使得 $|A_i| = 1$,则不妨设 $|A_2| = 1$,且 $A_2 = \{2\}$.由引理 1 中(3)可得$\{2\} \not\subseteq A_j, 3 \leqslant j \leqslant 11$,于是 $A_j \subseteq M_2 - A_2 = \{3,4,5\}$(记为 M_3),$3 \leqslant j \leqslant 11$. M_3 的所有真子集共 $2^3 - 2 = 6$ 个,但 $A_3, A_4, \cdots, A_{11}$ 共有 9 个,故由抽屉原则知至少有两个相同,与引理 2 矛盾.

(2) 假设存在某个 $2 \leqslant i \leqslant 11$,使得 $|A_i| = 3$,不失一般性可假设 $|A_2| = 3$,且 $A_2 = \{2,3,4\}$,那么 $A_j \subset M_2 - A_2, 3 \leqslant j \leqslant 11$.而 $M_2 - A_2$ 的真子集共有$(2^4 - 2) - (2^3 - 1) = 7$ 个,由抽屉原则知在 $A_2, \cdots, A_{11}$ 中一定有两个相同,与引理 1 矛盾.

(3) 由(1)、(2)可知,对所有的 $2 \leqslant i \leqslant 11$,都有 $|A_i| = 2$,而 M_2 的所有二元子集总共只有 $C_4^2 = 6$ 个,由抽屉原则知必有两个 A_i 和 $A_j(2 \leqslant i \neq j \leqslant 11)$ 相同,与引理 2 矛盾.

综合(1),(2),(3)可知引理 4 成立.证毕.

引理 5 $|A_i| \neq 4, 1 \leqslant i \leqslant 11$.

证明 由引理 3 知,若 $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ 具有性质 P,则 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_{11}$ 也具有性质 P,故由引理 3 知

$$|\bar{A}_i| \neq 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 11$$

注意到 $|A_i| = |A_i \cup \bar{A}_i| - |\bar{A}_i| = 5 - |\bar{A}_i|$,故 $|A_i| \neq 4$.

引理 6 我们记 $M^{(i)}$ 表示 M 的所有 i 元子集,且

$$\alpha = |\{A_i \mid |A_i| = 2, 1 \leqslant i \leqslant 11\}| = |M^{(2)}|$$

$$\beta = |\{A_i \mid |A_i| = 3, 1 \leqslant i \leqslant 11\}| = |M^{(3)}|$$

则 $\beta \geqslant 6$.

证明 用反证法:假设 $\beta \leqslant 5$.

(1) 先证 $\beta \neq 1$, $|M^{(2)}| = C_5^2 = 10$,故 $\beta = 1$ 时,$\alpha = 11 - \beta = 10$,可以取到,但此时这个惟一的三元集 A_j,一定存在某个 $A_p \in \{A_i \mid |A_i| = 2, 1 \leqslant i \leqslant 11\}$,使 $A_p \subseteq A_j$,与引理 1 矛盾.所以 $\beta \neq 1$.

(2) 若 $\beta = 2$,设 $|A_1| = |A_2| = 3$,且 $A_1 = \{1,2,3\}$,考察 $A_1 \cap A_2$, $|A_1 \cap A_2| = 1$ 或 2.

① 若 $|A_1 \cap A_2| = 1$,则设 $A_2 = \{3,4,5\}$,于是 $|A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| = C_3^2 + C_3^2 = 6$.故 $\alpha \leqslant |\{A_i \mid |A_i| = 2, A_i \not\subset A_1$ 且 $A_i \subset A_2\}| = 4$, $\alpha + \beta \leqslant 4 + 2 = 6$,与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾.

② 若 $|A_1 \cap A_2| = 2$,则可设 $A_2 = \{2,3,4\}$,于是 $|\{B_j \mid |B_j| = 2, B_j \subset A_1$ 或 $B_j \subset A_2\}| = C_3^2 + C_3^2 - 1 = 5$.由引理 1 知 $\alpha \leqslant 10 - 5 = 5$,故 $\alpha + \beta \leqslant 5 + 2 = 7$,与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾.

综合(1),(2)可知 $\beta \neq 2$.

(3) 若 $\beta = 3$,则不妨设 $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 3$,且 $A_1 = \{1,2,3\}$,仍考察 $A_1 \cap A_2$,$|A_1 \cap A_2| = 1$ 或 2.

① 若 $|A_1 \cap A_2| = 1$,则可设 $A_2 = \{3,4,5\}$,$|A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}| = |A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| = 3 + 3 = 6$,考察 $A_3^{(2)}$.

如果 $A_3^{(2)} \subseteq A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}$,则因 $|A_3^{(2)}| = 3$,故由抽屉原则可知,存在两个 $Y_1, Y_2 \in A_3^{(2)}$,使得 $Y_1, Y_2 \in A_1^{(2)}$ 或 $Y_1, Y_2 \in A_2^{(2)}$,即 $|A_3^{(2)} \cap A_j^{(2)}| = 2, j = 1$ 或 2,但这可导致 $A_1 = A_j, j = 1$ 或 2,矛盾.

② 若 $|A_1 \cap A_2| = 2$ 也会产生类似矛盾.

由 ①,② 可知,$A_3^{(2)} \not\subseteq A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}$,故

$$\left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i^{(2)}\right| \geqslant \left|\bigcup_{i=1}^{2} A_i^{(2)}\right| + 1 = |A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| - |A_1^{(2)} \cap A_2^{(2)}| + 1 = \begin{cases} 7 & |A_1 \cap A_2| = 1 \text{ 时} \\ 6 & |A_1 \cap A_2| = 2 \text{ 时} \end{cases}$$

由引理 6 的(3) 可知 $\alpha \leqslant |M_1^{(2)}| - \left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i^{(2)}\right| \leqslant 10 - 6 = 4$,因此 $\beta \geqslant 11 - 4 = 7$,这与假设的 $\beta \leqslant 5$ 矛盾,故引理 6 成立.

引理 7 $\alpha \geqslant 6$.

证明 若 $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ 具有性质 P,由引理 3 知 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_{11}$ 也具有性质 P.

记
$$\alpha' = |\{\bar{A}_i \mid |\bar{A}_i| = 2, 1 \leqslant i \leqslant 11\}|$$
$$\beta' = |\{\bar{A}_i \mid |\bar{A}_i| = 3, 1 \leqslant i \leqslant 11\}|$$

由于 $|M_1| = 5$,则 $|\bar{A}_i| = 2 \Rightarrow |A_i| = 3$, $|\bar{A}_i| = 3 \Rightarrow |A_i| = 2$,故 $\beta' = \alpha, \alpha' = \beta$.

由引理 6 知,$\beta' \geqslant 6$,故 $\alpha = \beta' \geqslant 6$,证毕.

由引理 6、引理 7 可知 $\alpha + \beta \geqslant 6 + 6 = 12$,与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾.故对 $M_1 = \{1,2,3,4,5\}$ 不能构造出 $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ 具有性质 P,即 $f(11) > 5$.再由开始所证 $f(11) \leqslant 6$ 可知 $f(11) = 6$.

证法 2 使用了最少的预备知识,只用到集合的运算,条分缕析,自然流畅,但过程冗长,所以我们希望得到一个精炼却不失于"初等"的解答.经过对证法 2 的分析,我们可以看到 $f(11) \leqslant 6$ 这步已无法压缩,对 $f(11) > 5$ 却可以通过引入某种特殊的结构加以简化.

定义 1 如果 $X = \{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 $F = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 中的元素满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m$,满足以下两个关系式:

(1) $|A_{i+1}| = |A_i| + 1, i = 1,2,\cdots, m-1$;

(2) $|A_1| + |A_m| = n$.

则称链 F 为对称链.

对称链有如下性质:

性质 1 若 $|A_1| = 1$,则 X 中对称链的总条数为 $n!$.

证明 设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m$ 是一条对称链.若 $|A_1| = 1$,则由定义 2 中(1),(2)

可知 $|A_2|=2,|A_3|=3,\cdots,|A_m|=n-1$.若 A_1 选 $\{i\}(1\leqslant i\leqslant n)$,可有 n 种选法,注意到 $A_2\supset A_1$,则 A_2 为 $\{i,j\}$ 型,$i\neq j$,j 有 $n-1$ 种选法,依此类推,这种链的条数为 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$.

性质 2 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_m$ 是 X 中的一条对称链,那么 $\bar{A}_1\supset\bar{A}_2\supset\cdots\supset\bar{A}_m$ 也是 X 中的一条对称链.

证明 由 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_m$ 是 X 中的一条链可知 $\bar{A}_m\subset\bar{A}_{m-1}\subset\cdots\subset\bar{A}_2\subset\bar{A}_1$ 也是 X 中的一条链.另外

$$|\bar{A}_i|=|X-A_i|=|X|-|A_i|$$

$$|\bar{A}_{i+1}|=|X-A_{i+1}|=|X|-|A_{i+1}|=|X|-|A_i|-1$$

所以

$$|\bar{A}_i|=|\bar{A}_{i+1}|+1$$

且

$$|\bar{A}_1|+|\bar{A}_m|=|X-A_1|+|X-A_m|=2|X|-(|A_1|+|A_m|)=2n-n=n$$

故由定义 2 知,$\bar{A}_m\subset\bar{A}_{m-1}\subset\cdots\subset\bar{A}_2\subset\bar{A}_1$ 也是 X 中的一条对称链.

性质 3 $|A_1|=1$ 和 $|A_{n-1}|=n-1$ 包含在 $(n-1)!$ 条对称链中.

证明 因为 $|A_1|=1$,不妨设 $A_1=\{1\}$,则以 A_1 打头(即 $A_1\subset\cdots\subset A_m$ 型)的每条链都包含 1,故 $H=\{A_2-\{1\},A_3-\{1\},\cdots,A_{n-1}-\{1\}\}$ 是一条长为 $n-2$ 的对称链.由性质 1 知 H 的种数为 $(n-1)!$.

同理可证,满足 $|A_{n-1}|=n-1$ 的对称链有 $(n-1)!$ 种.证毕.

用以上性质 1 及性质 3 我们可有如下证法:

证法 3 $f(11)\leqslant 6$ 的证法同证法 2.以下证 $f(11)>5$.因为每个剧团标号是一个子集 $A\subset\{1,2,3,4,5\}$,并且显然 $1\leqslant|A|\leqslant 4$.定义一条对称链 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4$,其中 $|A_i|=i,1\leqslant i\leqslant 4$.由性质 1 可知这种链的总条数为 120.由性质 3 知每个满足 $|A_i|=1$ 或 4 的子集出现在 $(5-1)!=24$ 个链中,而每个满足 $|A_i|=2,3$ 的子集出现在 $2\times 3\times 2=12$ 个链中(例如 A_2 含有两数,则 A_1 含有这两数之一,A_3 含有其余三数之一,A_4 含有其余二数之一).由于共有 11 个剧团,每个剧团的标号在 120 个链中出现 24 次或 12 次,所以 11 个标号总共至少出现 $11\times 12=132$ 次.根据抽屉原则,至少有两个标号(记为 A 和 B)出现在同一个链中,但这与 A,B 属于 Sperner 族矛盾.

利用对称链的方法我们还可以给出 Sperner 引理的一个新证明.

定义 如果 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 是 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 条对称链,且对于每个 $A\subset X$:

(1) 存在一个 $i,1\leqslant i\leqslant m$,使得 $A\in F_i$;

(2) 不存在 $i,j,1\leqslant i\neq j\leqslant m$,使得 $A\in F_i\cap F_j$,

则称 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 为 m 条互不相交的对称链.

对不相交对称链的条数,我们有如下定理:

定理 1 设 $F_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的对称链,$F=\{F_1,F_2,\cdots,F_m\}$,则 $|F|=C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

证明 对 n 用数学归纳法:

(1) 当 $n=1$ 时,结论显然成立.

(2) 假设当 $n = k$ 时结论成立,即$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的全体子集可以分拆为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 条互不相交的对称链.

(3) 设 $F_j = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为其中任一条

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \quad ①$$

考察链

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \subset A_t \cup \{n\} \quad ②$$

与

$$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \cdots \subset A_{t-1} \cup \{n\} \quad ③$$

显然 ②、③ 都是 X 的对称链,设 $A \subset X$,则有以下两种情况:

(i) 若 $n \notin A$,那么 n 必恰在一条形如 ① 的链中,从而也必在一条形如 ② 的链中,但它一定不在形如 ③ 的链中.

(ii) 若 $n \in A$,那么 $A - \{n\}$ 必恰在一条形如 ① 的链中;在 $A - \{n\} = A_t$ 时,它恰在一条形如 ② 的链中,在 $A - \{n\} \neq A_t$ 时,它恰在一条形如 ③ 的链中.

于是 X 的全部子集被分拆成若干条互不相交的对称链,显然每个对称链都含有一个 $[\frac{n}{2}]$ 元子集,所以所有不相交对称链的条数为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

我们从每条链中至多只能选出一个集合组成 S 链,故 S 链中元素个数最多为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$,即给出了 Sperner 引理的又一证明.

其实当链不是对称链时,链的条数不一定恰好等于 S 族的元素个数的最大值.一般地有如下定理:

Dilworth 定理 集族 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$, $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_q\}$ 是 A 中的 q 条不相交链,若 $A = \bigcup_{i=1}^{q} F_i$,则 $\min |F| = \max |\{A_i \mid A_i \in S\}|$.

即当集族 A 被分拆为不相交链时,所需用的最少条数为 A 中元数最多的 S 族的元数.

在 1977 年前苏联大学生数学竞赛试题中也出现过 Sperner 引理的特例:

例 1 由 10 名大学生按照下列条件组织运动队:

(1) 每个人可以同时报名参加几个运动队;

(2) 任一运动队不能完全包含在另一个队中或者与其他队重合(但允许部分地重合).

在此两个条件下,最多可能组织多少个队?各队包含多少人?

解 设 $M \triangleq \{$满足条件(1),(2),且所含队数最多的运动队的集合$\}$,则

$$M_i \in M,\ |M_i| = i,\text{且 } r = \min\{i \mid M_i \neq \varnothing\},\ s = \max\{i \mid M_i \neq \varnothing\}$$

(1) 如果 $s > 5$,设 $N \triangleq \{M_s$,去掉一名运动员所得到的一切可能的运动队$\}$,则 $|N| = s - 1$,故对任意的 $A \in M_s$,都存在 $B_j \in N, 1 \leqslant j \leqslant s$,使得 $B_j \subseteq A, 1 \leqslant j \leqslant s$($B_j$ 是由 A 去掉 s 个人之中一个所得到的);而对每个 $B \in N$,则存在不多于 $11 - s$ 个 A_j, $1 \leqslant j \leqslant 11 - s$,使 $B \subseteq A_j$(加上至多 $10 - (s - 1) = 11 - s$ 个不在 N 中的运动队中的人

之一得到的运动队有可能不在 M_s 中)，因此$(11-s)\mid N\mid\geqslant s\mid M_s\mid$，故

$$\mid N\mid\geqslant\frac{s}{11-s}\mid M_s\mid\geqslant\frac{6}{5}\mid M_s\mid>\mid M_s\mid$$

$$\sum_{j=r}^{s-1}\mid M_j\mid+\mid N\mid>\sum_{j=r}^{s-1}\mid M_j\mid+\mid M_s\mid=\sum_{j=r}^{s}\mid M_j\mid=\mid M\mid$$

下面我们证明 $M_j(r\leqslant j\leqslant s-1)$，$N$ 都满足条件(1)，(2)．满足条件(1)是显然的；再看条件(2)，若存在 $X\in M_i$，且 $X\in N$，由 N 的定义知，存在一个 $Y\in M_s$，使得 $X\subseteq Y$，与 M 的定义矛盾．又注意到，对任意 $P\in N,Q\in M_i$ 都有 $\mid P\mid\geqslant\mid Q\mid$，故不能有 $P\subseteq Q$，而这与 M 的最大性假设矛盾，故 $s\leqslant 5$．

(2) 同理可证 $r\geqslant 5$，从而 $r=s=5$，即运动队全由 5 个人组成，由 5 个人组成的运动队有 C_{10}^5 个，显然满足条件(1)，(2)，故最多有 $C_{10}^5=252$ 个队，每队含 5 人．

用这种方法我们还可以给出 Sperner 引理的另一种证法．先证一个引理．

引理 8 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，$A=\{A_i\mid\mid A_i\mid=k,A_i\subset X\}$，$B=\{B_i\mid\mid B_i\mid=k+1,B_i\subset X\}$，且满足：

(1) 对于每个 $B_i\in B$，一定有某个 $A_j\in A$，使得 $B_i\supset A_j$；

(2) 对于每个 $A_i\in A$，对所有 $B_l\supset A_i$，有 $B_l\in B$，则

$$\mid B\mid\geqslant\frac{n-k}{k+1}\mid A\mid$$

证明 由(2)可知

$$m_i=\mid\{B_l\mid B_l\supset A_i,B_l\in B,A_i\in A\}\mid=n-k$$

$$\sum_{i=1}^{\mid A\mid}m_i=\sum_{i=1}^{\mid A\mid}(n-k)=\mid A\mid(n-k)$$

反过来，对每个 $B_j\supset B$，$\max\mid\{A_i\mid A_i\supset B_j\}\mid$，故

$$(k+1)\mid B\mid\geqslant(n-k)\mid A\mid$$

即

$$\mid B\mid\geqslant\frac{n-k}{k+1}\mid A\mid$$

利用引理 8 我们有 Sperner 引理的第四种证法：

证法 4 记 K_0 为 n 阶集合 X 的 S 类子集族中阶数最高的，并记 $n=2m$(对 $n=2m+1$ 的情形我们可类似证明)．设 $F=\{A_i\mid A_i\subset X,\mid A_i\mid=m\}$，我们将证明 $K_0=F$．

(1) 先证 $K_0\subseteq F$．

用反证法：设 K_0 中有 $r\geqslant 1$ 个元素 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 是 A 的 $k\geqslant m+1$ 阶子集，记

$$K_3=\{B_i\mid\mid B_i\mid=k-1,B_i\subset A_j,1\leqslant j\leqslant r\}$$

即 K_3 也是 X 的子集族，$\mid K_3\mid=s$．由于每个 k 阶集合皆含 k 个不同 $k-1$ 阶子集，所以 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 连同重复出现的次数共 $k\,r$ 个，但每个 $k-1$ 阶子集可包含于 A 的 $n-(k-1)$ 个不同的 k 阶子集中，故从整体来看，$B_1,B_2,\cdots,B_s$ 连同重复出现的次数不会超过 $s(n-k+1)$ 个，因此有

$$kr\leqslant s(n-k+1)\qquad ④$$

由于

$$k\geqslant m+1=\frac{n+2}{2}>\frac{n+1}{2}$$

故由式④知

$$s \geqslant \frac{k}{n-k+1} r > r$$

用 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 取代 K_0 中的 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 得一新子集族 K_1，易见 K_1 仍为 S 类，但由 $s > r$，知 $|K_1| > |K_0|$，此与 K_0 的最大性矛盾.

(2) 再证 $K_0 \supseteq F$.

设 K_0 中含有 $r_1 \geqslant 1$ 个 $k \leqslant m-1$ 阶的 A 的子集，$A'_1, A'_2, \cdots, A'_{r_1}$，记 $K'_1 = \{A'_1, A'_2, \cdots, A'_{r_1}\}$.

按引理8中的方式构造相应的 $K'_2 = \{B'_1, B'_2, \cdots, B'_{s_1}\}$，并以 $B'_1, B'_2, \cdots, B'_{s_1}$ 取代 K_0 中的 $A'_1, A'_2, \cdots, A'_{r_1}$ 得到一新子集族 K_2. 当然 K_2 也是一个 S 族，由引理8及 $k \leqslant m-1 = \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2}$，知 $s_1 \geqslant \frac{n-k}{k+1} r_1 > r_1$，又得出 $|K_2| > |K_0|$，所以 K_0 中的元素都应为 A 的不低于 m 阶的子集，即 $K_0 \supseteq F$.

综合(1)，(2) 可知 $K_0 = F$，且

$$|F| = C_n^m = C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

对 $n = 2m+1$ 的情形，可同理证明.

3 Boolea 矩阵和图论证法

美籍朝鲜学者金基恒1982年出版了第一部有关 Boolea 矩阵理论和应用方面的专著《Boolean Matrix Theory and Applications》，其中令人信服地用 Boolea 矩阵证明了其他分支的大量问题，其中我们也发现了 E. Sperner 引理的证明，下面我们就介绍这一堪称精品的证明.

Sperner 引理 从 V_n 中取出一个向量集合，使得这个集合中没有任何一个向量小于另外某一个向量，这种向量集合最大的就是 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

证法5 定义 $S_{w(k)} \triangleq U_m$ 中权为 k 的向量集合，构造一个函数 $g: S_{w(k)} \to S_{w(k-1)}$，$a_i \triangleq v$ 中第 i 个以前的0的个数，$p \triangleq \min\{\sum_{i=1}^{k} a_i (\mathrm{mod}\, k)\}$. 令 $g(v)$ 是把 v 中的第 p 个1改为0而得到的向量，假定 $g(v) = g(v')$，除了在一个位置上的0被1替换了以外，v 和 v' 中的每一个都与 $g(v)$ 相同.

假定这种替换在 v 中发生在 x 位置上，在 v' 中发生在 y 位置上，这样位置 y 一定是 v' 中第 p' 个1的位置.

记 $a_i(v) \triangleq$ 向量 v 中的第 i 个分量. 不妨设 $y > x$，则 $a_i(v) = a_i(v')$，除非 $p \leqslant i \leqslant p'$，$1 + a_i(v) = a_{i-1}(v)$. 对 $p \leqslant i \leqslant p'$，有 $a_p(v) = x - p$ 及 $a'_p(v') = y - p'$.

将这些方程相加得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(v) + (p' - p) - (x - p) + (y - p') = \sum_{i=1}^{k} a_i(v')$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(v) + y - x = \sum_{i=1}^{k} a_i(v')$$

$$x - p \equiv y - p'(\bmod k)$$

由于位置 x 是 v 中第 p 个 1 的位置，$x-p$ 是 v 中这个位置之前零的个数. 一个向量中第 p 个 1 以前的 0 的个数与另外向量中第 p' 个 1 以前的 0 的个数同余，这两个数的差 z 比每一个向量中位置 p 和位置 p' 之间的 0 的个数多，因而 $z \equiv 0(\bmod k)$，$1 \leqslant z \leqslant n-k$，这是因为总共只有 $n-k$ 个 0，对于 $n-k<k$，这是一个矛盾，因此 g 是一一对应的.

现今 C 为向量的规模最大的一个反链，将 g 作用于 C 中权数最高的向量，只要这个权数 $k>n-k$，我们就可以得到一个新的反链，这个反链的元素个数与原来的反链相同. 重复这种"操作"，我们就可以保证在反链中的一个向量的最高权数不超过 $[\frac{n}{2}]$. 对权数量低的那些向量应用一个与 g 对偶的函数，我们就能保证不会出现权数小于 $[\frac{n}{2}]$ 的向量，因此 $\max|C| = C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

近些年来随着图论的迅速发展，对许多已经给出证明的数学定理，图论专家们往往还要别出心裁地用图论的方法再给出一个证明来. 著名图论专家 Bollobás 在其 1985 年出版的名著《随机图》中用图论方法给出了 Sperner 引理的一个十分简单且巧妙的证明.

证法 6 设 A 是一个正则二部图，并且 V_1, V_2 是两顶点集，$|V_1| \leqslant |V_2|$，从 V_1 到 V_2 存在一个匹配，因此当 $k<\frac{n}{2}$ 和 $l<\frac{n}{2}$ 时有一个单射

$$f: Z^{(k)} \to Z^{(k+1)}$$

$$g: Z^{(l)} \to Z^{(l+1)}$$

满足 $A \subset f(A)$ 和 $g(B) \subset B$，对于 $A \in Z^{(k)}$ 和 $B \in Z^{(l)}$，这里 $Z^{(j)}$ 表示 Z 的 j 元子集，因此 Z 的所有子集能够覆盖 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 条链. 由于定义每条链包含多于一个 S 族的子集，故 Sperner 引理正确. 证毕.

4 G.C.Rota 猜想

我们先介绍偏序集上秩函数的概念.

设 X 为偏序集，Z 为整数集，X 上的秩函数 r 就是 X 映入 Z 的一个映射，满足下列条件：

(1) 对于 X 中的任一极小元 a，有 $r(a)=c$；

(2) 对 $\forall a,b \in X$ 且 $a<b$，有 $r(a)<r(b)$；

(3) 对 $\forall a,b \in X$ 且 $a<b$，有 $r(a)=r(a)+c$，其中 $c \in \mathbf{N}$ 为某常数. 通常取 $c=0$ 或 1.

我们再介绍一下格的概念.

对于一个集 L 的两元 a,b，若在 L 中总有用 $a \cup b$，$a \cap b$ 表示的，则有

(1) $a \cup b = b \cup a$，$a \cap b = b \cap a$； (交换律)

(2)$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c; a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$; (结合律)

(3)$a \cup (a \cap b) = a, a \cap (a \cup b) = a$. (吸收律)

(见[日]中山正.《格论》.董克诚译.上海:上海科学技术出版社.)

例如,设 X 为集,$P(X)$ 为 X 的所有子集之族,则$(P(X); \subseteq)$为偏序集.事实上,它还是格.对 $\forall A \in P(X)$,令 $r(A) = |A|$,则 r 就是偏序集 $P(X)$ 上的秩函数.这里 $P(X)$ 的极小元只有惟一的一个,即空集$\varnothing$;则 $c = r(\varnothing) = 0$.

现在考虑一个有限集 X 的所有子集之族 P,回顾剖分的定义,集族 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 X 的剖分是指:

(1)$A_1, A_2, \cdots, A_k \neq \varnothing$;

(2)$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = X$;

(3)对 $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$.

设 $A, B \in P, A = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}, B = \{B_1, B_2, \cdots, B_l\}$,如果对 $\forall i \in \{1, \cdots, l\}$,$\exists$ 相应的 $j \in \{1, \cdots, k\}$,使 $B_i \subseteq A_j$,则称 B 为 A 的加细,记作 $A \leqslant B$.则不难验证加细关系 $\leqslant$ 是 P 上的偏序关系.从而$(P; \leqslant)$是偏序集.不仅如此,$(P; \leqslant)$还是一个格.

偏序集中的非空全序子集称为链.

偏序集$(P; \leqslant)$中的非空子集 A 称为反链是指对任意的 $a, b \in A, a \neq b, a \leqslant b$,以及 $b \leqslant a$ 都不成立.

设$(P; \leqslant)$为任一偏序集,则 $\xi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ 为 P 的一个链覆盖是指:

(1)ξ 是 P 的一个部分;

(2)对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,$C_i$ 是链.

今设$(P; \leqslant)$为有限偏序集.记 K_c 为使$(P; \leqslant)$是有链覆盖$\{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$的有限偏序集,$K_a$ 为$(P; \leqslant)$中最大反链(即无数最多的反链)中的元数.若$(P; \leqslant)$还有秩函数 r,令

$$K_r = \max |A_i|$$

其中,$A_i = \{x \mid x \in P, r(x) = i\}$.由于一个链只能含有一个反链中最多一个元素,故有

$$K_c \geqslant K_a \geqslant K_r$$

那么它们是否相等呢?Dilworth 定理证明了 $K_c = K_a$,那么它们与 K_r 的关系如何呢?这就是关于偏序集的一个极其重要的性质.

Sperner 性质 一个有秩函数 r 的有限偏序集$(P; \leqslant)$,如果对于某个整数 i,P 中秩为 i 的所有元素构成 P 中的最大反链,则称该偏序集$(P; \leqslant)$具有 Sperner 性质.

因此,一个有秩函数的有限偏序集具有 Sperner 性质就是 $K_a = K_r$.前面提到的 Sperner 引理,也可以改述为:

设 X 是一个有限集,$P(X)$ 是 X 的所有子集之族,则$(P(X); \subseteq)$具有 Sperner 性质.

在组合数学中经常遇到的最重要的四类格:一个有限集的所有子集之格;一个有限复合集的所有复合子集之格;一个有限矢量空间的所有子空间之格;以及一个有限集的所有剖分之格.其中前三类,继 Sperner 引理之后,相继证明了都具有 Sperner 性质.至于第四类格,1967 年 G.C.Rota 提出了一个有限集所有剖分之格是否具有 Sperner 性质的问题.

这个问题直到 1978 年才由 E.R.Canfield 用否定的方式予以解决,他得到如下定理:

Canfield 定理　当有限集的元数足够多时,它的所有剖分之格不具有 Sperner 性质.

这个定理在格论史上具有重要的意义.

Canfield 用了三篇文章来完成其证明.证明中用到较多的概率论知识,方法比较复杂(见 E.R.Canfield.On a problem of rota. Adv. Math, 1978,29:1 ~ 10).

1984 年湖南的沙基昌和 D.J.Kleitman 作了一个改进的证明.其方法比较简单,而且对于有限集中的元数要求较低(Canfield 的结果为当 $|X|>6.5\times10^{24}$ 时,X 的所有剖分之格不具有 Sperner 性质;而沙基昌与 Kleitman 的结果只要求 $|X|>3.4\times10^{6}$ 即可).

另外,关于 Sperner 系的数值计算及进一步研究可见[9].

参考文献

[1] 单墫.数学竞赛研究教程[M],江苏:江苏教育出版社.

[2] 数学奥林匹克题库编译小组.加拿大中学数学竞赛题解[M].天津,新蕾出版社.

[3] KI HANG KIM. Boolean Matrix Theory and Applications.

[4] N G DE BRUIJN, C A Van E Tengbergen, D R Kruywijk. On the set of divisors of a number[M]. Nierw Arch Wisk, 1952.

[5] R FREESE. An application of Dilworth's lattice of maximal ontichains[J], Dis Math, 1974,17:107-109.

[6] D J Kleitman, M Edelberg, D Lubell. Maximal sized antichains in partial orders[J]. Dis Math, 1977,1:47-53.

[7] Bélabollobás. Combinatorics, 11-22.

[8] Bélabollobás. Random Graphs, 1985,347.

[9] Louis Comtet. 高等组合学 · 有限和无限的艺术[M].大连:大连理工大学出版社.

附录1　限制子集基数的SPERNER系①

查晓亚　韩绍岑

1　引言和主要结果

$S=\{1,2,\cdots,m\}$ 为 m 元集，$\mathscr{P}(S)$ 为 S 的子集全体. 若 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(S)$，记 $\mathscr{F}_i=\{X\mid X\in\mathscr{F},\mid X\mid=i\}$.

设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(S)$ 为 Sperner 系，即任意的 $X_i,X_j\in\mathscr{F},X_i\subsetneqq X_j$，若 $\mid\mathscr{F}_i\mid=p_i$，称 $\{p_0,p_1,\cdots,p_m\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的 Sperner 参数. 1928 年，Sperner 证明了

$$\mid\mathscr{F}\mid\leqslant\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$$

式中，$[x]$ 为不超过 x 的最大整数；$\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ 被称作 Sperner 界限.

自20世纪60年代以后，对 Sperner 系进行了大量的改进和推广工作. 例如，Kleitman，Katona 等在不改变 Sperner 界限的情况下，减弱对子集系 $\mathscr{F}$ 的要求，使其最大容量不超过这一界限：对于任意 $k(\geqslant 3)$ 个子集相交非空的 Sperner 系 $\mathscr{H}$，Gronau 对子集的基数作了限制. 设 $x\in\mathscr{H}$，则 $c\leqslant\mid x\mid\leqslant d$，给出了这一要求下 $\mathscr{H}$ 的容量界限.

可以看出，当 Sperner 系中的元素均为 S 的 $[\frac{m}{2}]$ - 子集全体（m 为奇数时亦可为 S 的 $\frac{m+1}{2}$ - 子集全体）时 Sperner 界限可以达到，而在其他情形，Sperner 界限是达不到的. 文[6]对子集的基数给予限制. 设 $\mathscr{F}$ 为 Sperner 系，若 $\min\{\mid X\mid\mid X\in\mathscr{F}\}=u_1,\max\{\mid X\mid\mid X\in\mathscr{F}\}=u_2$，记 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_{u_1,u_2}(m)$，$\mathscr{S}_{u_1,u_2}(m)=\mid\mathscr{F}_{u_1,u_2}(m)\mid$，$f(m,u_1,u_2)=\max\{\mid\mathscr{F}_{u_1,u_2}(m)\mid\}$，当 $m\neq 2s+1,2\leqslant u_1\leqslant s<u_2\leqslant 2s+1$ 时，文[6]求得了 $f(m;u_1,u_2)$，本文继续这一工作，得到了如下的定理.

定理1　设 $m=2s+1,2\leqslant u_1\leqslant s<u_2\leqslant 2s-1$，则

$$f(2s+1;u_1,u_2)=\begin{cases}\binom{2s+1}{s+1}-\binom{u_2}{s+1}-\binom{2s+1-u_1}{s}+2, & u_1\geqslant 2s+1-u_2\\ \binom{2s+1}{s+1}-\binom{u_2}{s}-\binom{2s+1-u_1}{s+1}+2, & u_1\geqslant 2s+1-u_2\end{cases}$$

注1　在 Sperner 的原始证明（见[1]）和以后的文献中，都指明若要 $\mid\mathscr{F}\mid=\binom{2s+1}{s}$，仅当 $\mathscr{F}$ 为 S 的全体 s - 子集或 $(s+1)$ - 子集时才有可能，但对此都未给予严格的证明. 而实际上，这一事实未必是显然的. 在定理1中指出了这一点，若 $\mathscr{F}$ 中既有 s - 子集又有 $(s+1)$ - 子集，则其容量的最大上界是 $\binom{2s+1}{s}-s$，而不是 $\binom{2s+1}{s}$.

---

① 原载《数学杂志》1985,5(2).

注 2　设 $\mathcal{F}\in \mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1)$，$A,B\in\mathcal{F}$，$|A|=u_1$，$|B|=u_2$，$2\leqslant u_1\leqslant s<u_2\leqslant 2s-1$，在定理 1 的证明过程中可以看出，当 $u_1>2s+1-u_2$ 时，仅当 $\mathcal{F}$ 为 S 的全体 $(s+1)$ - 子集除去包含 A 和含于 B 的 $(s+1)$ - 子集时，再添上 A,B，才有 $|\mathcal{F}|=f(2s+1;u_1,u_2)$，当 $u_1<2s+1-u_2$ 时，类似地取 s - 子集才有 $|\mathcal{F}|=f(2s+1;u_1,u_2)$，而 $u_1=2s+1-u_2$ 时，$\mathcal{F}$ 为上述两种情形均可. 在其他的情形都有 $|\mathcal{F}|<f(2s+1;u_1,u_2)$.

推论　$f(2s+1,u_1,u_2)$ 关于 $u_1(u_2)$ 是严格单调增(减)的.

设 P 为具有秩函数 r 的偏序集，即 $r(x)$ 取非负整数值，对 P 中的极小元 x，$r(x)=0$，当 $x_1\lessdot x_2$($\lessdot$ 表示覆盖)时，$r(x_2)=r(x_2)+1$. 以 P_k 记所有秩为 k 的元，$W_k=|P_k|$，称 W_k 为 P 的第 k 个 Whitney 数. 设 $\mathcal{F}$ 为 P 中的反链，若 $\max|\mathcal{F}|=\max\limits_k W_k$，称 P 具有 Sperner 性质，又若 $W_0\leqslant W_1\leqslant\cdots\leqslant W_k\leqslant\cdots\leqslant W_m$，秩序列 $\{W_i:i=0,1,2,\cdots,m\}$ 具有单峰性.

显然，$\mathcal{P}(S)$ 或 $\mathcal{P}(S)$ 的子系在集合包含关系下为偏序集，记 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{P}(S)$ 或 $\mathcal{P}(S)$ 的子系，X 为 $\mathcal{R}$ 中元，$\lambda=\min\{|X|\}$，则 $r(x)=|x|-\lambda$ 显然是 $\mathcal{R}$ 的秩函数. $\mathcal{R}$ 中的 Sperner 系即为 $\mathcal{R}$ 中的反链.

由定理 1 和文[6]中定理 3 证明实际上可以得到更强一点的结论. 为此，我们有：

定理 2　设 $S=\{1,2,\cdots,m\}$，$A,B\subset S$，$|A|=u_1$，$|B|=u_2$，$A\not\subset B\not\subset A$，$L(A)=\{x\mid x\subseteq S,A\subseteq x\}$，$M(B)=\{Y\mid Y\subseteq S,Y\subseteq B\}$，则 $\mathcal{P}(S)\setminus(L(A)\cup M(B))$ 具有 Sperner 性质，其 Whitney 数为 $\{\binom{m}{k}-\binom{u_2}{k}-\binom{m-u_1}{k-u_1},k=0,1,\cdots,m\}$，具有单峰性.

定理 1 的证明放在第 3 节，在第 2 节中，我们先列出一些准备知识.

2　一些准备知识

在 S 的子集中定义序关系“$<_s$”，对任意的 $A,B\subseteq S$，$A<_s B$，当且仅当 $\max\{x\mid x\in A\triangle B\}\in B$，这里，$A\triangle B$ 为 A 和 B 的对称差，称这一关系为字典序. S 的全体 i - 子集在字典序下为全序集. Daykin, Godfrey, Hilton 证明了对任意给定参数 $\{p_0,p_1,\cdots,p_m\}$ 的 Sperner 系，存在一个新的 Sperner 系 $\varphi\mathcal{F}$，具有相同的 Sperner 参数. $\varphi\mathcal{F}$ 可以按照下面的方法得到：依照序关系“$<_s$”，令 i 从 m 到 0，在 S 的 i - 子集中依次选取 p_i 个 i - 子集，并满足不相包含的性质，称 $\varphi\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}$ 的规范系.

同样地，定义序关系“$<_L$”，$A<_L B$，当且仅当 $\max\{x\mid x\in A\triangle B\}\in A$. 称“$<_L$”为反字典序，对任意的参数为 $\{p_0,p_1,\cdots,p_m\}$ 的 Sperner 系，存在具有相同参数的 Sperner 系 $\angle\mathcal{F}$，实际上，$\angle\mathcal{F}$ 可由 $\varphi\mathcal{F}$ 经如下构造而得：首先，将 $\mathcal{F}$ 中的集合取余，得 $\bar{\mathcal{F}}$，$\bar{\mathcal{F}}$ 的参数为 $\{q_0,q_1,\cdots,q_m\}$，$q_j=p_{m-i}$，构造 $\varphi\bar{\mathcal{F}}$，最后将 $\varphi\bar{\mathcal{F}}$ 中的元取余便可得 $\angle\mathcal{F}$，称 $\angle\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}$ 的反称规范系.

设 A,B 为两集合，当 A 中的点 x 与 B 中的点 y 关联时，用一条边将 x 与 y 连接，这样，得一双图，如果对 A 中的每一点 x，存在 B 中的点 y 与 x 连接，且当 x 不同时 y 亦不同，称这样一种对应为一个 A 到 B 的完全匹配，有如下的 Hall 定理：

P. Hall 定理在双图 (A,B) 中，存在 A 到 B 的完全匹配的充要条件是，对任意的 $A'\subseteq A$，$|A'|\leqslant|R(A')|$，其中 $R(A')$ 是 B 中与 A' 的点连接的点集.

3　定理 1 的证明

设 $m=2s+1$，$i\geqslant l$，令

$$H_l(i)=\{X\mid X=l,X\subset\{1,2,\cdots,i\}\}$$

$$Q_l(l) = H_l(l), Q_l(i) = H_l(i) \setminus H_l(i-1), i > l \quad ①$$

则
$$Q_l(i) \cap Q_l(j) = \varnothing, i \neq j$$

$$(\mathscr{P}(S))_l = U_{i=l}^{m} Q_l(i) \quad ②$$

$$|H_l(i)| = \binom{i}{l}, \quad |Q_l(i) = \binom{i-1}{l-1}$$

其中$(\mathscr{P}(S))_l$表示S的全体l－子集.

显然,当$X \in Q_l(i), Y \in Q_l(j)$时,$X <_s Y$当且仅当$i < j$.

若把$Q_l(i)$中的元再按“$<_s$”排列,则②式是$(\mathscr{P}(S))_l$在“$<_s$”下的一个分解.

引理1 当$s+1 \leqslant i \leqslant 2s$时,存在$Q_{s+1}(i)$到$Q_s(i)$的完全匹配.

证明 设$i \leqslant 2s$,由$Q_l(i)$的定义可知

$$Q_{s+1}(i) = \{X \cup \{i\} \mid X \subset [1,2,\cdots,i-1], |X| = S\}$$
$$Q_s(i) = \{Y \cup \{i\} \mid Y \subset [1,2,\cdots,i-1], |Y| = s-1\}$$

要证明存在$Q_{s+1}(i)$到$Q_s(i)$的完全匹配,只要证明从$[1,2,\cdots,i-1]$的S－子集全体到$(s-1)$－子集全体存在完全匹配即可.以F_s和F_{s-1}分别表示$[1,2,\cdots,i-1]$的S－子集和$(s-1)$－子集全体,设$X \in F_s, Y \in F_{s-1}$,X与Y连接当且仅当$X \subseteq Y$,便可得双图(F_s, F_{s-1}).F_s中的任意一个元与F_{s-1}中的s个元连接,而F_{s-1}中的任意一个元与F_s中的$i-s$个元连接.设$D \subset F_s$,$R(D)$是F_s中与D连接的点,分别从双图的两边计算D与$R(D)$连接的边数,有

$$S|D| \leqslant (i-s)|R(D)|$$

当$i \leqslant 2s$时,$s \geqslant i-s$,从而

$$|D| \leqslant |R(D)|$$

由Hall定理,可知引理1成立.

下面,我们进一步对$Q_{s+1}(2s+1)$和$Q_s(2s+1)$的序结构进行分析,从而证明存在$Q_s(2s+1)$到$Q_{s+1}(2s+1)$的完全匹配.因为

$$Q_{s+1}(2s+1) = \{X \cup \{2s+1\} \mid X \subset [1,2,\cdots,2s], |X| = S\}$$
$$Q_s(2s+1) = \{Y \cup \{2s+1\} \mid Y \subset [1,2,\cdots,2s], |Y| = s-1\}$$

令
$$\overline{Q}_{s+1}(2s+1) = \{\overline{X} \mid X \in Q_{s+1}(2s+1)\}$$
$$\overline{Q}_s(2s+1) = \{\overline{Y} \mid Y \in Q_s(2s+1)\}$$

则
$$\overline{Q}_{s+1}(2s+1) = \bigcup_{i=s}^{2s} Q_s(i) \quad ③$$
$$\overline{Q}_s(2s+1) = \bigcup_{i=s+1}^{2s} Q_{s+1}(i) \quad ④$$

并且当$X_1 <_s X_2$时,$\overline{X}_1 <_L \overline{X}_2$.

对③、④式右边的$Q_s(i)$和$Q_{s+1}(i)$,令$\overline{Q}_s(i) = P_{s+1}(i), \overline{Q}_{s+1}(i) = P_s(i)$,则可把③、④式改写为

$$Q_{s+1}(2s+1) = \bigcup_{i=s}^{2s} P_{s+1}(i)$$
$$Q_s(2s+1) = \bigcup_{i=s+1}^{2s} P_s(i) \quad ⑤$$

这里,$|P_{s+1}(i)| = \binom{i-1}{s-1}$,$|P_s(i)| = \binom{i-1}{s}$.

⑤式中的分解是②中分解的进一步细化.

显然,当$X_1 \in P_\lambda(i), X_2 \in P_\lambda(j)(\lambda = s, s+1)$时,$X_1 <_s X_2$,当且仅当$i > j$.

由引理1,$Q_{s+1}(i)$到$Q_s(i)$存在完全匹配,因而$\overline{Q}_{s+1}(i)$到$\overline{Q}_s(i)$存在完全匹配,因此可得:

引理2 存在$P_s(i)$到$P_{s+1}(i)$的完全匹配,$i = s+1,\cdots,2s$.

定义 设$\mathscr{T}$是参数为$\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$的Sperner系,$\mathscr{T}_i \subset \mathscr{T}_i$,若$\mathscr{T}_m \cup \mathscr{T}_{m-1} \cup \cdots \cup \mathscr{T}_{i+1} \cup \mathscr{T}'_i$为

规范系，$(\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}'_i) \cup \mathcal{F}_{i-1} \cup \cdots \cup \mathcal{F}_0$ 为反称规范系，则称 $\mathcal{F}$ 为拟规范系.

明显的，有如下的结论：

引理 3 对于任意的参数为 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 的 Sperner 系，存在相同参数的拟规范系.

设 $A, B \subset S$，$|A| = u_1$，$|B| = u_2$，$L(A) = \{X \mid X \subseteq S, A \subseteq X\}$，$M(B) = \{Y \mid Y \subset S, Y \subseteq B\}$，$G_{s+1} = (\mathcal{P}(S))_{s+1} \setminus ((L(A))_{s+2} \cup (M(B))_{s+1})$，$G_s = (\mathcal{P}(S))_s \setminus ((L(A))_s \cup (M(B))_s)$，则

$$|G_{s+1}| = \binom{2s+1}{s+1} - \binom{u_2}{s+1} - \binom{2s+1-u_1}{s}$$

$$|G_s| = \binom{2s+1}{s} - \binom{u_2}{s} - \binom{2s+1-u_1}{s+1}$$

引理 4 （[6]，定理 5）

$$u_1 \geqslant 2s + 1 - u_2 \text{ 时}，|G_{s+1}| \geqslant |G_s|$$

$$u_1 < 2s + 1 - u_2 \text{ 时}，|G_{s+1}| \leqslant |G_s|$$

在文[6]定理 3 中，我们证得了如下的事实：对任意 $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1)$，存在与之对应的 $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1)$，$\mathcal{F}' \subseteq \{A\} \cup \{B\} \cup G_{s+1} \cup G_s$，$|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$，其中，$A, B \in \mathcal{F}$，$|A| = u_1$，$|B| = u_2$.

在此基础上，我们来证明定理 1.

对任意 $\mathcal{F} \subset \{A\} \cup \{B\} \cup G_{s+1} \cup G_s$，将 $\mathcal{F}$ 拟规范化，可得具有相同参数的拟规范系 $\mathcal{F}^*$，使得 $(\mathcal{F}^*)_{u_2} \cup (\mathcal{F}^*)_{s+1}$ 为规范系，$(\mathcal{F}^*)_s \cup (\mathcal{F}^*)_{u_1}$ 为反称规范系，便有

$$(\mathcal{F}^*)_{u_2} = \{\{1, 2, \cdots, u_2\}\} =: \{B_1\}$$

$$(\mathcal{F}^*)_{u_1} = \{\{2s+2-u_1, \cdots, 2s+1\}\} =: \{A_1\}$$

$$(M(B_1))_{s+1} = \bigcup_{i=s+1}^{u_2} Q_{s+1}(i)$$

$$(M(B_1))_{s+1} = \bigcup_{i=s}^{u_2} Q_s(i)$$

$$(L(A_1))_{s+1} = \bigcup_{i=s}^{2s+1-u_1} P_{s+1}(i)$$

$$(L(A_1))_s = \bigcup_{i=s+1}^{2s+1-u_1} P_s(i)$$

若 $(\mathcal{F}^*)_{s+1}$ 和 $(\mathcal{F}^*)_s$ 非空，显然，其中的元分别始于 $Q_{s+1}(u_2+1)$ 和 $P_s(2s+2-u_1)$.

设 $u_1 \geqslant 2s+1-u_2$，$u_2 \neq 2s$，$u \neq 1$（$u_2 = 2s$ 或 $u_1 = 1$ 的情形在[6]中已证），$(\mathcal{F}^*)_{s+1}$ 和 $(\mathcal{F}^*)_s$ 中的最后一个元分别是 X^* 和 Y^*.

(i) 若 $X^* \in Q_{s+1}(t)$，$t \subseteq 2s$，由拟规范系的构造可知，$Y^* \overline{\in} Q_s(i)$，$i \leqslant t-1$，由引理 1，考虑由 $Q_{s+1}(i)$ 到 $Q_s(i)$（$u_2 < i \leqslant t$）的完全匹配决定的映射，记 $(\mathcal{F}^*)_{s+1}$ 中元的对应集合为 $R((\mathcal{F}^*)_{s+1})$，令

$$\mathcal{F}^{**} = \{B_1\} \cup R(\mathcal{F}^*)_{s+1}) \cup \mathcal{F}^*)_s \cup \{A_1\}$$

则

$$\mathcal{F}^{**} \in \mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1),\ |\mathcal{F}^{**}| \geqslant |\mathcal{F}^*|$$

$$\mathcal{F}^{**} \subset \{B_1\} \cup G_s \cup \{A_1\}$$

而

$$|\{B_1\} \cup G_s \cup \{A\}| = \binom{2s+1}{s} - \binom{u_2}{s} - \binom{2s+1-u_1}{s+1} + 2 \leqslant$$

$$\binom{2s+1}{s+1} - \binom{u_2}{s+1} - \binom{2s+1-u_1}{s+1} + 2 =$$

$$|\{B_1\}\cup G_{s+1}\cup\{A_1\}| \qquad ⑥$$

不等式的成立系由引理4所得.

特别地,注意到 $Q_{s+1}(2s+1)$ 中的每一个元恰好包含 $\bigcup_{i=s}^{2s}Q_s(i)$ 中的一个元,因此 $\{A_1\}\cup\{B_1\}\cup(\bigcup_{i=u_2+1}^{2s}Q_s(i))\cup(Q_{s+1}(2s+1)\setminus(P_{s+1}(s+1)\cup\cdots\cup P_{s+1}(2s+1-u)))$ 中的 Sperner 系不会是 $\mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1)$ 中容量最大的Sperner系,故⑥式说明了在情形(i)时定理1中的第一个等式是成立的.

(ii) 若 $X^*\in Q_{s+1}(2s+1)$,由引理2,考虑由 $P_s(i)$ 到 $P_{s+1}(i)(2s+2-u_1\leqslant i\leqslant 2s)$ 的完全匹配决定的映射,以 $R((\mathcal{F}^*)_s)$ 记 $(\mathcal{F}^*)_s$ 的对应点集.

令
$$\mathcal{F}^{**}=\{B_1\}\cup\{A_1\}\cup R((\mathcal{F}^*)_s)\cup(\mathcal{F}^*)_{s+1}$$
则
$$\mathcal{F}^{**}\in\mathcal{S}_{u_1,u_2}(2s+1),\ |\mathcal{F}^{**}|\geqslant|\mathcal{F}^*|$$
$$\mathcal{F}^{**}\subset\{B_1\}\cup G_{m+1}\cup\{A_1\}$$
而
$$|\{B_1\}\cup G_{m+1}\cup\{A_1\}|=\binom{2s+1}{s}-\binom{u_2}{s+1}-\binom{2s+1-u_1}{s}+2$$
故而证明了定理1中的第一个等式.

当 $u_1<2s+1-u_2$ 时,只要考虑集系 $\bar{\mathcal{F}}=\{\bar{X}\mid X\in\mathcal{F}\}$ 便可得第二个等式.当然,也可用上面类似的方法进行.

至此,定理1证毕.

参考文献

[1] SPERNER E. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge[J]. Math, 1928,Z. 27,544-548.

[2] GREENE C, D J KLEITMAN. Strong Version of Sperner's theorem[J]. J.Comb. Th.(A) 1976,20.

[3] GREENE C, G O H KATONA, D J KLEITMAN. Extension of Erdos-Ko-Rado theory[J]. Studied in Applied Math, 1976, 55, 1-8.

[4] GRONAU H D O F. On Sperner families in which no k sets have an empty intersection[J]. II, J.Comb. Th(A). 1981,30,298-316.

[5] On Sperner families in which no k sets have an empty intersection[J]. Combinatorica, 1982, 2(1), 25-36.

[6] 查晓亚,韩绍岑. (u_1,u_2)-Sperner 界限和 EKR 界限[J]. 华中工学院学报.

[7] GRAPO H, ROTA G C. Combinatorial Geometries[J]. M.I.T.Press, Cambridge, 1971.

[8] AIGNER M. Combinatorial Theory[M]. New York Inc.: Springer-Verlag 1979,419-440.

[9] DAYKIN D E, GODFREY J, HILTON A J. Existence theorem for Sperner families[J]. J.Gomb. Th.(A),1974,17,245-251.

[10] GREENE C, HILTON A J. Some results on Sperner families[J]. J.Comb, Th(A),1979,26, 202-209.

[11] HALL P. On representation of subsets[J]. J.London Math. Soc.,1935,10.

附录 2　迪尔沃斯定理和极集理论[①]

一个偏序集(简记为 poset)就是一个集合 S 连同 S 上的一个二元关系 $\leqslant$(有时用 $\subseteq$),使其满足:

(i) 对一切 $a \in S$ 有 $a \leqslant a$(反射性);

(ii) 若 $a \leqslant b, b \leqslant c$,则 $a \leqslant c$(传递性);

(iii) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$,则 $a = b$(反对称性).

如果对 S 中任意两个元素 a 和 b,或者 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$,则这个偏序称为全序或线性序.如果 $a \leqslant b$ 且 $a \neq b$,那么记为 $a < b$.例如,整数集及整数间的通常的大小关系就构成一个偏序集;一个集的子集及集合的包含关系也构成一个偏序集.如果集合 S 的一个子集是全序的,那么这个子集就称为是一条链.若一个集合中的元素是两两不可比较的,则这个集合称为反链.

下述定理归功于 R. Dilworth(1950),下述的证明是 H. Tverberg(1967) 给出的.

定理 1　令 P 是一个有限偏序集,P 中元素划分为不相交链的最小个数 m 等于 P 的一个反链所含元素的最大个数 M.

证明　(i) 显然有 $m \geqslant M$.

(ii) 对 $|P|$ 使用归纳法.若 $|P| = 0$,显然定理为真.令 C 是 P 的一条极大链.如果 $P \setminus C$ 中每一个反链包含最多 $M - 1$ 个元素,则定理成立.因此,假设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$ 是 $P \setminus C$ 中的一个反链.我们定义 $S^-:=\{x \in P: \exists_i [x \leqslant a_i]\}$,类似地定义 S^+.因为 C 是极大链,所以 C 中的最大元不在 S^- 里,故按归纳假设,对 S^- 定理成立.因此 S^- 是 M 个不交的链 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_M^-$ 的并,其中 $a_i \in S_i^-$.假设 $x \in S_i^-$ 且 $x > a_i$.因为存在 j,使 $x \leqslant a_j$,从而有 $a_i < a_j$,这与 $\{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$ 是反链矛盾.这样就证明了 a_i 是 S_i^- 的极大元,其中 $i = 1, 2, \cdots, M$[②].我们可同样地对 S^+ 进行讨论.与链联系起来,这个定理就得到了证明.

Mirsky(1971) 给出了迪尔沃斯(Dilworth) 定理的对偶.

定理 2　令 P 是一个偏序集.如果 P 不具有 $m + 1$ 个元素的链,则 P 是 m 个反链的并.

证明　对 $m = 1$,定理显然成立.令 $m \geqslant 2$ 且假定对 $m - 1$ 定理为真.令 P 是一个偏序集且没有 $m + 1$ 个元素的链.令 M 是 P 的极大元集合,则 M 是一个反链.假设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ 是 $P \setminus M$ 中的一条链,那么它也是 P 的极大链,因此 $x_m \in M$,故得矛盾.所以 $P \setminus M$ 没有 m 个元素的链.故按归纳假设,$P \setminus M$ 是 $m - 1$ 个反链的并.定理得证.

下述的著名定理归功于 Sperner(1928),它与上述定理有相似的性质,这个定理的下述证明是 Lubell(1966) 给出的.

定理 3　如果 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 $N:=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一些子集,且满足对任意 $i \neq j$,A_i 不是 A_j 的子集,那么 $m \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

证明　考虑由 N 的子集构成的偏序集.$\mathscr{A}:=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是这个偏序集的一个反链.

这个偏序集的一个极大链 $\mathscr{C}$ 由元素个数为 i 的子集组成,其中 $i = 0, 1, \cdots, n$,它可按下述方法得到:开始的一个是空集,然后是包含一个单一元素的子集(有 n 种选取),接下来是包含前面子集的

① 选自 J. H. Vanliut(荷兰)、R. M. Wilson(美国),《组合数学教程》(第 2 版).刘振宏;刘振江译.机械工业出版社.

② 这里原文为 m,与上下文不合.—— 译者注

2 - 子集(有 $n-1$ 种选取),再接下来是包含前面子集的 3 - 子集(有 $n-2$ 种选取),如此等等.因此有 $n!$ 个极大链.类似地,给定 N 的一个 k - 子集 A,恰有 $k!(n-k)!$ 个极大链包含 A.

现在计算有序对$(A,\mathscr{C})$的个数,其中 $A\in\mathscr{A}$,$\mathscr{C}$ 是极大链,而 $A\in\mathscr{C}$.因为每一个极大链 $\mathscr{C}$ 最多包含一个反链中的一个成员,因此有序对的个数最多为 $n!$ 个.若令 $A\in\mathscr{A}$ 且 $|A|=k$ 的子集的个数为 α_k,那么有序对的个数 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k k!(n-k)!$.因此

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k k!(n-k)!\leqslant n! \quad \text{或等价于} \quad \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}}\leqslant 1$$

因为 $k=[n/2]$ 时,$\binom{n}{k}$ 达到最大,以及 $\sum\alpha_k=m$,由此可得到定理的结论.

如果我们取 N 的所有$[n/2]$ - 子集作为反链,则定理 3 中的等式成立.

现在我们讨论由 n - 集 N 的所有子集(2^n 个)在集合包含关系下组成的偏序集 B_n.N 的 i - 子集的集合用 $\mathscr{A}_i$ 表示.B_n 的一条对称链定义为顶点的一个序列 $P_k,P_{k+1},\cdots,P_{n-k}$,使得对 $i=k,k+1,\cdots,n-k-1$ 有 $P_i\in\mathscr{A}_i$ 和 $P_i\subseteq P_{i+1}$.现在我们叙述由 De Bruijn,Van Ebbenhorst Tengbergen and Kruyswijk(1949)给出的把 B_n 分裂为(不相交)对称链的算法.

算法 从 B_1 开始,归纳地进行.如果 B_n 已被分裂为对称链,那么对每一个这样的对称链 $P_k,\cdots,P_{n-k}$,定义 B_{n+1} 中的两个对称链,即 $P_{k+1},\cdots,P_{n-k}$ 和 $P_k,P_k\cup\{n+1\},P_{k+1}\cup\{n+1\},\cdots,P_{n-k}\cup\{n+1\}$.

容易看出,这个算法确实把 B_n 分裂为对称链,进而还提供了 B_n 的 k - 子集和$(n-k)$ - 子集之间的一个自然的匹配.

问题 A 令 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}^2$ 是整数 $1,2,\cdots,n^2+1$ 的一个置换.证明由迪尔沃斯定理可推出,这个序列中有一个长为 $n+1$ 的单调子序列.

下述是问题 A 的一个优美的直接证明.假设不存在 $n+1$ 项的递增子序列.令 b_i 是自 a_i 项开始的最长递增子序列的长度.那么按鸽巢原理,在这些 b_i- 序列里至少有 $n+1$ 个有相同的长度.因为 $i<j$ 且 $b_i=b_j$,则必有 $a_i>a_j$,因此我们就得到长为 $n+1$ 的递减子序列.

定理 3 是通常称之为极集理论领域里的一个相当容易的例子,而极集理论中的问题通常是十分困难的.下面我们再给出一个例子作为简单练习.

问题 B 令 $A_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的 k 个不同的子集.假设对所有的 i 和 j 有 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$,证明 $k\leqslant 2^{n-1}$,并给出使等式成立的一个例子.

我们再介绍一个典型的方法,该方法在证明 Sperner 定理时使用过.证明埃德斯 - 柯召 - 拉多(Erdös - Ko - Rado)定理(1961).

定理 4 令 $A=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的 m 个不同 k - 子集的集合,使得任何两个子集有非空的交,其中 $k\leqslant n/2$.证明 $m\leqslant\binom{n-1}{k-1}$.

证明 将 1 到 n 这 n 个整数由小到大排成一个圆圈,令 F_i 表示集合$\{i,i+1,\cdots,i+k-1\}$,其中这些整数取模 n.记 $F:=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 为圈上所有 k 个相继元素集合的总体.由于如果某个 F_i 等于某个 A_j,那么集合$\{l,l+1,\cdots,l+k-1\}$和$\{l-k,\cdots,l-1\}$$(i<l<i+k)$中最多有一个在 A 中,所以 $|A\cap F|\leqslant k$.对$\{1,2,\cdots,n\}$应用一个置换 π,则由 F 得到 F^π,那么对 F^π 上述结论同样成立.因此有

$$\Sigma:=\sum_{\pi\in S_n}|A\cap F^\pi|\leqslant k\cdot n!$$

我们固定 $A_j \in A$ 和 $F_i \in F$,计算这个和,并注意到使 $F_i^\pi = A_j$ 的置换有 $k!(n-k)!$ 个.因此 $\Sigma = m \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)!$.这样定理就得到了证明.

如果假定 A 中每一个集合最多含有 k 个元素,并且它们构成一条反链,那么对上述证明略加修改,就能证明在这种条件下该定理仍然成立.

定理 5 令 $A = \{A_1, \cdots, A_m\}$ 是集合 $N: = \{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 个子集的集合,使得对 $i \neq j$ 有 $A_i \not\subseteq A_j$ 且 $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ 以及对一切 i 有 $|A_i| \leqslant k \leqslant n/2$,则 $m \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.

证明 (i) 如果所有子集都有 k 个元素,则按定理 4 结论成立.

(ii) 令 $A_1, \cdots, A_s$ 是基数最小的子集,设其基数为 $l \leqslant \frac{n}{2} - 1$.考虑 N 的包含一个或多个 $A_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 的所有 $(l+1)$ - 子集 B_j.显然这些 B_j 均不在 A 里.每一个集合 $A_i(i \leqslant i \leqslant s)$ 恰在 $n-l$ 个 B_j 里,并且每一个 B_j 最多包含 $l+1 \leqslant n-l$ 个 A_i.因此,可以选取 s 个不同的集合,比如 $B_1, \cdots, B_s$,使得 $A_i \subseteq B_i$.如果用 B_i 替换 A_i,那么新的集合 A' 满足定理的条件,且最小基数的子集有大于 l 个元素.按归纳法,可归结为情况(i).

把定理 4 证明中的计数论证改为赋权子集的计数论证,这样,我们就能证明下述推广,它属于 B. Bollobas(1973).

定理 6 令 $A = \{A_1, \cdots, A_m\}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 个不同子集的集合,其中对 $i = 1, \cdots, m$,有 $|A_i| \leqslant n/2$.如果任何两个子集都有非空的交,则

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n-1}{|A_i|-1}} \leqslant 1$$

证明 设 π 是排成一个圈的 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换,如果 A_i 中的元素相继地出现在该圈的某一段,则称 $A_i \in \pi$.与定理 4 的证明相同,我们可证,若 $A_i \in \pi$,则所有满足 $A_j \in \pi$ 的 j 最多有 $|A_i|$ 个.

定义

$$f(\pi, i): = \begin{cases} \frac{1}{|A_i|} & 若\ A_i \in \pi \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

根据上述论证 $\sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{m} f(\pi, i) \leqslant n!$.改变和的次序,对于固定的 A_i,我们必须计算置换 π 排成一个圈使 $A_i \in \pi$ 的 π 的个数.这个数(用定理 4 的相同论证)是 $n \cdot |A_i|!(n-|A_i|)!$.因此有

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|A_i|} \cdot n \cdot |A_i|!(n-|A_i|)! \leqslant n!$$

由此可得所需结果.

问题 C 令 $A = \{A_1, \cdots, A_m\}$ 是 $N: = \{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 个不同的子集的集合,使得若 $i \neq j$,则 $A_i \not\subseteq A_j, A_i \cap A_j \neq \varnothing, A_i \cup A_j \neq N$.证明

$$m \leqslant \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]-1}$$

问题 D 考虑把 B_n 按上述描述分解为对称链.证明定理 3 是这种分解的一个直接结果.证明定理 5 通过这种分解能归结为定理 4.使链的最小元在 A_i 里的链有多少个?

问题 E 给定偏序集 B_n 的一个元素 $S(\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集),构造 B_n 包含 S 的对称链的算法.用 x 表示 S 的特征向量.例如 $n = 7, S = \{3,4,7\}$,那么 $x = 0011001$.标记所有相继的 10 对,暂时去掉这些标记的对,然后再标记所有相继的 10 对,重复这个过程,一直到剩下的数串为形式 00…01…11 为

止.在我们的例子里,我们得到 $00\dot{1}\dot{1}\dot{0}\dot{0}1$,其中对 $i = 3,4,5,6$,第 i 个坐标被标记,当去掉这些被标记的坐标后,剩余数串为 001.这条链上的诸子集的特征向量可如下得到:固定所有被标记的坐标,然后让其余坐标组成的数串取遍 0…000,0…001,0…011,…,1…111.在我们的例子里,这些特征向量为

$$00\dot{1}\dot{1}\dot{0}\dot{0}0$$

$$00\dot{1}\dot{1}\dot{0}\dot{0}1$$

$$01\dot{1}\dot{1}\dot{0}\dot{0}1$$

$$11\dot{1}\dot{1}\dot{0}\dot{0}1$$

它们对应的子集为

$$\{3,4\},\{3,4,7\},\{2,3,4,7\},\{1,2,3,4,7\}$$

证明这个算法生成的包含 S 的对称链,与下述德布鲁因等归纳算法所得到的对称链恰好相同.

评　注

E. Sperner(1905—1980) 是以组合拓扑学中的一个引理而出名的,通常把这个引理称之为"Sperner 引理".该引理出现在他的毕业论文里(1928),被用于证明布劳威尔(Brouwer) 的不动点定理.(与组合学的另一个联系是他最先在哥尼斯堡大学取得教授资格!)他是著名的 Oberwolfach 研究所的创始人之一.

关于极集理论的综述,请参看 Frankl(1988).

Katona(1974) 给出了埃德斯 – 柯召 – 拉多定理的一个简短的证明.定理 5 归功于 Kleitman and Spenner(1973) 以及 Schönheim(1971).定理 6 的证明是由 Greene, Katona and Kleitman(1976) 给出的.

附录3 高斯数和 q- 类似

一个有限集的所有子集的偏序集与一个有限向量空间的所有子空间的偏序集之间有许多类似.设 $V_n(q)$ 表示 q 个元素的域 F_q 上的一个 n 维向量空间.我们用术语 k - 子空间作为 k 维子空间的缩略形式.

下面从计数开始.为了得到 $V_n(q)$ 的所有子空间的偏序集中的一个最大链(即规模为 $n+1$ 的链,它包含每个可能维数的一个子空间),我们以0 - 子空间开始.在已经选择了一个 i - 子空间 $U_i(1\leqslant i<n)$ 之后,我们可以选择一个$(i+1)$ - 子空间 U_{i+1},它以$(q^n-q^i)/(q^{i+1}-q^i)$ 种方式包含 U_i,因为我们能取 U_i 和任意不在 U_i 中的(q^n-q^i)个向量之一的生成——但以这种方式任何$(i+1)$ - 子空间恰出现$(q^{i+1}-q^i)$ 次.总之,在 $V_n(q)$ 中子空间的最大链的数目是

$$M(n,q)=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)}{(q-1)^n}$$

对每个整数 n,把 $M(n,q)$ 作为 q 的一个多项式考虑.当变量 q 换成一个素数的幂时,我们得到偏序集 $PG_n(q)$ 中最大链的数目.当 q 用1代替时,我们有 $M(n,1)=n!$,这是在一个 n - 集合的子集的偏序集中最大链的数目.

高斯数$\left[{n \atop k}\right]_q$ 可以定义为 $V_n(q)$ 的 k - 子空间的数目.为强调它们与二项式系数的类似,有些作者称高斯数为高斯系数.为强调它们与二项式系数的类似,有些作者称高斯数为高斯系数.为了寻找$\left[{n \atop k}\right]_q$ 的一个表达式,我们对(U,C)对的数目 N 计数,这里 U 是一个 k - 子空间且 C 是包含 U 的一个最大链.当然,每个最大链恰包含一个维数为 k 的子空间,于是 $N=M(n,q)$.另一方面,通过把包含 U 的 $V_n(q)$ 的所有子空间的偏序集中的一个最大链附加到 U 的所有子空间的偏序集中的一个最大链上,我们唯一地得到每个这样的最大链,U 中有 $M(k,q)$ 个最大链;包含 U 的 $V_n(q)$ 中的最大链有 $M(n-k,q)$ 个,这是因为偏序集$\{W:U\subseteq W\subseteq V\}$ 同构于维数为 $n-k$ 的商空间 V/U 的子集的偏序集.因此

$$\left[{n \atop k}\right]_q=\frac{M(n,q)}{M(k,q)M(n-k,q)}=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$$

为了某些意图,把$\left[{n \atop k}\right]_q$ 作为一个变量 q 的多项式考虑比作为一个素数的幂 q 的函数考虑为好.可以由几种方式看出上面的有理函数事实上就是多项式.例如,很容易明白,x 的有理函数对无穷多取整数的 x 是整数,则这个有理函数一定是 x 的多项式.也许高斯多项式是比高斯数或高斯系数更好的一个术语.例如

$$\left[{6 \atop 3}\right]_q=q^9+q^8+2q^7+3q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1$$

在$\left[{n \atop k}\right]_q$ 中当 q 被1代替时,我们得到$\binom{n}{k}$.这解释了一种倾向的一小部分:关于有限向量空间的结果约化为当 q 由1代替时集合的相应结果.当我们试图用"k - 子空间"代替"k - 子集"时,可能得到所谓集合上结果的 q - 类似.有时这些替换后的陈述是正确的且其证明与对集合上结果的证明类似.

下面的定理是 Sperner 定理:

定理1 如果 A 是一个反链,它在 $V_n(q)$ 的所有子空间的偏序集中,则

$$|A|\leqslant\left[{n \atop [n/2]}\right]_q$$

证明 设 A 是一个反链并对(U,C)对的数目 N 计数,这里 $U\in A$ 且 C 是包含 U 的一个最大链.

每个最大链至多包含 A 中的一个子空间,因此 $N \leqslant M(n,q)$.另一方面,在 A 中每个 k - 子空间正好位于 $M(k,q)M(n-k,q)$ 个最大链 C 中.于是

$$M(n,q) \geqslant N = \sum_{k=0}^{n} c_k M(k,q)M(n-k,q)$$

这里 c_k 是属于 A 的 k 维子空间的数目.如果我们相信对所有 k 有 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \leqslant \begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_q$,则以类似于证明定理 3 的方式可完成本定理的证明,$[{n \atop k}]_q \leqslant \begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_q$,留给读者验证.

下面的定理给出作为 q 的多项式系数的$[{n \atop k}]_q$ 的组合解释,并因此证明它们都是正整数.

定理 2 设

$$[{n \atop k}]_q = \sum_{\ell=0}^{k(n-k)} a_\ell q^\ell$$

则系数 a_ℓ 是 ℓ 的分拆数,ℓ 的 Ferrers 图适合规模 $k \times (n-k)$ 的方格.

证明 我们可以用 F_q 上的 n 元组的向量空间 F_q^n 进行证明.众所周知,F_q^n 的每个 k - 子空间作为 F_q 上一个 $k \times n$ 矩阵的行空间唯一地出现,该矩阵满足:(i) 秩为 r,(ii) 它是所谓的行约化阶梯形.这意味着在每一行第一个非零项是 1,首 1 上面的项是 0,第 i 行的首 1 比第 $i-1$ 行的首 1 更靠右端,其中 $i = 2,3,\cdots,k$.

假设第 i 行的首 1 出现的第 c_i 列,其中 $i = 1,2,\cdots,k$.则$(n-k+1-c_1, n-k+2-c_2,\cdots, n-1-c_{k-1}, n-c_k)$是非负数的一个非增序列,因此当末端的 0 去掉时,对应某个数至多分成 k 部分,每部分的规模至多为 $n-k$ 的一个划分.反之,这样的划分在阶梯形的一个类中给出首 1 的位置.

例如,在 $n = 6, k = 3$ 的情形,阶梯形有如下 20 个类:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在如上所示的每个矩阵中,当插入列被删去并通过一条竖直的轴反射这些圆点时,圆点的位置描述了一个($\leqslant 9$的数的)分拆的 Ferrers 图,这个图可以包含在3×3的方格中.例如,第一行最后一个矩阵表示的类包含 q^7 个阶梯形.

一般地,首 1 在第 i 行出现在 c_i 列的阶梯形的类,对某个 ℓ,包含 q^ℓ 个矩阵,这里 $i = 1,2,\cdots,k$,因为不包含 1 或不需要是 0 的位置可以任意填充 F_q 的元素.为了精确

$$\ell = (n-k+1-c_1) + \cdots + (n-1-c_{k-1}) + (n-c_k)$$

因为对每个 i,在第 i 行有$n-(k-i)-c_i$ 个位置可任意填充.这就是,该类由 q^ℓ 个矩阵构成,这里至多分成 k 部分、每部分的规模至多为 $n-k$ 的划分,对应的类事实上是数 ℓ 的分拆.

于是,若 a_ℓ 定义为 ℓ 的分拆数,ℓ 的 Ferrers 图可以包含在 $k\times(n-k)$ 格子中,我们有一个多项式 $\sum\limits_{\ell=0}^{k(n-k)}a_\ell q^\ell$,当对任意的素数幂 q 计算时,其值与多项式 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ 相等,因此这两个多项式相等.

注意,当在定理2的陈述中置 $q=1$ 时,作为一个推论可以得到一个结果:Ferrers 图可以包含在 $k\times(n-k)$ 个格子中的划分的总数是 $\binom{n}{k}$.

问题 A 直接证明这个结果.

接下来,我们对高斯数导出递推式①.这提供了另一种方式来理解它们是 q 的多项式(比如说,对 n 用归纳法).取一个超平面 H,即 $V_n(q)$ 的一个 $(n-1)$ - 子空间.一些 k - 子空间包含在 H 中(它们的数目是 $\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q$),且其余的 k - 子空间与 H 交于一个 $(k-1)$ - 子空间.H 中的这 $\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q$ 个 $(k-1)$ - 子空间中每一个包含在 V 的

$$\begin{bmatrix}n-k+1\\1\end{bmatrix}_q=\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}$$

个 k - 子空间中,其中

$$\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix}_q=\frac{q^{n-k}-1}{q-1}$$

个包含在 H 中;而剩下 q^{n-k} 个不包含在 H 中.因此

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q+q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q \qquad ①$$

问题 B 确定指数 e_i(它们可能是 m,n,k,以及 i 的函数),使得下列等式成立

$$\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_q=\sum_{i=0}^{k}q^{e_i}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}m\\k-i\end{bmatrix}_q$$

(解这个问题的一个途径涉及阶梯形,另一个是用①.)

问题 B 的等式是二项式系数的等式

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}q^{e_i}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

的一个 q - 类似.

附录4　超　图[①]

1　对偶超图

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个有限集.关于 X 上的一个超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 X 上一个有限子集簇,使得

$$E_i\neq\varnothing\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{①}$$

$$\bigcup_{i=1}^{m}E_i=X\tag{②}$$

一个超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 若还满足

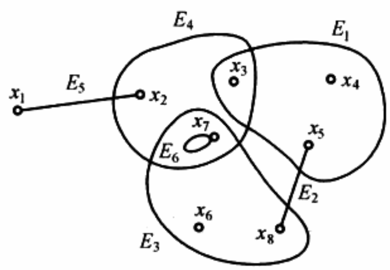
$$E_i\subset E_j\Rightarrow i=j\tag{③}$$

则称 H 为简单超图(或"Sperner 族").

在超图 H 中,X 的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为顶点,集合 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 称为边.简单图是一个每条边均含2个顶点的简单超图;一个多重图(有环和重边)是一个每条边含不超过2个顶点的超图.这里我们不考虑类似于图中孤立点的顶点.

超图 H 可以用图形来表示,即由点的集合表示 X 中的元素.当 $|E_j|=2$ 时,就用一条连续连接 E_j 中两个元素的连续曲线表示 E_j;当 $|E_j|=1$,用一个包含 E_j 中唯一元素的环表示 E_j;当 $|E_j|\geqslant 3$,用一条包含 E_j 中所有元素的简单闭曲线表示 E_j.

一个超图也可以由一个关联矩阵 $A=(a_{ij})$ 来表示,A 中的 m 列分别对应 H 的 m 条边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$,n 行分别对应 H 的 n 个顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.当 $x_i\notin E_j$ 时,$a_{ij}=0$;当 $x_i\in E_j$ 时,$a_{ij}=1$(见图1).



(a)

$$A=\begin{array}{c}\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}E_1&E_2&E_3&E_4&E_5&E_6\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

(b)

图1　超图 H 的表示(a)和它的关系矩阵(b)

X 上超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 的对偶是超图 $H^*=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其中的顶点对应 H 中的边,而边为

$$X_i=\{e_j\mid 在\ H\ 中,x_i\in E_j\}$$

H^* 显然满足条件①和②.

① 选自[法]C.贝尔热著.《超图——有限集的组合学》.卜月华,张克民,译.东南大学出版社,南京,2002.

易见 H^* 的关联矩阵是 H 的关联矩阵的转置，所以有 $(H^*)^* = H$.

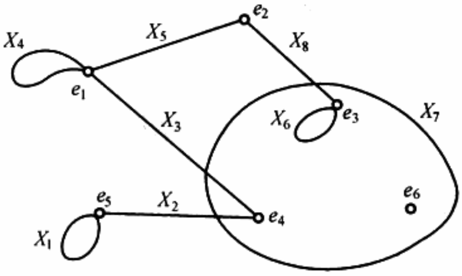


图 2　图 1 中超图的对偶超图

与图类似，超图 H 的顶点数称为 H 的阶，用 $n(H)$ 表示，边数用 $m(H)$ 表示. 此外，$r(H) = \max_j |E_j|$ 称为秩，$s(H) = \min_j |E_j|$ 称为下秩；如果 $r(H) = s(H)$，则称 H 是一致超图；秩为 r 的简单一致超图称为 r^- 一致超图，此时尽管不含"简单"二字，仍被认为是不含重力.

对集合 $J \subset \{1,2,\cdots,m\}$，称

$$H' = (E_j \mid j \in J)$$

为 J 对 H 诱导的部分超图. H' 的顶点集是 X 的一个非空子集.

对集合 $A \subset X$，称

$$H_A = (E_j \cap A \mid 1 \leqslant j \leqslant m, E_j \cap A \neq \varnothing)$$

为 A 对 H 的导出子超图.

性质　H 的子超图的对偶是对偶超图 H^* 的部分超图.

秩为 2 的超图就是熟知的图. 图论中所有概念可推广到超图中，并可获得更强的结果，应用更为广泛. 此外，用超图的语言论证组合问题中的一些结果有时会显得更加简洁，甚至一个较强的结果会比一个较弱的结果更容易证明.

2　度

图论中的其他一些定义，下面可以毫不费力地推广到超图中.

对 $x \in X$，定义以 x 为心的星 $H(x)$ 为 H 中所有含 x 的边所导出的部分超图. x 的度 $d_H(x)$ 是指 $H(x)$ 中的边数，即 $d_H(x) = m(H(x))$.

超图 H 的最大度记为

$$\Delta(H) = \max_{x \in X} d_H(x)$$

所有顶点有相同度的超图称为正则的.

注意到 $\Delta(H) = r(H^*)$，故正则超图的对偶是一致超图.

对 n 阶超图 H，令 $d_H(x_i) = d_i$，并按非 n - 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 来排序所成的度序列，当 H 是简单图时，上述度序列能被刻画(见 Erdös, Gallai[1960], Graphs, 第 6 章，定理 6). 一般地，有下面的性质：

性质 1　一个 n - 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是一个秩为 r 的 n 阶一致超图(允许有重边)的度序列的充要条件是：

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 r 的倍数;

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$;

(3)① $\sum_{i=1}^{n} d_i / r \geqslant d_1$.

证明 对于上述给定的 n - 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$,逐次在顶点集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上构造超图 H 的边.

第一步,对每一顶点 x_i 赋予一个权 $d_i^1 = d_i$.第一条边 E_1 由对应权 d_i^1 中最大的前 r 个顶点组成.

第二步,对每个顶点 x_i 赋权为

$$d_i^2 = \begin{cases} d_i^1 & \text{若 } x_i \notin E_1 \\ d_i^1 - 1 & \text{若 } x_i \in E_1 \end{cases}$$

E_2 由对应权 d_i^2 中最大的前 r 个顶点组成.由(3)知,这过程可一直进行.若 $\sum_{i=1}^{m} d_i = mr$,则可得边为 E_1, $E_2,\cdots,E_m$,且满足 $d_H(x_i) = d_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 的超图 H.

一个超图是连通的,如果它的边所产生的交图是连通的,则有下面的性质 2.

性质 2 (Tusyadej[1978])一个 n - 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是连通的 r^- 一致超图的度序列的充要条件是:

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 r 的倍数;

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \dfrac{r(n-1)}{r-1}$;

(4) $d_1 \leqslant m = \dfrac{\sum d_i}{r}$.

(上述结果可推广到非一致超图,见 Boonyasombat[1984].)

定理 1 (Gale[1957],Ryser[1957])给定 m 个整数 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 和一个 n - 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$,则存在顶点集为 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的超图 H,使得 $d_H(x_i) = d_i (i \leqslant n)$ 和 $|E_j| = r_j (j \leqslant m)$ 的充要条件是:

(1) $\sum_{j=1}^{m} \min\{r_j,k\} \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_k \quad (k < n)$;

(2) $\sum_{j=1}^{m} r_j = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

证明 由网络流理论直接推出这定理(参见 Graphs,第 5 章,定理 2 的推论),为此,构造一个网络:其顶点为 $j = 1,2,\cdots,m$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,发点为 a,收点为 z,它的弧为:

· 所有弧 (a,j) 赋予容量 $r_j (j = 1,2,\cdots,m)$;

· 所以弧 (x_i,z) 赋予容量 $d_i (i = 1,2,\cdots,n)$;

① 原文中没有这一条件,但证明充分性时需这一条件.例如序列 5,3,2,1,1,就不是秩为 3 的一致超图的度序列.

· 所有弧(j,x_i)赋予容量$1(1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant i\leqslant n)$.

于是,只需证明存在一个满足上述容量的整数流,且饱和每一条进入收点z的弧(j,z)即可,即对任意$I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,进入集合$\{x_i\mid i\in I\}$的最大流的流量总是大于或等于$\sum\limits_{i\in I}d_i$.定理中条件(1)、(2)恰保证了这一点.

未解决问题 找一个m-元组(r_j)和n-元组(d_i)分别表示某个简单超图H的$|E_j|$和$d_H(x_i)$的充要条件.

令r,n是整数,$1\leqslant r\leqslant n$,X为n元集合,定义X上一个n阶r^-一致完全超图K_n^r,其边集由X的所有r元子集所组成.下面陈述 Sperner 的定理[1926],其中不等式(1)的简单证明最近由 Yamamoto, Meshalkin, Lubell 和 Bollobas 各自独立给出.

定理 2 (Sperner[1928],证明由 Yamamoto, Meshalkin, Lubell, Bollobas 给出)每一个n阶简单超图H满足

$$\sum_{E\in H}\binom{n}{|E|}^{-1}\leqslant 1 \tag{④}$$

此外,边数$m(H)$满足

$$m(H)\leqslant\binom{n}{[n/2]} \tag{⑤}$$

当$n=2h$为偶数时,⑤中等号成立当且仅当H是K_n^h.当$n=2h+1$时,⑤中等号成立当且仅当H是K_n^h或K_n^{h+1}.

证明 令X是一个n元有限集.构造有向图G:其顶点集为X的所有子集族$\mathscr{P}(x)$,当且仅当$A,B\subset X$,且$|A|=|B|-1$时,从A指向B有一条弧.

对于$E\in H$,在G中从顶点$\varnothing$到顶点E的路的条数是$|E|!$.注意到H是简单超图,当$E',E\in H,E'\neq E$时,过E的路不能再过E'.因此从$\varnothing$到X的路的单数是

$$n!\geqslant\sum_{E\in H}|E|!(n-|E|)!$$

故不等式④成立.

对于⑤式,由于

$$\binom{n}{|E|}\leqslant\binom{n}{[n/2]}$$

因此

$$1\geqslant\sum_{E\in H}\binom{n}{|E|}^{-1}\geqslant m(H)\binom{n}{[n/2]}^{-1}$$

所以⑤式成立.

令H是使⑤中等号成立的超图,则对所有$E\in H$,有

$$\binom{n}{|E|}=\binom{n}{[n/2]} \tag{⑥}$$

若$n=2h$是偶数,⑥式蕴含着H是h^-一致超图,再由于$m(H)=\binom{n}{h}$,故$H=K_n^h$.

若$n=2h+1$,⑥式蕴含着对一切$E\in H,h\leqslant|E|\leqslant h+1$.$G$中顶点集$X_k$表示$H$中基数为$k$的边集,则$X_h\cup X_{h+1}$是$G$中的独立集,且$m(H)=|X_h\cup X_{h+1}|$.

在图G中,X_h的出弧等于$|X_h|(n-h)$条,X_h的象ΓX_h的入弧有$|\Gamma X_h|(h+1)$条,因此有

$$|\Gamma X_h|(h+1) \geqslant |X_h|(n-h)$$

即

$$|\Gamma X_h| \geqslant \frac{2h+1-h}{h+1}|X_h| = |X_h|$$

若 X_h 非空且不等于 $\mathscr{P}_h(X) = \{A \mid A \subset X, |A| = h\}$，由于 h - 子集和 $(h+1)$ - 子集全体在 G 中所导出的二部子图的底图是连通的，故上述不等式是严格的．因而有

$$m(H) = |X_h| + |X_{h+1}| \leqslant |X_h| + |\mathscr{P}_{h+1}(X) - \Gamma X_h| < |X_h| + \binom{n}{h+1} - |X_h| = \binom{n}{h+1}$$

所以 ⑤ 中等式成立仅当 $X_h = \varnothing$ 或 $X_h = \mathscr{P}_h(X)$，即 $H = K_n^h$ 或 $H = K_n^{h+1}$．

关于定理 2 的推广可参见：Erdos[1945]，Kleitman[1968]，Meshalkin[1963]，Kleitman[1965]，Greene，Kleitman[1976]，Katona[1966]，Hochberg，Hirsch[1970]，Erdos，Frankl，Katona[1984]．

为了推广无悬挂点的图，考虑如下一类超图：超图 H 称为可分离的，如果对任一顶点 x，H 中所有含 x 的边的交集是 $\{x\}$，即 $\bigcap_{E \in H(x)} E = \{x\}$．

推论 如果 n - 正整数序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是一个可分离超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_n)$ 的度序列，则

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{m}{d_i}^{-1} \leqslant 1$$

事实上，H 是可分离的当且仅当其对偶 H^* 是简单超图，于是由定理 2 有

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{m}{|X_i|}^{-1} \leqslant 1$$

为了推广简单图，我们称超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是线性的，如果对 $i \neq j$，$|E_i \cap E_j| \leqslant 1$．

下面直接可得：

性质 3 线性超图的对偶也是线性的．

事实上，如果 H 是线性的，则 H^* 中两条边 X_i 和 X_j 的交不含两个不同的顶点 e_1, e_2，否则，在 H 中就有 $\{x_i, x_j\} \subset E_1$，$\{x_i, x_j\} \subset E_2$，这与 $|E_1 \cap E_2| \leqslant 1$ 矛盾．

定理 3 H 是一个 n 阶线性超图，则

$$\sum_{E \in H} \binom{|E|}{2} \leqslant \binom{n}{2} \qquad ⑥$$

如果 H 是 r^- 一致超图，则其边数满足

$$m(H) \leqslant \frac{n(n-1)}{r(r-1)} \qquad ⑦$$

式 ⑦ 中等号成立当且仅当 H 是 Steiner 系 $S(2, r, n)$．

因为 H 是线性的，故含在同一条边中的点对数有

$$\sum_{E \in H} \binom{|E|}{2} \leqslant \binom{n}{2}$$

即 ⑥ 式成立．如果 H 又是 r^- 一致的，则式 ⑦ 成立．

Steiner 系 $S(2, r, n)$ 是 n 元集 X 上满足每一对点恰好含在一条边中的 r^- 一致超图．T.P. Kirkman[1847] 给出：$S(2,3,n)$ 系存在的充要条件是 $n \equiv 1$ 或 $3 \pmod 6$．

为了排除某些 r 的值，考察 $S(2, r, n)$ 系存在的必要条件：

(1)$\binom{n}{2}\binom{r}{2}^{-1}$是整数;

(2)$(n-1)(r-1)^{-1}$是整数.

对 $r=3,4$ 这两个条件是充分和必要的(Hanani).对 $r=6$,除 $S(2,6,21)$ 系不存在外,这些条件是充分的.Wilson[1972]进一步证明,如果 r 是一个素数幂及 n 充分大,则⑥和⑦是充分和必要的.

关于 $S(2,r,n)$ 系的存在性和计数问题可参见 Lindner 和 Rosá[1980],下面给出当 r,n 较小时存在 $S(2,r,n)$ 的表:

S(2,3,7)	
S(2,3,9)	De Pasquale[1899],Brunel[1901],Cole[1913]
S(2,4,13)	De pasquale[1899],Brunel[1901],Cole[1913]
S(2,3,15)	Cole[1917],White[1919],Fischer[1940]
S(2,4,16)	Witt[1938]
S(2,3,19)	Deherder[1976]
S(2,3,21)	Wilson[1974]
S(2,5,21)	Witt[1938]
S(2,3,25)	Wilson[1974]
S(2,4,25)	Brouwer,Rokowska[1977]
S(2,5,25)	McInnes[1977]
S(2,3,27)	McInnes[1977]
S(2,4,28)	Rokowska[1977]

当 $n=7,r=3$ 或 $n=9,r=3$ 等时,可证明定理3中⑦的上界是最好的.

3 交　簇

H 是一个超图,若 H 的边集两两交非空,则称该边集为一个交簇.例如,对 H 的一个顶点 x,星 $H(x)=\{E \mid E\in H,x\in E\}$ 是 H 的一个交簇.用 $\Delta_0(H)$ 表示 H 的交簇中的最大基数,则

$$\Delta_0(H)\geqslant \max_{x\in X}|H(x)|=\Delta(H)$$

在一个多重图中,交簇只能是星和三角形(允许三角形含多重边).

定理4 H 是无重边的 n 阶超图,则

$$\Delta_0(H)\leqslant 2^{n-1}$$

此外,n 元集合的所有子集构成的超图中,交族的最大基数是 2^{n-1}.

证明 令 $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的子集构成的超图的最大交簇.

如果 $B_1\notin\mathscr{A}$,则由 $\mathscr{A}$ 的最大性,存在 $A_1\in\mathscr{A}$ 与 B_1 不相交;因此 $X-B_1\supset A_1$,因而对任给的 $A\in\mathscr{A}$,$(X-B_1)\cap A\neq\varnothing$.再由 $\mathscr{A}$ 的最大性,推出 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$.反之,如果 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$,就有 $B_1\notin\mathscr{A}$.所以

$$B\to X-B$$

是从 $\mathscr{P}(X)-\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的双射,因此

$$|\mathscr{A}|=\frac{1}{2}|\mathscr{P}(X)|=2^{n-1}$$

附录5　关于Sperner性质一个猜想的注记①

朱迎宪　大连理工大学

设P是有限偏序集，f是P上的秩函数，P_m表示P中秩为m的元素集合．若$\max\limits_m |P_m| = \max\{|A|: A$是$P$中的反链$\}$，则称$P$有Sperner性质．设$a_1,\cdots,a_k \in P$，记$F = \bigcup\limits_{i=1}^{k}\{b : a_j \leqslant b, b \in P\}$，称$F$是由$a_1,\cdots,a_k$生成的序滤子．本文我们考虑的偏序集是布尔代数$B^n$，秩函数$f(x) = |x|$．K W LIH提出了下面猜想：

猜想　若F是由B^n中某些具有相同秩t的元素生成的序滤子，则F有Sperner性质．

$t = 1$，猜想成立．但对任一t上述猜想一般不成立．例如$t = 4, n = 7$，F是B^7中秩为4的所有含x_1的子集和任一不含x_1的子集生成的序滤子，A是F_4中所有含x_1的子集和F_5中所有不含x_1的子集组成．显然A是F的反链，$|A| > \max\limits_{4\leqslant i\leqslant 7} |F_i|$，故$F$没有Sperner性质．进一步，我们有：

定理　设$n \geqslant 7$，$\frac{n}{2} < t < n-2$，则存在B^n的一个序滤子F，使得F没有Sperner性质．

证明　设F是B^n中秩为t的所有含x_1的元素和任一不含x_1的元素生成的序滤子，则$|F_i| = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-t-1}{i-t}$ $(i = t,\cdots,n)$．下面我们证$|F_i|$单调减，即证明：

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-t-1}{i+1-t} < \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-t-1}{i-t} \qquad (t \leqslant i \leqslant n-1)$$

在n上用归纳法．$n = 7$，结论显然成立．因为$\binom{n-1}{i} = \binom{n-2}{i} + \binom{n-2}{i-1}$，$\binom{n-t-1}{i+1-t} = \binom{n-t-2}{i+1-t} + \binom{n-t-2}{i-t}$，当$i = n-1$时，$\binom{n-2}{i} + \binom{n-t-2}{i+1-t} = 0 < 1 = \binom{n-2}{i-1} + \binom{n-t-2}{i-t}$，所以由归纳假设

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-t-1}{i+1-t} < \binom{n-2}{i-1} + \binom{n-2}{i-2} + \binom{n-t-2}{i-t} + \binom{n-t-2}{i-t-1} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-t-1}{i-t}$$

现在设A是由F_i中所有含x_1的元素和F_{t+1}中所有不含x_1的元素组成，则A是F的一个反链，且$|A| > |F_i| > \cdots > |F_n|$．定理得证．

参考文献

[1] LIH K W. Sperner Families over a Subset[J], J. Combin. Theory, Ser. 1980, A 29:182-185.

① 原载《数学研究与评论》，1984年．

一道普特南竞赛题的初等解法[①]

舒阳春[②]

我们来看一道2003年普特南数学竞赛中有关积分的试题.它的解是用勒贝格积分来做的.这里我们给的是一个比较初等的证明.

命题 对在[0,1]上的连续函数 $f(x)$ 有

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,dxdy \geqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad ①$$

引理 设对任何实数 $\{x_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$,有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j| \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \qquad ②$$

证明 记

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j|-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \qquad ③$$

设 $s=\min\{|x_j|>0 \mid j=1,2,\cdots,n\}$,我们对 $|x_j|\neq 0$ 且互不相同的个数做递减归纳法.先对 $|x_j|\neq 0$ 至少有两个以上互不相同的情况进行推导.

不失一般性,对于正整数 $a,b,a+b<n$,(a,b 中之一的值可能是零,但不全为零.)设 $x_1=x_2=\cdots=x_a=s$, $x_{a+1}=x_{a+2}=\cdots=x_{a+b}=-s$;当 $i>a+b$ 时,设 $x_i=0$ 或者 $|x_i|\geqslant s$.

考虑函数

$$f(\overbrace{t,t,\cdots,t}^{a},\overbrace{-t,-t,\cdots,-t}^{b},x_{a+b+1},x_{a+b+2},\cdots,x_n)$$

那么这个函数是一 t 的函数.在 s 的附近为线性的.事实上,就是在0到 $m=\min\{|x_j|>0 \mid j>a+b|\}$ 之间的线性函数.因为对 $0\leqslant t<m$,有下式成立

$$1\leqslant i\leqslant a,\quad |x_i+x_j|=\begin{cases}2|t| & 1\leqslant j\leqslant a\\ 0 & a<j\leqslant a+b\\ |t+x_j| & a+b+1<j\leqslant n\end{cases} \qquad ④$$

---

① 本文原载自舒阳春编著《高等数学中的若干问题解析》[M].北京:科学出版社,P139-141.

② 武汉科技大学教师.

$$a+1\leqslant i\leqslant a+b,\quad |x_i+x_j|=\begin{cases}0 & 1\leqslant j\leqslant a\\ 2|t| & a<j\leqslant a+b\\ |-t+x_j| & a+b+1<j\leqslant n\end{cases}$$

$$a+b+1\leqslant i\leqslant n\quad |x_i+x_j|=\begin{cases}|x_i+t| & 1\leqslant j\leqslant a\\ |x_i-t| & a<j\leqslant a+b\\ |x_i+x_j| & a+b+1<j\leqslant n\end{cases} \quad ⑤$$

$$f=\frac{1}{n^2}(2a^2|t|+a\sum_{j=a+b+1}^{n}|t+x_j|+2b^2|t|+b\sum_{j=a+b+1}^{n}|-t+x_j|+a\sum_{i=a+b+1}^{n}|x_i+t|+$$
$$b\sum_{j=a+b+1}^{n}|-t+x_j|+\sum_{i=a+b+1}^{n}\sum_{j=a+b+1}^{n}|x_i+x_j|)-\frac{1}{n}(at+bt\pm\sum_{i=a+b+1}^{n}|x_i|)=$$
$$\frac{1}{n^2}[2a^2t+2(a-b)t\sum_{j=a+b+1}^{n}\mathrm{sgn}x_j+2(a+b)\sum_{j=a+b+1}^{n}|x_j|+2b^2t+$$
$$\sum_{i=a+b+1}^{n}\sum_{j=a+b+1}^{n}|x_i+x_j|]-\frac{1}{n}[at+bt+\sum_{i=a+b+1}^{n}|x_i|] \quad ⑥$$

根据线性函数的性质,它的最小值只能在端点达到.由于 $t=s$ 不是端点,那么端点的值$t=0,m$;在这两种情况的任一情况下,说明 f 的最小值可以通过减少非零的 $|x_j|$ 中的个数或减少 $|x_j|$ 互不相同值的个数来达到,每经过一次最小值都不会是增的.因此最后我们要证明的是当 $|x_j|$ 只取两个值的情况时,f 的最小值大于零.这样下去,我们只需证明下面的情况时结论成立,即可.

设 $x_1=x_2=\cdots=x_a=s,x_{a+1}=x_{a+2}=\cdots=x_{a+b}=-s$,当 $i>a+b$ 时,设$x_i=0$,此时 $f\geqslant 0$.事实上,由下式

$$f=\frac{s}{n^2}[2a^2+b^2+(a+b)(n-a-b)]-\frac{1}{n}(as+bs)=$$
$$\frac{s}{n^2}(a-b)^2\geqslant 0 \quad ⑦$$

证毕.

命题的证明 对在[0,1]上的连续函数 $f(x)$,由引理有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|f(x_i)+f(x_j)|\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)| \quad ⑧$$

其中 $x_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,n$.

考虑在$[0,1]^n$ 多重积分,对变量 x_i 不等式两边进行积分,得到

$$\frac{1}{n^2}(n^2-n)\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2n}{n^2}\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{n}{n}\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x \quad ⑨$$

我们得到

$$\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{n-2}{n-1}\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x \quad ⑩$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

证毕.

分析的证明[①] 设 $A=\{x\mid f(x)\geqslant 0, x\in[0,1]\}$，$B=\{x\mid f(x)<0, x\in[0,1]\}$.

记 $I_A=\int_A f(x)\mathrm{d}x$，$I_B=-\int_B f(x)\mathrm{d}x$，于是 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = I_A+I_B$.

另一方面，易验证

$$\int_A\int_A |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2I_A mA$$

同理

$$\int_B\int_B |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2I_B mB$$

不失一般性，设 $mA\geqslant mB$. 如果 $I_A\geqslant I_B$，那么

$$(mA-mB)(I_A-I_B)\geqslant 0$$

从而

$$mAI_A+mBI_B\geqslant mBI_A+mAI_B$$

故有

$$2mAI_A+2mBI_B\geqslant (mB+mA)(I_A+I_B)=I_A+I_B$$

由此可知命题中的不等式成立.

如果 $I_A<I_B$，那么

$$\int_A\int_B |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_A\int_B -(f(x)+f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = mAI_B-mBI_A$$

又由

$$2I_BmB+mAI_B-mBI_A=(mB+mA)I_B+mB(I_B-I_A)\geqslant I_B$$

$$2mAI_A\geqslant (mA+mB)I_A=I_A$$

从而

$$2I_BmB+mAI_B-mBI_A+2mAI_A\geqslant I_A+I_B$$

即①式成立. 证毕.

① http://www.kalva.demon.co.uk/putnam/putn03.html

关于一道莫斯科数学竞赛试题的背景

刘培杰　　陈学杰[①]

1963年莫斯科数学竞赛中有一试题为:设 a,b,c 为任意正数,求证

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

这个问题实际早在这次竞赛之前60年就已经被人们提出了.

1903年A. M. Nesbitt在《Educ Times》(2)P37 ~ 38中以编号15114号问题首先给出了这一问题,并且这有可能还不是最早的.

1954年,H. S. Shapiro在《美国数学月刊》中提出了这个问题的一般形式,即要证明

$$g_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}\qquad(*)$$

其中 $x_i\geqslant 0,x_i+x_{i+1}>0$(为了避免分母为零).

两年以后H. S. Shapiro和C. R. Phelps分别给出了 $n=3,4$ 和 $n=5$ 时(*)的证明,另外还有一个惊人的结论,那就是M. J. Lighthill成功地证明了当 $n=20$ 时(*)不成立.并在《Math Gaz》(40) P266中详细发表了他的反例.

1958年L. J. Mordell证明了(*)对 $n=3,4,5,6$ 是成立的,而A. Zulauf在Mordell的论文后加了一个注记,在注记中他给出了一个反例,证明(*)对 $n=14$ 是不成立的,并且他注意到下列函数恒等式成立.

$$g_{n+2}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,x_{n-1},x_n)=g_n(x_1,\cdots,x_n)+1$$

可以推知对大于等于14的任意偶数 n,(*)都不成立.

到了1960年,美国的两位数学家M. Herschorn和J. E. L. Peck在《美国数学月刊》(P87 ~ 88)上又给出了 $n=14$ 的另外一个反例.

实际上他们的反例都是同一种类型的.

$$x_{2k}=a_k\varepsilon,\quad x_{2k-1}=1+b_k\varepsilon\quad(k=1,\cdots,m)$$

ε 是充分小的正数,A. Zulauf给出的反例为

$$(a_1,\cdots,a_7)=(7,6,5,2,0,1,4)$$

$$(b_1,\cdots,b_7)=(7,4,1,0,1,4,6)$$

① 哈尔滨市第165中学教师.

我们说这样的反例很有意义,因为它使人们转变了一种观念,即对称函数的极小点本身也应该是对称的.

1982 年 J. C. Lagarlas 在《Notices Amer Math》(P130 ~ 133) 中以《The van der Waerde Conjecture Two Soviet Solutions》介绍了范·德·瓦尔登猜想进展时说:乍一看起来,根据对于小的 n 值,范·德·瓦尔登猜想成立,以及根据对称函数的极小点本身也似乎是对称的这种简单的推测,似乎认为范·德·瓦尔登猜想成立也是合理的,对于 H. S. Shapiro 在 1954 年提出的一个问题,它的答案使大家对这种推理发生了某些怀疑.

在 1963 年 P. H. Diananda 证明了 $n = 27$ 时(*)不成立后,不确定的情形只剩下 $n = 11,12,13,15,17,19,21,23,25$.

由此可见,这是一道背景深刻的试题.特别是它帮我们摆脱了对称函数有对称解的观念,这种貌似正确的观念常常干扰我们的判断.例如有人曾证明过这样一个"定理":

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m)$ 是 m 元对称多项式,且 f 的各单项式关于每个 x 的次数都是 1,则方程组(其中 $n \geqslant m$)

$$\begin{cases}f(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m) = 0\\ f(x_2,x_3,\cdots,x_m,x_{m+1}) = 0\\ \vdots\\ f(x_m,x_1,\cdots,x_{m-2},x_{m-1}) = 0\end{cases}$$

当 $m \mid n$ 时有无穷多组解;当 $m \nmid n$ 时其解 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 满足条件 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

这个结论从直觉上是正确的,其实不然,有反例如下:

在正数范围内,方程组

$$\begin{cases}3x_1x_2x_3x_4 = 2(x_1+x_2+x_3+x_4)\\ 3x_2x_3x_4x_5 = 2(x_2+x_3+x_4+x_5)\\ \vdots\\ 3x_6x_1x_2x_3 = 2(x_6+x_1+x_2+x_3)\end{cases}$$

有一组解为 $(1,2,1,2,1,2)$ 并不满足 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$.

注:为了更深入的理解此问题,我们特附两篇文章供读者参考,也向两位作者表示感谢.

附录 1　对一个循环不等式猜测的否定

陈　躬[①]

提出如下猜测：

求证，对任何正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均满足不等式

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}>\frac{n-1}{2} \tag{①}$$

下面借用赵汉宾先生的结论给出 ① 的否定判断.

设

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2} \tag{②}$$

取 $\varepsilon=0.000\,01$, $x_1=1+7\varepsilon$, $x_2=7\varepsilon$, $x_3=1+4\varepsilon$, $x_4=6\varepsilon$, $x_5=1+5\varepsilon$, $x_6=\varepsilon$, $x_7=1+2\varepsilon$, $x_8=\varepsilon$, $x_9=1$, $x_{10}=\varepsilon$, $x_{11}=1+\varepsilon$, $x_{12}=4\varepsilon$, $x_{13}=1+4\varepsilon$, $x_{14}=6\varepsilon$，则 $F_{14}(x_1,x_2,\cdots,x_{14})\leqslant 6.999\,983$，这里赵汉宾先生证明 $n=14$ 时 ② 不成立的结论.

现在我们证明 ① 不成立：取 $\varepsilon, x_1, x_2, \cdots, x_{14}$ 同上，并取 $x_{14k+i}=x_i(k\in\mathbf{N}, 1\leqslant i\leqslant 14)$，那么 $F_{14k}(x_1,x_2,\cdots,x_{14k})$ 的循环节为 $F_{14}(x_1,\cdots,x_{14})$，即

$$F_{14k}(x_1,x_2,\cdots,x_{14k})=k\cdot F_{14}(x_1,\cdots,x_{14})$$

取 $k=10^5$ 时有

$$F_{1\,400\,000}(x_1,\cdots,x_{1\,400\,000})=100\,000\cdot F_{14}(x_1,\cdots,x_{14})\leqslant 10^5\times 6.999\,983=7\times 10^5-1.7$$

$$\frac{14\times 10^5-1}{2}=7\times 10^5-0.5$$

$$F_{1\,400\,000}(x_1,\cdots,x_{1\,400\,000})-\frac{14\times 10^5-1}{2}\leqslant 7\times 10^5-1.7-(7\times 10^5-0.5)=-1.2<0$$

所以

$$F_{1\,400\,000}(x_1,\cdots,x_{1\,400\,000})<\frac{14\times 10^5-1}{2}$$

故 ① 不成立.

---

① 四川煤五处子弟中学(631535)

附录2 MATHEMATICAL NOTES

Edited By Roy DUBISCH, Fresno State College

Material for this department should be sent to Roy Dubisch, Department of Mathematics, Fresno State College, Fresno 26, California.

EXTENSIONS OF AN INEQUALITY OF H. S. SHAPIRO

P. H. DIANANDA, University of Malaya

H. S. Shapiro's inequality is

$$\sum \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2} \qquad ①$$

where (and throughout this note) $x_{n+j}=x_j>0$ for all j, i is the summation suffix, and i runs over 1 to n unless otherwise indicated. This has been proved true for $n=3,4,5$ and false for $n=20$. It is also trivially true for $n=1,2$. I extend it to

$$\sum \frac{x_i}{x_{i+1}+\cdots+x_{i+m}} \geqslant \frac{n}{m} \qquad ②$$

where now each denominator on the left consists of m terms, and prove the following results.

THEOREM 1. *The inequality ② is true if*

$$\sin\frac{\gamma\pi}{n} \geqslant \sin(2m+1)\frac{\gamma\pi}{n}\left(r=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right) \qquad ③$$

THEOREM 2. *The inequality ② is true if*

$$n \mid m+2 \text{ or } 2m \text{ or } 2m+1 \text{ or } 2m+2. \qquad ④$$

It follows easily from Theorem 2 that Shapiro's inequality ① is true for $n\leqslant 6$.

I first prove Theorem 1. The left hand side of ② is the weighted sum of $1/(x_{i+1}+\cdots+x_{i+m})(i=1,\cdots,n)$ with weights $x_1,\cdots,x_n$ respectively. Thus since a weighted arithmetic mean is not less than the corresponding weighted harmonic mean we have

$$\sum \frac{x_i}{x_{i+1}+\cdots+x_{i+m}} \geqslant \frac{(\sum x_i)^2}{\sum\{x_i(x_{i+1}+\cdots+x_{i+m})\}} \qquad ⑤$$

Hence Theorem 1 follows from

LEMMA 1. *If ③ is true*

$$(\sum x_i)^2 \geqslant \frac{n}{m}\sum\{x_i(x_{i+1}+\cdots+x_{i+m})\} \qquad ⑥$$

Proof. The inequality ⑥ holds if and only if the matrix of the quadratic form

$$(\sum x_i)^2-\frac{n}{m}\sum\{x_i(x_{i+1}+\cdots+x_{i+m})\}$$

is positive definite or semidefinite. This matrix is clearly a circulant. Its first row can be obtained by writing down a row of n ones and subtracting, in succession, $n/2m$ from the elements (possibly modified by previous subtraction) in positions $2,\cdots,m+1;n-m+1,\cdots,n \pmod n$. Now this matrix is positive definite or semidefinite if and only if all its characteristic roots are nonnegative. Since the matrix is a circulant, it is seen

that these roots are $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ where

$$\lambda_r = \sum_1^n \omega_r^i - \frac{n}{2m}\sum_1^m (\omega_r^i +_r^{-i}) \qquad (r = 1, \cdots, n)$$

with $\omega_r = \exp(2r\pi i/n)$. Clearly $\lambda_n = 0$. For $r < n$

$$\lambda_r = -\frac{n}{2m}\left\{\frac{\omega_r^{m+1} - \omega_r}{\omega_r - 1} + \frac{\omega_r^{-m-1} - \omega_r^{-1}}{\omega_r^{-1} - 1}\right\} = \frac{n}{2m} \cdot \frac{\sin\frac{r\pi}{n} - \sin(2m+1)\frac{r\pi}{n}}{\sin\frac{r\pi}{n}}$$

after some simplification. It is seen that $\lambda_{n-r} = \lambda_r$. Hence $\lambda_r \geqslant 0$, for all relevant r, if and only if ③ is true. The proof of the lemma is now complete.

Theorem 2 now follows from Theorem 1 by virtue of:

LEMMA 2. *If ④ is true, ③ is true.*

Proof. It is seen that ③ is equivalent to

$$\sin\frac{r\pi}{n} \geqslant \left\{\begin{array}{ll} -\sin\frac{3r\pi}{n} & (\text{if } n \mid m+2) \\ \pm\sin\frac{r\pi}{n} & (\text{if } n \mid 2m \text{ or } 2m+2) \\ 0 & (\text{if } n \mid 2m+1) \end{array}\right\} \qquad \left(r = 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

The lemma clearly follows if we note that the first of these inequalities is equivalent to

$$\sin\frac{2r\pi}{n}\cos\frac{r\pi}{n} \geqslant 0$$

Remark 1. It is easily shown that ③ is false if $n > 2m + 2$. That ③ is not (for all m) necessary for the truth of ② follows since, if $m = 1$, ② is true for all n.

Remark 2. In ③ the range for r can be reduced to $1, \cdots, [n/2] - 1$, the inequality corresponding to $r = [n/2]$ being always satisfied.

The proof of Theorem 1 can be modified to prove.

THEOREM 3. *The inequality*

$$\sum \frac{a_1 x_{i+1} + \cdots + a_n x_{i+n}}{b_1 x_{i+1} + \cdots + b_n x_{i+n}} \geqslant \frac{n\sum a_i}{\sum b_i} \qquad ⑦$$

where the numerators and denominators are all positive, is true if

$$\left(\sum a_i \omega_r^i\right)\left(\sum b_i \omega_r^{-i}\right) + \left(\sum a_i \omega_r^{-i}\right)\left(\sum b_i \omega_r^i\right) \leqslant 0 \qquad \left(r = 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

where $\omega_r = \exp(2r\pi i/n)$.

This extends Theorem 1, ⑦ being an extension of ② and of Shapiro's inequality①.

I am indebted to Dr. U. C. Guha and to Prof. A Oppenheim for valuable discussions on these inequalities.

从一道伊朗数学奥林匹克试题的解法谈卡拉西奥多里定理

刘培杰

1 一道试题

第22届伊朗数学奥林匹克(2004 ~ 2005)中的第3题为:

试题 设A、B是平面上的有限点集,对于$A\cup B$中的任意四个不同的点,存在一条直线,可以把这四个点中分别属于点集A和点集B的点分开.证明:存在一条真线,可以把点集A和点集B分开.

定义conv(X)为X的凸包:

如果$\mathrm{conv}(A)\cap\mathrm{conv}(B)=0$,由分离定律,存在一条直线可以把点集$A$和点集$B$分开.

假设$\mathrm{conv}(A)\cap\mathrm{conv}(B)$不空,设

$$x\in\mathrm{conv}(A)\cap\mathrm{conv}(B)$$

由喀拉氏(Caratheodory)定理知,存在点$a_1,a_2,a_3\in A$和点$b_1,b_2,b_3\in B$,使得

$$x\in\triangle a_1a_2a_3\cap\triangle b_1b_2b_3$$

如果$\triangle a_1a_2a_3$和$\triangle b_1b_2b_3$的边没有相交,则其中一个三角形将在另外一个三角形内部,举例来说,$\triangle a_1a_2a_3$在$\triangle b_1b_2b_3$内部.

这样b_1,b_2,b_3,a_1就不能被一条直线分开,所以只能相交.

不妨设a_1a_2和b_1b_2相交于点y.假设一条直线能够分开a_1,a_1,b_1,b_2.

如果y在属于B这半平面,就不能在线段a_1a_2上,所以y不在B这半平面.

同理,y不在A这半平面.

因此,y不在任何一个半平面.矛盾.

在解答中提到的喀拉氏即为希腊著名数学家卡拉西奥多里.

2 卡拉西奥多里

卡拉西奥多里(Caratheodory.Constantin, 1873—1950)是希腊数学家,生于柏林,卒于

慕尼黑,原籍希腊.1902年到格丁根学习,两年后获博士学位,1924年任慕尼黑大学教授.著作有《实变函数论》于1918年出版,1957年被译成中文出版,在这本书中他发展了实变函数论的体系;第二本著作为《变分法与一阶偏微分方程》于1935年出版,在此书中他推进了拉格郎日对有关问题的解法.本文中将要介绍的定理是他的第三本著作中的一个定理.第三本著作为《函数论》(1950年).在这本著作中他对保角表示、边界对应、点集测度等理论进行了论述,在从事研究工作的同时他还多年担任德国著名数学刊物《数学年刊》的编辑工作.

值得一提的是卡拉西奥多里经历非常丰富,并不局限为一名纯数学家.

1875年,他就随父到比利时.1891 ~ 1895年在比利时军事学校学习.毕业后被英国政府聘为艾斯尤特水坝助理工程师.1920年被希腊政府召回士麦那筹建大学.1922年士麦那被土耳其人焚毁,他领导将图书馆移至雅典,并在雅典大学任教.1924年应邀到慕尼黑大学接替 C.L.F.Von 林德曼(证明 π 为超越数)任教授.

他对热力学公理化和狭义相对论也有贡献.他的全部论文被收入到5卷的《数学全集》(1954 ~ 1957)中.

3　凸集的概念及推广

对于这个试题我们的感觉是它看起来十分显然.用各种我们想得到的点集去试验,都屡试不爽.那么为什么还要给出这样严格的证明呢?

这是因为在这一领域中,许多看起来显然正确的结论其实并不完全正确,细细想来还是有反例的.

平面几何中凸集的概念可以推广到线性空间中,我们共给出这些概念:

凸性和绝对凸性:设 E 是线性空间的一个子集,那么:

(i)E 称为凸集,当且仅当由 $x,y\in E,\lambda+\mu=1,\lambda\geqslant 0,\mu\geqslant 0$ 可推出 $\lambda x+\mu y\in E$.

(ii)E 称为平衡集,当且仅当由 $x\in E,|\lambda|\leqslant 1$,可推出 $\lambda x\in E$.

(iii)E 称为绝对凸集,当且仅当由 $x,y\in E,|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$,可推出 $\lambda x+\mu y\in E$.

我们引进一个均衡的概念,设 A 是集.若对 $\forall t\in\mathbf{R}.(|t|\leqslant 1)$ 都有 $tA\subset A$,则称 A 是均衡的.设 A 是平面内以(0,0)为中心且四边分别平行于坐标轴的长方形(非正方形),则 A 作为实空间 $\mathbf{R}^2$ 的子集,它是均衡的,但 A 作为复平面的子集,它就不再是均衡的了,这是因为 A 并不包含于A 中.

我们提一个貌似正确的结论你能判断吗?存在某个线性空间中的集,它的均衡包的凸包等于它的凸包的均衡包吗?

在线性空间中,一个集的均衡包的凸包不一定等于它的凸包的均衡包.例如,设

$$S=\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2,x+y=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$

则 S 是凸集，故 S 的凸包就是它本身，而 S 的均衡包为

$$\{(x,y) \mid x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ 或 } x+y \geqslant -1, x \leqslant 0, y \leqslant 0\}$$

显然，它不是凸集. 另一方面，由于 S 的均衡的凸包一定是凸集，故二者并不相等.

我们再给出两个例子：

(1) 存在某个线性空间中的非凸集 A，适合

$$A + A = 2A$$

在凸集中显然有 $A + A = 2A$，但反过来不一定对，即等式 $A + A = 2A$ 并不蕴涵A 是凸集. 例如，设

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \setminus \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2, 0 < x \leqslant 1, y = 0\}$$

易见，$A + A = 2A$，但 A 不是凸集.

(2) 容易证明，在线性映射下，凸集的像仍是凸集，然而一个集合在某一线性映射下的像集是凸集，这个集不必是凸集. 例如对 $x = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots) \in l$，令 $T_x = (\zeta_2, \zeta_3, \cdots)$，则 T 是一个由 l 到 l 的线性映射. 设

$$A = \{(0, \zeta_1, \zeta_2, \cdots) \Big| \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| \leqslant 1\} \cup \{(2,0,0,\cdots)\}$$

则 A 为 l 中的一个非凸子集. 而

$$T(A) = \{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| \leqslant 1\}$$

它是 l 中的一个凸集.

4　凸分析及其起源

在这个问题的解答中，有这样几个概念和定理是中国师生所不熟悉的，所以下面进行导读，并介绍相应的背景知识.

首先需要指出的是，这个问题在数学中属于凸分析这一分支，凸分析(Convex analysis) 是研究凸集和凸函数的数学分支，其主要目的在于利用集合和函数的凸性来处理各种分析问题，特别是极值问题，包括有限维的数学规划问题和无限维的变分学问题. 其主要工具是凸集分离定理、次微分定理和对偶定理.

凸集的概念可以追溯到公元前3世纪的古希腊时代. 当时，阿基米德(Avchimedes)已定义凸弧为所有连结其上的点的弦都在同一边的平面曲线. 但是系统研究凸集理论是以19 世纪末 20 世纪初，德国数学家闵可夫斯基(Minkowski.H) 的工作为标志的. 闵可夫斯基对凸集的研究兴趣起源于他对“数的几何” 问题(例如，一个平面点集中至少有多少个坐标为整数的点) 的研究. 因此，他提出了用来刻画一个点到一个凸集距离 —— 今天称为闵可夫斯基函数的概念. 它尤其包括范数、半范数等凸函数作为特例. 在他去世后的1911 年发表的著作中，他对 $\mathbf{R}^3$ 中的闭凸集证明了凸集支撑定理. 以后，卡拉西奥多里(Cavatheodory.C) 等又进一步对凸集理论深入研究. 其代表性结论是 1911 年提出的有限

维凸集的表示定理,即本文要介绍的卡拉西奥多里定理.该定理断言:n 维空间中的凸集中的每一点都可用该集合的不超过 $n+1$ 个点的凸组合来表示.事实上闵可夫斯基在对凸多面体时有一个精确化的定理:

闵可夫斯基定理 有限维紧凸集(尤其是凸多面体)的表示定理几维紧凸集中的每一点都可用不超过 $n+1$ 个端点的凸组合来表示.

我们先来定义什么是凸集的端点,先看最简单的平面凸集情形:

平面的闭凸集上有一些点,它们不再能表示成这集合上其他点的凸组合;换句话,它们不是这集合上任何线段的内点.例如凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A,B,C,D 就是这样的点;又如单位圆盘 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 中圆周 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的点也是这样.为了把这种点与凸集上的其他点区别开来,我们引入如下定义:

设 x 是一个线性空间,E 是其中一子集.我们说 $x\in E$ 是 E 的一个端点,是指不存在 $y,z\in E$,使 $\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=x$,$E$ 的端点的全体叫做 E 的端点集,记作 $D(E)$.现在我们可以用数学归纳法来证明闵可夫斯基定理了.当 $n=1$ 时,紧凸集 E 是闭区间 $[a,b]$,端点集 $D(E)=\{a,b\}$,命题显然成立.

假设对于 $n<p$ 时,闵可夫斯基定理成立.

现对 $n=p$ 时证明这个结论:

分别考察 $x_0\in E$ 是边界点和内点两种情形.

(i) 设 $x_0\in D(E)$,则由 Ascoli 定理(设 E 和 F 是两个不相交的闭凸集,其中 E 还是列紧的,那么 E 和 F 可以用一个闭超平面严格分离)存在着 E 的一个承托超平面 H,使 $x\in H\cap E$.而 $H\cap E$ 至多是 $p-1$ 维的,这便化归到归纳法的假设.

(ii) 再设 x_0 是 E 的内点,我们任意选择一个 $y\in D(E)$—— 如果 $D(E)$ 是非空的话 —— 联结线段 $[y,x_0]$ 并延长之使交 E 的边界于 z,即 $x_0\in[y,z]$.对 z 应用前述结论即得 x_0 可表为 $D(E)$ 中至多 $p+1$ 个点的凸组合.

于是问题化归为证明 $D(E)$ 是非空的,这也可以用归纳法证明.当 $n=1$ 时,显然 $D(E)$ 非空.设 $n<p$ 时已知 $D(E)\neq\Phi$,考察 $n=p$ 的情形.设 H 是 E 的一个承担超平面,则 $H\cap E$ 是一个至多为 $p-1$ 维的紧凸集.由归纳法假设,$H\cap E$ 有一个端点 y_0,我们要证明 y_0 还是 E 的端点,如若不然,必有 $y_1,y_2\in E$,使 $y_0=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$,但因 y_0 是 $H\cap E$ 的端点,所以线段 $[y_1,y_2]$ 不能包含在 $H\cap E$ 上,于是 H 分离 y_1 与 y_2;然而 H 是 E 的一个承担超平面,必使 E 在 H 的一侧,这与 y_1 与 y_2 位于 H 的异侧矛盾,归纳法的证明完成.

凸性和凹 也可以以另一种方式推广到多元情形

定义 设 f 为 $\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ 的连续函数.若对于每一个 $r>0$,f 在球面 $S_r(x_0)=\{x\mid \|x-x_0\|=r\}$ 上的平均值总是小于或等于 $f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处上调和(Superharmonic),若 f 在 $\mathbf{R}^k$ 中每一点上调和,则称 f 为调和.

记 $Ax_0(f)$ 为 f 在球面上的平均值，比较 $f(x_0)$ 和 $Ax_0(f)$，我们可以定义函数 f 在 x_0 处的上调和(Superharmonic)，调和(harmonic)和下调和(Subharmonic). 当 $f(x_0)\leqslant Ax_0(f)$ 时称为上调和，调和和下调和之定义是完全类似的，这些定义与凸性和凹性之定义是完全相似的，因为在一维情况下，球面就成了两点，上调和和凹性是一致的.

凸性和凹性可以用下面的方法推广到 n 元.

定义 对 E_k 中任意两点 $x=(x_1,\cdots,x_k)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_k)$. 定义 $\gamma x+(1-\gamma)x$ 为通过 x,y 的直线上的点. 其坐标为 $\gamma x_i+(1-\gamma)y_i$. $i=1,\cdots,k$.

(ⅰ) E_k 中集合 S 称为凸的(Conver)，若对任意点 $x,y\in S$，$\gamma x+(1-\gamma)y$，$0<\gamma<1$，也在 S 中，几何上，这意味着连接 S 中任意两点的线段仍在 S 中.

(ⅱ) 定义在 E_k 中一个开凸集上的实函数 ϕ 称为凸的，若在

$$\phi[\gamma x+(1-\gamma)y]\leqslant\gamma\phi(x)+(1-\gamma)\phi(y)$$

成立.

若上述不等式对一切 x 和 y 都是严格成立的，则称严格凸的.

进一步还可以定义所谓的凸组合.

设 ϕ_j 是定义于区间 $I_j(j=1,\cdots,k)$ 上的凸函数，则以任意函数 $a_1,\cdots,a_k$

$$\phi(x)=\sum a_j\phi_j(x_j)$$

是定义于边为 $I_1,\cdots,I_k$ 的 k 维矩形上的凸函数；只要 $\phi_1,\cdots,\phi_k$ 都是严格凸的，ϕ 就是严格凸的.

关于多元函数"凸"，"凹"性的判断，1960 年 Helms 得到如下定理

定理 设 $f:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ 为二次可微的，则 f 在 $\mathbf{R}^k$ 中为上调和的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x)\leqslant 0,\quad x\in\mathbf{R}^k \qquad ①$$

若①中不等号变成等号，它就变成 f 的调和函数的条件，若不等号反向，就成为下调和函数的条件.

例如 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{k}x_i^p$，$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x)=\sum_{i=1}^{k}p(p-1)x_i^{p-2}$，当 $p\geqslant 1,x_i>0$ 或 $p\geqslant 2$ 为偶数时，$f(x)$ 是下调和函数.

参考文献

[1] 克里洛夫 A A，格维沙尼 A л. 泛函分析理论 · 习题 · 解答[M]. 陈广荣，等译. 沈阳：辽宁大学出版社，1987.

[2] DIMITRI P. BERTSEKAS. Convex Analysis and Optimization[M]. 北京：清华大学出版社，2006.

[3] 汪林. 泛函分析中的反例[M]. 北京：高等教育出版社，1994.

[4] 关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分数入门[M]. 上海：上海科学技术出版社，1979.

五朵“金花”如何排队

邓寿才

1

1978 年陕西省中学数学竞赛决赛附加题是：

题(Fermat) 设 $\triangle ABC$ 的内角均小于 $120°$，P 为其内部一点，且满足 $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$，$M$ 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，求证

$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC \tag{①}$$

其实，许多数奥书籍上都有此名题，且满足题设条件的特殊点 P，在趣味几何学上，人们通常称之为费马(Fermat)点. 一方面，由于此题是一道非常美妙的趣味几何题，因此人们均用几何方法证明它. 早在 1989 年秋，笔者就得到了它的三种非几何证法(不添辅助线)，以《旧题新解》成文发表在 1989 年《中等数学》第 4 期上.

一看便知，① 式是一个外观简洁优美的线性几何不等式. 如果我们设关于 M 点的线性函数为 $f(M) = MA + MB + MC$，那么 ① 式可表示为

$$f(M) \geqslant f(P) \tag{②}$$

它的含义是说：当且仅当 $M \equiv P$ 时(重合)，函数 $f(M)$ 取到最小值 $f(P)$，即

$$f(M) \geqslant f(M)_{\min} = f(P)$$

如果我们再设 $\triangle ABC$(内角均小于 $120°$) 的外心为 O，内心为 I，垂心为 H，重心为 G，那么从 ② 式知

$$f(O), f(I), f(H), f(G) \geqslant f(P) \tag{③}$$

因此，③ 式告诉我们：$f(O), f(I), f(H), f(G), f(P)$ 这五个特殊值(五朵“金花”) 中 $f(P)$ 当然是最小的“幺妹”. 但是，其余的四“姐妹”，又应怎样分大小排队呢？谁又是“大姐” 呢？

为此，我们努力吧！

2

结论 1

$$IA + IB + IC \leqslant HA + HB + HC \tag{④}$$

证明 首先,我们易得到

$$HA = b\cos A/\cos(90° - B) = 2R\cos A$$

同理可得:$HB = 2R\cos B$,$HC = 2R\cos C$.于是

$$\sum HA = 2R\sum\cos A \qquad ⑤$$

其次,易得

$$\begin{cases}\sum IA = r\sum\csc\frac{A}{2}\\ r = 4R\prod\sin\frac{A}{2}\end{cases}\Rightarrow\sum IA = 4R\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sum IA \leqslant \sum HA\Leftrightarrow 2\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\sum\cos A\Leftrightarrow \qquad ⑥$$

$$2\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\sum(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})\Leftrightarrow 2\sum\sin^2\frac{A}{2} +$$

$$2\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 3\Leftrightarrow\sum\sin^2\frac{A}{2} + (\sum\sin\frac{A}{2})^2\leqslant 3$$

设

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})\\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow⑥\Leftrightarrow\sum\sin^2\alpha + (\sum\sin\alpha)^2\leqslant 3 \qquad ⑦$$

设

$$\begin{cases}M = \sum\sin\alpha = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\\ N = \sum\sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\end{cases}$$

且 $\gamma = \min(\alpha,\beta,\gamma)\in[0,\frac{\pi}{6}]$,有

$$M = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin\gamma = 2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2})\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin\gamma$$

$$N = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) + \sin^2\gamma$$

我们固定 γ,有

$$M^2 + N = 1 + 2\sin^2\gamma + 4\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2})\cos\frac{\alpha - \beta}{2} +$$

$$4\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2})\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin\gamma\cos(\alpha - \beta) =$$

$$1 + 2\sin^2\gamma + 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) +$$

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\gamma - 2\sin\gamma\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$1 + 2\sin^2\gamma + \sin\gamma + 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma\cdot\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) +$$

$$\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)-2\sin\gamma\right]\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$1+2\sin^2\gamma+\sin\gamma+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot$$

$$\sin\gamma\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2(1-2\sin\gamma)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\leqslant$$

$$1+2\sin^2\gamma+\sin\gamma+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma+2(1-2\sin\gamma)=$$

$$3+2\sin^2\gamma-3\sin\gamma+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma \qquad ⑧$$

令

$$\left.\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2} \\ \gamma\in[0,\frac{\pi}{6}] \end{array}\right\}\Rightarrow t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow M^2+N=3+2\cos^2 2t-3\cos 2t+4\sin t\cos 2t=$$

$$3+(2\cos 2t-3+4\sin t)\cos 2t=3+(-4\sin^2 t+4\sin t-1)\cos 2t=$$

$$3-(2\sin t-1)^2\cos 2t\leqslant 3\Rightarrow M^2+N\leqslant 3 \qquad ⑨$$

即⑨式成立,从而④式成立.等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\beta,\cos 2t=0 \\ \text{或 } 2\sin t-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \alpha=\beta,t=\frac{\pi}{4} \\ \text{或 } t=\frac{\pi}{6} \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A=B=C=\frac{\pi}{3} \\ \text{或 } A=B=\frac{\pi}{2},C=0 \end{array}\right.$$

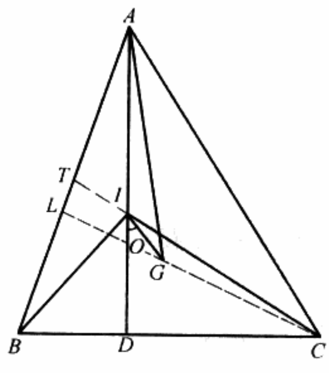
即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

3

结论 2

$$IA+IB+IC\leqslant GA+GB+GC \qquad ⑩$$

⑩式与④式极其相似,恰似一对"双胞胎".



证明 记 BC,CA,AB 依次为 a,b,c. 不失一般性,设 $a\geqslant b\geqslant c$,我们先证明 $G\in\triangle BIC$.

(i) 先证 $G\notin\triangle AIB$,否则,若

$$\left.\begin{array}{l} G\in\triangle AIB,S_{\triangle ABG}<S_{\triangle AIB} \\ \frac{S_{\triangle AIB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{cr}{(a+b+c)r}\leqslant\frac{1}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow S_{\triangle AIB}\leqslant$$

$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABG}$,矛盾.

(ⅱ)再证 $G\notin\triangle AIC$,否则,设 $G\in\triangle AIC(CI\cap AB=T, CG\cap AB=L)\Rightarrow AT>AL$

$$\text{但}\left.\begin{aligned}&AT/BT=b/a\leqslant 1\\&AL=BL\end{aligned}\right\}\Rightarrow AT\leqslant\frac{1}{2}AB=AL,\text{矛盾}.$$

(ⅲ)综合(ⅰ)和(ⅱ)知 $G\in\triangle BIC$(即 G 落在 $\triangle BIC$ 内部或边界上),且可证 G 在 AI 右侧.

设 $\angle AIG=180°-\theta\Rightarrow 0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}(C+A)\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&AG\geqslant AI+GI\cos\theta\\&BG\geqslant BI+GI\cos\left(90°+\frac{C}{2}-\theta\right)\\&CG\geqslant CI-GI\cos\left(\frac{A+C}{2}-\theta\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow GA+GB+GC-(IA+IB+IC)\geqslant$$

$$GI\left[\cos\theta+\cos\left(90°+\frac{C}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{A+C}{2}-\theta\right)\right]=$$

$$GI\left[\cos\theta-2\sin\frac{B+C}{4}\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\right] \tag{11}$$

由

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4}(B+C)\leqslant 30°\\&\theta\leqslant\theta+\frac{B-C}{4}<90°\end{aligned}\right\}\Rightarrow\cos\theta-2\sin\frac{B+C}{4}\cdot\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\geqslant$$

$$\cos\theta-\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\geqslant 0\Rightarrow GA+GB+CG\geqslant IA+IB+IC$$

即⑩式成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

4

④、⑩两式可综合归纳为

$$IA+IB+IC\leqslant\begin{cases}HA+HB+HC\\GA+GB+GC\end{cases} \tag{12}$$

为了让五朵"金花"按大小次序排队,我们希望比较 $\sum HA$ 与 $\sum GA$ 谁大谁小.由于

$$\sum HA=2R\sum\cos A$$

$$4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2=b^2+c^2+2bc\cos A=(b-c)^2+2bc(1+\cos A)\geqslant$$

$$2bc(1+\cos A)=4bc\cos^2\frac{A}{2}\Rightarrow m_a\geqslant\left(bc\cos^2\frac{A}{2}\right)^{1/2}=$$

$$2R\left(\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}\right)^{1/2}=2R\left(\prod\sin A\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin A}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$2R(\prod\sin A)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cot\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow GA=\frac{2}{3}m_a\geqslant$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}R(\prod\sin A)^{\frac{1}{2}}(\cot\frac{A}{2})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\sum GA\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{2}R(\prod\sin A)^{\frac{1}{2}}\sum\sqrt{\cot\frac{A}{2}}$$

因此,欲能证明三角形不等式

$$(2\prod\sin A)^{\frac{1}{2}}(\sum\sqrt{\cot\frac{A}{2}})\geqslant 3\sum\cos A \tag{13}$$

成立的话,就能推导出结论

$$GA+GB+GC\geqslant HA+HB+HC \tag{14}$$

但这个不等式太复杂,成立与否,有待大家证实.不过,我们建立了比 ⑭ 式稍弱一点的

结论 3

$$HA+HB+HC\leqslant\sqrt{3(GA^2+GB^2+GC^2)} \tag{15}$$

证明

$$3\sum GA^2=3\sum\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=\frac{4}{3}\sum m_a^2=\frac{4}{3}\sum\frac{1}{4}[2(b^2+c^2)-a^2]=\sum a^2\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}3\sum GA^2=(2R)^2\sum\sin^2 A\\(\sum HA)^2=(2R\sum\cos A)^2\end{pmatrix}\Rightarrow⑮\Leftrightarrow\sum\sin^2 A\geqslant(\sum\cos A)^2\Leftrightarrow \tag{16}$$

$$\sum\cos^2 A+(\sum\cos A)^2\leqslant 3\Leftrightarrow\sum\sin^2(\frac{\pi}{2}-A)+\left[\sum\sin(\frac{\pi}{2}-A)\right]^2\leqslant 3 \tag{17}$$

令

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{\pi}{2}-A,\frac{\pi}{2}-B,\frac{\pi}{2}-C)\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow⑰\Leftrightarrow$$

$$\sum\sin^2\alpha+(\sum\sin\alpha)^2\leqslant 3 \tag{18}$$

从 ⑩ 式的证明法过程可知,⑱ 式成立,从而 ⑮ 式成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

5

我们还有:

结论 4

$$\sqrt{3(GA^2+GB^2+GC^2)}\leqslant OA+OB+OC \tag{19}$$

证明 由于 $OA=OB=OC=R$,则

$$2\sum\sin^2 A=\sum(1-\cos 2A)=3-\sum\cos 2A=3-(\cos 2A+\cos 2B)-\cos 2C=$$

$$3-2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos^2 C+1=$$
$$4-2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos^2(A+B)=$$
$$4-2\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=4+4\cos A\cos B\cos C$$

当 $\triangle ABC$ 为非锐角三角形时,有

$$\sum\sin^2 A\leqslant 2$$

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,有

$$\sum\sin^2 A=2+\cos C[\cos(A-B)-\cos C]\leqslant 2+\cos C(1-\cos C)\leqslant$$
$$2+\left[\frac{\cos C+(1-\cos C)}{2}\right]^2\Rightarrow\sum\sin^2 A\leqslant\frac{9}{4}\Rightarrow$$
$$\sqrt{3\sum GA^2}=\sqrt{(2R)^2\sum\sin^2 A}\leqslant 3R\Rightarrow$$
$$\sqrt{3\sum GA^2}\leqslant\sum OA$$

即 ㉑ 式成立,易推得等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

6

现在,我们总括前述,得到一条“闪光的金项链”

$$\sum PA\leqslant\sum IA\leqslant\left\{\begin{aligned}&\sum GA\leqslant\sqrt{3\sum GA^2}\\&\sum HA\leqslant\sqrt{3\sum GA^2}\end{aligned}\right\}\leqslant\sum OA \tag{⑳}$$

即

$$f(P)\leqslant f(I)\leqslant\left\{\begin{aligned}&f(G)\leqslant g'(G)\\&f(H)\leqslant g(G)\end{aligned}\right\}\leqslant f(O) \tag{㉑}$$

其中

$$g(G)=\sqrt{3\sum GA^2}$$

最后,我们顺便指出:

(ⅰ)我们在前面的推证中,建立了漂亮的三角不等式

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} \tag{㉒}$$

如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,作置换

$$(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)$$

得

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leqslant\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \tag{㉓}$$

(ⅱ)不等式 ① 的加权推广便是:

推广一[史坦纳(Steiner)定理] 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,且满足

$$\frac{\sin\angle BPC}{\alpha}=\frac{\sin\angle CPA}{\beta}=\frac{\sin\angle APB}{\gamma} \tag{㉔}$$

其中,$\alpha,\beta,\gamma>0$,M 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,则有

$$\alpha MA + \beta MB + \gamma MC \geqslant \alpha PA + \beta PB + \gamma PC \tag{25}$$

显然,当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时,$\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$,$P$ 点成为 Fermat 点,㉕式化为①.

本节不等式①就妙不可言,那不等式㉕就趣味无穷了.

(ⅲ)史坦纳定理的一个美妙应用是:

在一个平原地方有 A,B,C(不共线)三个村庄,分别有 p,q,r 位学生要上学.那么应在 $\triangle ABC$ 内何处建校最合理?

(ⅲ)令人振奋的是,绝美的史坦纳(Steiner)定理还可从三角形推广到凸多边形.

推广二 对一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,$P$ 为凸 $n(n \geqslant 3)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点,满足

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{P_i} = 0 \tag{26}$$

$(\vec{P_i} = \vec{PA_i}/|\vec{PA_i}|, 1 \leqslant i \leqslant n)$,即

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)} = 0 \tag{27}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 是 P 面各边的张角.M 为 $A_1A_2\cdots A_n$ 内任意一点,则

$$\lambda_1 MA_1 + \lambda_2 MA_2 + \cdots + \lambda_n MA_n \geqslant \lambda_1 PA_1 + \lambda_2 PA_2 + \cdots + \lambda_n PA_n \tag{28}$$

特别地,当 $n = 3$ 时,㉘式化为㉕式的等价形式.且㉖式化为

$$\lambda_1 e^{i\theta_1} + \lambda_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} + \lambda_3 e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = 0 \Rightarrow \lambda_1 e^{i\theta_1} + \lambda_2 e^{i(2\pi-\theta_3)} + \lambda_3 e^{i2\pi} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 e^{i\theta_1} + \lambda_2 e^{-i\theta_3} + \lambda_3 = 0 \Rightarrow (\lambda_1\cos\theta_1 + \lambda_2\cos\theta_3 + \lambda_3) + i(\lambda_1\sin\theta_1 - \lambda_2\sin\theta_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1\cos\theta_1 + \lambda_2\cos\theta_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1\sin\theta_1 - \lambda_2\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

设

$$\begin{cases} \lambda_1 = K\sin\theta_3 \\ \lambda_2 = K\sin\theta_1 \end{cases} (K > 0) \Rightarrow \lambda_3 = -K(\sin\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_3) =$$

$$-K\sin(\theta_1+\theta_3) = -K\sin(2\pi - \theta_2) = K\sin\theta_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\lambda_2} = \frac{\sin\theta_2}{\lambda_3} = \frac{\sin\theta_3}{\lambda_1}$$

这与推广一中的㉔式是一致的,不用怀疑.

(ⅳ)Fermat 问题的四面体推广便是:

推广三 若点 P 是四面体 $A_1A_2A_3 - A_4$ 的内点,且点 P 对各棱所张视角均相等(等于 $\pi - \arccos\frac{1}{3}$),则点 P 就是该四面体的 Fermat 点.

(ⅴ)成语道:抛砖引玉,自然会一石激起千层浪.人们在探研 Fermat 问题的过程中,发现了一系列美妙的相关结论.限于篇幅,本文到此为止.

近年高考与竞赛试题中有关李普希兹条件的几个问题①

刘培杰

1　几个高考与竞赛试题

在2006年9月24日举行的全国高中数学联赛江西省预赛中有一题为(第一大题第2小题):

试题1　集合 M 由满足如下条件的函数 $f(x)$ 组成:当 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$,对于两个函数 $f_1(x)=x^2-2x+5$,$f_2(x)=\sqrt{|x|}$,以下关系中成立的是

A. $f_1\in M,f_2\in M$　　　　B. $f_1\notin M,f_2\notin M$

C. $f_1\notin M,f_2\in M$　　　　D. $f_1\in M,f_2\notin M$

解　易知 $f_1\in M$,对 f_2 在求得

$$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=\frac{||x_1|-|x_2||}{\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|}}$$

后,不妨取 $x_1=\frac{1}{100},x_2=\frac{1}{400}$,可得

$$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=\frac{20}{3}|x_1-x_2|>4|x_1-x_2|$$

所以 $f_2\notin M$.

我们再来关注一下高考试题.

2006年高考题北京卷第6题为:

试题2　在下列4个函数中,满足性质:"对于区间(1,2)上的任意,$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$,$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$ 恒成立"的只有(　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　　　B. $f(x)=|x|$

---

① 本文前4节发表在《中学数学研究》2007第9期上,本文是全文刊登.

C. $f(x) = 2^x$ D. $f(x) = x^2$

分析 注意到 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$，有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$$

而$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$是具有直线斜率的几何意义，利用数形结合的思想可知选(A).

这样的问题被命名为即时学习型问题，是指在题设中直接引入高等数学概念，高等数学结论，要求学生内化题给的高等数学信息并与原有初等数学知识相结合解决问题，再例如2004年高考江苏卷第22题.

试题3 已知函数 $f(x)(x \in R)$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1 - x_2)^2 \leqslant (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$ 和 $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$，其中 λ 是大于0的常数，设实数 a_0, a, b 满足$f(a_0) = 0, f = a - \lambda f(a)$.

(1) 证明：$\lambda \leqslant 1$，且不存在 $b_0 \neq a_0$，使 $f(b_0) = 0$；

(2) 证明：$(b - a_0)^2 \leqslant (1 - \lambda)^2 (a - a_0)^2$；

(3) 证明：$[f(b)]^2 \leqslant (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$.

试题4 A 是由定义在[2,4]上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：(1) 对任意 $x \in [1,2]$，都有 $\varphi(2x) \in (1,2)$；(2) 存在常数 $L(0 < L < 1)$，使得对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$，都有

$$|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$$

(1) 设 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1 + x}, x \in [2,4]$，证明：$\varphi(x) \in A$；

(2) 设 $\varphi(x) \in A$，如果存在 $x_0 \in (1,2)$，使得 $x_0 = \varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的；

(3) 设 $\varphi(x) \in A$，任取 $x_1 \in (1,2)$，令 $x_{m+1} = \varphi(2x_n), n = 1,2,\cdots$，证明：给实正整数 k，对任意的正整数 p，成立不等式

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{L^{k+1}}{1 - L}|x_2 - x_1|$$

试题5 (2004年泰国数学奥林匹克试题)

设函数 $f:[0,1] \to R$，满足：

(1) $f_{(0)} = f_{(1)} = 0$；

(2) 对所有的 $x, y \in [0,1]$，且 $x \neq y$

),

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

证明：对所有的 $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$$

以上各题均以李普希兹函数为背景.

2　李普希兹其人

李普希兹(Lipschitz. Rudolph 1832—1903)是德国著名数学家. 1832 年 5 月 14 日出生. 1862 年在勃列斯拉夫里大学任教授. 1884 年起任波恩大学教授. 1903 年 10 月 7 日逝世.

李普希兹在数学分析. 数论, 微分方程, 多维几何、微分几何、张量分析等方面都作出了贡献.

1876 年他把关于微分方程 $y' = f(x,y)$ 解的存在性定理的柯西条件减弱为: 存在常数 k, 使在

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

的区域内所有 (x,y_1), (x,y_2) 满足

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < k(y_1 - y_2)$$

这就是著名的李普希兹条件的原始来源.

3　压缩不动点原理

在数学分析中有一个常见的习题:

习题 1　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 若对任意的 $x \in [0,1]$, 满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 且对任意的 $x, y \in [0,1]$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|, 0 < \alpha < 1$$

则必存在唯一的 x_0, 使 $f(x_0) = x_0$, 即 $f(x)$ 有唯一的不动点.

这个习题很像一维的布劳维尔不动点定理, 即下面定理:

定理 A　设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 则必存在 $x_0 \in [0,0]$, 使 $f(x_0) = x_0$.

证明很简单, 先构造一个函数 $F(x) = f(x) - x$. 如 $F(0) = 0$ 或 $F(1) = 0$, 则 0 或 1 即为定理要求的 x_0, 定理已成立(此时将有 $f(0) = 0$ 或 $f(1) = 1$). 由条件 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ 知 $F(0) = 0 \geqslant 0$. $F(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, 故只需要在 $F(0) > 0$ 和 $F(1) < 0$ 的情形下证明定理.

由于 $f(x)$ 是连续函数, 故 $F(x)$ 也是连续函数, 因此当 x 由 0 出发变到 1 时, $F(x)$ 将从正值 $F(0)$ 连续地变到负值 $F(1)$, 所以必至少存在一点 x_0, 使 $F(x_0) = 0$, 而这正是 $f(x_0) = x_0$. (证毕)

前面这一习题不仅要求 $f(x)$ 连续, 还要求 $f(x)$ 是压缩的(压缩可推出连续). 那任意两点函数值之差的绝对值. 这一压缩性质的要求, 形成了另一种风格的不动点定理.

由于 $f(x)$ 是自映射 $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$. 故可以用迭代方法, 任取 $x_0 \in [0,1]$ 记 $x_{n+1} =$

$f(x_0)$,则 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.这时候我们必须关心$\{x_n\}$是否收收敛.

在数学分析中用以判断数列收敛的主要是 Caachy 收敛准则,即:设有数列$\{a_n\}$,$\{a_1\}$收敛的充要条件是:对 $\forall$ 的 $\varepsilon > 0$,总 $\exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,对任何 $p \in N$,总有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 成立.

下面我们用此来判断$\{x_n\}$的收敛性,显然有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant \alpha |x_n - x_{n-1}| = \alpha |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leqslant \alpha^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

反复应用此不等式可知

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \alpha^n |x_1 - x_0|$$

我们对任何正整数 p.考察

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n)|x_1 - x_0| = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}|x_1 - x_0| < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$$

其中 $|x_1 - x_0|$ 是定数,$0 < \alpha < 1$,当 $n \to \infty$ 时 $\alpha^n \to 0$,故$\{x_n\}$满足柯西收敛准则,即 x_n 收敛,设其收敛于 x^*,由于 f 的压缩性可以导出函数的连续性,由

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1,2,\cdots$$

可知 $x^* = f(x^*)$,故 x^* 是不动点.

还可以证明 x^* 是唯一的不动点,假若不然,另有一不动点 x^{**},则

$$|x^* - x^{**}| = |f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant \alpha |x^* - x^{**}|$$

其中 $0 < \alpha < 1$,这只有在 $|x^* - x^{**}| = 0$ 时才成立,即 $x^* = x^{**}$.

此定理的证明过程同 1 中试题 4 的过程完全一样.类似的结论还有

定理 B 设 I 为区间,$f \in C(I)$(表 I 上的全体连续函数),且在 I 中的所有内点处可微,又设存在常数 $L > 0$,使得对 I 的所有的点 x 处成立 $|f'(x)| \leqslant L$,则 f 在区间 I 上满足李普希兹条件.

证明 $\forall x_1, x_2 \in I$,且 $x_1 < x_2$.在区间$[x_1, x_2]$上对 f 用拉格朗日中值定理,就有 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使成立

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leqslant L|x_1 - x_2|$$

这个定理给出了判定 f 是否满足李普希兹条件的判据.

我们也可以将李普希兹条件推广至一般情形.即由原来的 $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$.改为 $|f(x - f(y))| < L|x - y|^d$.$d > 1$,这样满足条件的 f 就大大增加.

定理 C 设函数 f 在区间 I 上满足带指数的李普希茨条件,即存在 $M > O$,$\alpha > 0$,使得当 $x, y \in I$ 时,成立 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^\alpha$,则若 $\alpha > 1$,f 在 I 上一定为常值函数.

证明只需任取 $x < y$,在两点之间插入足够多的等距分布的点,用以估计 $|f(x) -$

$f(y)|$.

或采用下法：

设 $\alpha = 1+\beta(\beta>0)$，任取一点 $x_0\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-x_0|, x\neq x_0, x\in[a,b]$$

上式即

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{\beta}$$

令 $x\to x_0$，则有 $f'(x_0)=0$，故 $f'(x)$，在 $[a,b]$ 上恒为零，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数.

假设 $F(x)$ 在 R^n 中包含闭球

$$\bar{B}(x_0;r)=\{x\mid \|x-x_0\|\leqslant r\}$$

的区域中有连续偏导数，则存在常数 L 使得对 $\bar{B}(x_0;r)$ 中的任意两点 x,x' 成立

$$\|F(x)-F(x')\|\leqslant L\|x-x'\|$$

可用单变量函数的中值定理来证明这个结论. 连接 x,x' 的线段可用参数表示为

$$(1-t)x+tx'=x+tv$$

其中 $\gamma=x'-x, 0\leqslant t\leqslant 1$. 用 F 沿该线段的取值定义函数 $g(t)$

$$g(t)=F((1-t)x+tx')=F(x+tv)$$

则 $g(0)=F(x), g(1)=F(x')$，由链式求导法则(应用于 F 的每个部分)

$$g'(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(x+tv)v_j=DF(x+tv)v$$

因此

$$F(x')-F(x)=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 DF(x+tv)v\mathrm{d}t$$

在最后一步取绝对值，则有

$$\|DF(x+tv)v\|\leqslant\|DF(x+lv)\|\cdot\|v\|$$

这里用到了偏导数矩阵的范数 $\|DF_{(x+tv)}\|$，因为所有偏导数都是连续的，所以存在常数 $L>0$ 使得对所有 $\bar{B}(x_0,r)$ 中的点 x 满足 $\|DF(y)\|\leqslant L$，特别地，在点 $x+tv$ 处以上不等式也成立，从而

$$\|F(x')-F(x)\|\leqslant\int_0^1\|DF(x+v)\|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 L\|v\|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$L\|v\|=L\|x'-x\|$$

4　推广到向量空间

在向量空间中也可以建立李普希兹条件，$\|F(x)-F(y)\|\leqslant c\|x-y\|$.

举一个著名的例子：如果将地球表面的风力场视为连续可微的，那么在任意时刻，在

地方数学竞赛试题研究

地球上至少存在一点,在这一点上是风平浪静,即为零级风.

在三维欧氏空间中,以坐标原点为中心,半径为1的球面叫做单位球面,记为 S.在 S 上的每一点处,作切平面,在这切平面上,任意地指定一个向量,这样就形成了 S 上的一个切向量场.如果把 S 想像为地球的表面,那么 S 的一个切向量场就可以理解为地面上的一个风速场,因为在一个固定的时刻,地球上的每一点处都有一定的风向和风力的大小,风向是该点的切平面上的一个向量.

如果这个场在每一点都不是零向量,那么在除以各点的模长之后,便得到一个各处的模长为1的切向量场,我们称之为 S 的单位切向量场,它只是刻画出各点处的风向.

利用这些个观点前过通络结果可叙述为下列数学结论.

在 S 上不存在连续可微的单位切向量场.

这是拓扑学中的一个经典定理,并非"场论"中必不可少的内容.这个定理有许多经典证明,有些用到组合推理,同调论,微分流形,有的涉及几何拓扑的方法.这个定理的一个简单证明是1962年菲尔兹奖得主米尔诺(Milnor)于1978年在《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly 95(1978)11 - 22)中给出的.我们是从郎(Serge Lang)的《Calculus of Several Variables》(Springen.1987)一节中得到的这一线索.Lang在书中叙述了这一定理并给出了证明他在书中写道:"直到最近,我才知道这一经典定理有一个比较简单的证明".他的说的简单证明就是指米尔诺的那篇文章.

米尔诺的证明,依赖于两个重要引理,第一个涉及体积的计算,设 A 是 R^3 中的一个紧致集,映射下是定义在包含 A 的某个开集上的连续可微的向量场,对于每一个实数 t,考察映射

$$\varphi_t(p) = p + tF(p).p \in A$$

我们可以证明存在李普希兹常数 C,使得

$$\| F(x) - F(y) \| \leqslant c \| x - y \|$$

对一切 $x,y \in A$ 成立.

希尔伯特指出:

在解决一个数学问题时,如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节.采取这样的观点之后,不仅我们所研究的问题会容易得到解决,同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法.

在讨论数学问题时,我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用,其实恰恰相反

5　常微分方程组

美国数值分析学家 Arieh Iserles 说:"微分方程数值分析,是人类最主要的科技手段之一,这些科技手段繁衍出我们每日经历的科技现象:从电视和因特网到空中旅行,天气

预报,工业生产,能量的生成和配给 …… 这个清单实际上可以无限地列下去."

由于常微分方程组在众多应用中的中心地位导致了常微分方程组数值方法的重要性.

而常微分方程组的基本问题是给出初值问题

$$y' = f(t, y), t \leqslant t_0, y(t_0) = y_0 \quad ①$$

的解.这里 $f:[t_0, \infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 是一个足够好的函数,并且初始条件 $y_0 \in \mathbf{R}^d$ 是一个给定的向量,$\mathbf{R}^d$ 表示 d 维实欧几里得空间.

这里"足够好"指的是 f 具有我们需要的所有性质.至少对于给定的向量范数,我们要求 f 满足李普希兹条件,即对于所有的 $x, y \in \mathbf{R}^d, t \geqslant t_0$,有

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant \lambda \| x - y \|$$

这里 $\lambda > 0$ 是不依赖于 x, y 的实常数,即我们前面所说的李普希兹常数,为什么要求 f 要满足这一条件呢?因为在这个条件下我们可以证明常微分方程组(1) 具有惟一解.并且当我们用数值法去解常微分方程组时,当格点列被加细时,数值解趋向于准确解.

6 如何确定李普希兹常数

对于李普希兹常数 L 如何确定是个问题,一般地说,找到式 ① 的好上界是一件困难的事情,但是,在许多使用李普希兹函数的优化技术中,集合 P 是逐次加细的矩形或单纯形,对于此类集合,可以使用自适应的方法逼近常数 L,区间分析(interral analysis) 方法提供了一种在矩形上估计常数 L 的十分有用的技术.

值得指出的是,李普希兹函数是十分广泛的一类函数,这类函数关于许多常见的运算是封闭的.

定理 D 设 f, g 是紧集 $P \subset \mathbf{R}^n$ 上的李普希兹函数,则:

(1)f, g 的每个线性组合在 P 上也是李普希兹函数;

(2)$\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 在 P 上是李普希兹函数;

(3) 乘积 f, g 在 P 上是李普希兹函数;

(4) 对于任意 $P \in [1, +\infty)$,$(|f|^P + |g|^P)^{\frac{1}{P}}$.

我们又给出 $\min\{f, g\}$ 的证明:

设 f, g 在 P 上分别具有李普希兹常数 L_f, L_g,则

$$\begin{aligned}
&|\min\{f, g\}(x^2) - \min\{f, g\}(x')| \leqslant \\
&\max\{|f(x^2) - f(x')|, |g(x^2) - g(x')|\} \leqslant \\
&\max\{L_f, L_g\} \| x^2 - x' \|
\end{aligned}$$

因此,$\min\{f, g\}$ 在 P 上是李普希兹函数,并且具有李普希兹常数 $L = \max\{L_f, L_g\}$.

李普希兹常数的确定在优化中至关重要的作用,特别是在全局优化中,全局优化研

究的是非线性函数在某个区域上全局最优点的特征和计算方法.

进一步还有如下的:

定理 E 设 $P=[a,b]$, $a>b$, 是实区间, $f(x)$ 是一个多项式, 其导数 $f'(x)$ 可以分解成

$$f'(x)=r(x)-q(x)+c=r_e(x)+r_o(x)-q_e(x)-q_0(x)+c$$

其中 $r(x)$, $q(x)$, $r_e(x)$, $r_0(x)$, $q_e(x)$ 和 $q_o(x)$ 是具有正系数的多项式, c 是常数, 此外, $r_e(x)$ 和 $q_e(x)$ 只有偶次项, 而 $r_o(x)$ 和 $q_o(x)$ 只有奇次项, 于是, $L=\max\{L_1,L_2\}$ 是 $f(x)$ 在 P 上的李普希兹常数, 其中

$$L_1=r_e(\max\{-a,b\})+r_o(b)-q_e(\min\{-a,o,b\})-q_o(a)+c$$

和

$$L_2=|r_e(\min\{-a,o,b\})+r_o(a)-q_e(\max\{-a,b\})-q_o(b)+c|$$

若 $a>0$, 则 $L=\max\{r(b)-q(u)+c|r(a)-q(b)+c|\}$.

7 Lipschitz 函数

定义 1 在 $P\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数 f 称为李普希兹函数(Lipschitz function), 是指存在一个常数 $L=L(f,p)$, 使得对于所有 $x^1,x^2\in P$

$$|f(x^2)-f(x^1)|\leqslant L\|x^2-x^1\| \qquad (*)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示范数, 常数 L 通常称为李普希兹常数.

容易看出, 若 f 在 P 上是具有常数 L 的李普希兹函数, 则 f 在 P 上也是具有常数 $L'>L$ 的李普希兹函数.

根据$(*)$式可知, 李普希兹函数在 P 上是连续的, 当 P 是实数, 当 P 是实数区间时, 李普希兹常数 L 给出了连接 f 图象上任意两点的直线斜率绝对值的上界. 对于一般的连续函数, 这个斜率不一定是有界的, 所以, 连续函数不一定是李普希兹函数, 例如 $f(x)=\sqrt{x}$, $P=[0,1]$.

定义 2 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$ 称为局部李普希兹函数, 是指对于每个 $x^0\in\mathbf{R}^n$, 存在一个以 x^0 为球心, $\varepsilon>0$ 为半径的球 $B(x^0,\varepsilon)$ 和常数 $L>0$, 使得对于所有 $x,y\in B(x^0,\varepsilon)$ 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\|x-y\|$$

下面我们来确定 L.

设 $f:\mathbf{R}^n\to R$ 是连续函数, 对于 $x^0\in\mathbf{R}^n$ 和单位向量 $e^i=(\delta_1^i,\cdots,\delta_n^i)^{\mathrm{T}}$, 其中 $\delta_i^i=1$, $\delta_j^i=0(j\neq i)$, 一元函数 $f(x^o+te^i)$ 在 $t=0$ 的导数(如果它存在的话)称为 f 在点 x^0 关于 x_i 的一阶偏导数$(i=1,2,\cdots,n)$, 对于任意 $i=1,2,\cdots,n$, 若 f 在点 x 关于 x_i 的一阶偏导数存在, 则称 $f(x)$ 在 x 点存在一阶偏导数, 此时, $f(x)$ 在 x 点的梯度定义为

$$\nabla f(x)=(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n})^{\mathrm{T}}$$

在此定义下,我们有如下定理:

定理1 设 $P\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集,若函数 f 在包含 P 的一个开集上连续可微,并且在 P 上具有有界的梯度,则 f 在 P 上是李普希兹函数,并且具有李普希兹常数

$$L=\sup\{\|\nabla f(x)\| \mid x\in P\} \tag{②}$$

证明 对于 $\forall x',x^2\in P$,由中值定理,可知存在 $z=x^2+\lambda(x^1-x^2)\in P,0<\lambda<1$,使得

$$|f(x^2)-f(x^1)|=|(x^2-x^1)^T\nabla f(z)|$$

由柯西 - 许瓦兹不等式,可得

$$|(x^2-x^1)^T\nabla f(z)|\leqslant\sup\{\|\nabla f(z)\| \mid z\in P\}\|x^2-x^1\|$$

因此,f 是凸集 P 上具有常数 L 的李普希兹函数.

在定理1中,若 P 是一个有界闭凸集,则根据 ∇f 的连续性,可以得到 ∇f 的有界性,并且(*)式中的上确界可以替换成 $\|\nabla f(x)\|$ 在 P 上的最大值.

比如函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}p_kx_k^2+q_kx_k+r_k)$ 定义在 n - 矩形 $P=\{x\in R^n \mid a_k\leqslant x_k\leqslant b_k,k=1,\cdots,n\}$ 上,其中实数 $p_k\neq0,a_k<b_k(k=1,\cdots,n)$,则由(*)式定义的常数形如

$$L=[\sum_{k\in I_1}(p_ka_k+q_k)^2+\sum_{k\in I_2}(p_kb_k+q_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$I_1=\{k\mid-\frac{q_k}{p_k}\geqslant\frac{1}{2}(a_k+b_k)\}$$

$$I_2=\{k\mid-\frac{q_k}{p_k}<\frac{1}{2}(a_k+b_k)\}$$

8 局部 Lipschitz 映射

在大学的微积分中我们所讨论的映射是属于 C^1 类的,亦即是光滑的,我们所使用的基本方法是通过映射在某点的导算子的性质来研究映射本身在这点的局部状态,也即线性化的方法.随着数学的发展,研究非光滑映射的要求日益迫切.与此相适应在20世纪70年代,相继出现了各种广义导数的概念,使得某些在通常意义下不可微的映射能够具有某种广义导数.现在,非光滑分析已成为有着极其广泛应用且仍在迅速发展的数学分支.

在各种广义导数的概念中,除了较早的凸函数的次微分以外,最著名最有用的当推加拿大数学家克拉克(F.H.Glarke)提出的局部李普希兹函数的广义梯度与有限维空间

的局部李普希兹映射的广义雅可比矩阵.

为了使读者有一个具体的感受,我们举一个数学分析中简单的定理为例.在数学分析中有"严格单调的连续实函数有连续的反函数".为此,我们需先建立如下

定义 1 设 x 和 y 分别是 n 维和 m 维欧氏空间, Ω 是 x 中的开集, $F:\Omega\to y$

(1) 若存在正常数 L,使得

$$\| F(x)-F(x')\| \leqslant L\| x-x'\| \quad \forall x,x'\in\Omega$$

则称 F 在 Ω 上为李普希兹映射.

(2) 若对 Ω 中的每个点 x,存在 x 的某邻域 $U\subset\Omega$,使得 F 在 U 上是李普希兹的,则称 F 在 Ω 上是局部李普希兹的.

定义 2 设 $F:\Omega\to y$ 为局部李普希兹映射, $x_0\in\Omega$, $M(mxn)$ 中的子集合

$$co\{A\in M(mxn)\mid A=\lim_{i\to\infty}F'(x_i),x_i\in P(F),x_i\to x_0\}$$

称为 F 在 x_0 的广义 Jacobi,记为 $\partial F(x_0)$.其中 coS 表示 S 的凸包.

定义 3 设 $F:\Omega\to y$ 为局部李普希兹映射, $x_0\in\Omega$.若 $\partial F(x_0)$ 中每一成员都是有逆的,则称 $\partial F(x_0)$ 是有逆的.

我们有如下反函数定理:

定理 设 $x=y=\mathbf{R}^n$, Ω 为 x 中的开集, $F:\Omega\to y$ 是局部李普希兹映射. $x_0\in\Omega$, $F(x_0)=y_0$,若 $\partial F(x_0)$ 是有逆的,则存在 x_0 的某邻域 U 与 y_0 的某邻域 V,使得对每一个 $y\in Y$,方程 $F(x)=y$ 在 U 中有唯一解 $x=\phi(y)$,且由此得到映射 $\phi:V\to U$ 是李普希兹的.

9 连续模

设 $f(x)$ 为在区间 $[a,b]$ 上连续的函数.令

$$w(\delta)=w(f,\delta)=\max_{|x-g|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)|$$

$a\leqslant x,y\leqslant b$,称量 $w(\delta)$ 为函数 $f(x)$ 的连续模.

我们对连续模的定义给予几何的说明,为此令

$$\varphi(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

函数 $\varphi(x,y)$ 在正方形 $a\leqslant x,y\leqslant b$ 上连续,由这正方形取出那一部分,使得

$$-\delta\leqslant x-y\leqslant\delta$$

者.在这部分上函数 $\varphi(x,y)$,连续因而取最大值.它就是 $w(f,\delta)$.

由于随量 δ 增大集合 $|x-y|\leqslant\delta$,也扩大,所以 $w(\delta)$ 为不减的.亦即 $w(\delta)$ 为变元 δ 的单调整增函数.

最有意义的 B 是量 $w(\delta)$ 当 δ 趋于零时的性质.可以说,函数 $w(\delta)$ 当 $\delta\to 0$ 时收敛于零的速度就是函数 $f(x)$ 连续性的度量标志.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有有界导数 $f'(x)$, $|f'(x)|\leqslant M$, $a\leqslant x\leqslant b$,则

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\leqslant M|x-y|$$

对于这样的函数不等式

$$w(\delta)=\max_{|y-x|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)|\leqslant M\delta \qquad (*)$$

成立.

据此我们可以将函数进行如下的分类

第一类我们定义为:若在区间$[a,b]$上不等式$(*)$成立,则函数$f(x)$属于类$LipM^1$,$f(x)\in LipM^1$.

显然这一类包含那些在区间上有有界导数$|f'(x)|\leqslant M$的函数.但不是仅仅含有这样的函数.还有其他的,如在区间上除了有限个点以外处处可微的函数$f(x)$也属于这个类,如果不等式$|f'(x)|\leqslant M$在一切可微的点成立的话.这一点很容易证明.

设$x<y$为区间$[a,b]$中的任意两点且$c_1<c_2<\cdots<c_k$为区间$[x,y]$中所有不可微函数$f(x)$的点.有

$$f(y)-f(x)=\{f(y)-f(c_k)\}+\{f(c_k)-f(c_{k-1})\}+\cdots+\{f(c_1)-f(x)\}$$

对等式右边每一项应用有限改变量公式,得到

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|\leqslant{}&|f'(x_1)|(y-c_k)+|f'(x_2)|(c_k-c_{k-1})+\cdots+\\&|f'(x_{k+1})|(c_1-x)\leqslant\\&M(y-c_k+c_k-c_{k-1}+\cdots+c_1-x)=\\&M(y-x)\end{aligned}$$

即可推得$(*)$式.

然而,并不是所有的连续函数都属于类$LipM^1$.例如,导数在区间$[a,b]$上无界的连续函数不属于这一类.这是因为由条件$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|$以及函数$f(x)$在$x$的可微性可推出不等式

$$|f'(x)|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-z}\right|\leqslant M$$

亦即导数$f'(x)$有界.例如在区间$[a,b]$上,$\sqrt{x-a}\notin LipM^1$.因为$(\sqrt{(x-a)})^1=\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}$在$[a,b]$上无界.

第二类:若在区间$[a,b]$上不等式$w(\delta)\leqslant M\delta^\alpha$成立.则我们说,函数$f(x)$属于类$LipM^\alpha,\alpha>0$.

容易证明,随数x的减小类$LipM^\alpha$扩大.精确的说,若$f(x)\in LipM^\alpha$且$\alpha'<\alpha$,则可求出这样的M',使得$f(x)$将属于类$LipM'^{\alpha'}$.其实,由不等式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha=M|x-y|^{\alpha-\alpha'}|x-y|^{\alpha'}$$

可推出,$|f(x)-f(y)|\leqslant M'|x-y|^{\alpha'}$,其中$M'=M(b-a)^{\alpha-\alpha'}$,亦即$f(x)\in LipM'^{\alpha'}$.

第三类,若等式$\lim\limits_{\delta\to0}w(\delta)\ln\dfrac{1}{\delta}=0$成立.则我们说,函数$f(x)$属于狄尼－李普希兹类.

狄尼－李普希兹类比一切类 $LipM^{\alpha}$，$\alpha < 0$ 的全体要广一些．其实，若 $w(\delta) \leqslant M\delta^{\alpha}$，则

$$\lim_{\delta\to 0} w(\delta)\ln\frac{1}{\delta} \leqslant \lim_{\delta\to 0} M\delta^{\alpha}\ln\frac{1}{\delta} = 0$$

另一方面，函数 $f(x) = \dfrac{1}{\ln^2\dfrac{1}{\delta}}$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上属于狄尼－李普希兹类，但不属于类 $LipM^{\alpha}$，$\alpha > 0$．

利用前面那道高考试题的解法，我们可以证明一个关于 $w(\delta)$ 的不等式

定理　若 $n \in \mathbf{N}$，则

$$w(n\delta) \leqslant nw(\delta)$$

注　设 $x < y$ 为区间 $[a,b]$ 中的两点，$|x-y| \leqslant n\delta$，对于它们，等式 $|f(x)-f(y)| = w(n\delta)$ 满足．把区间 $[x,y]$ 用点 $x_0 = x < \cdots < x_n = y$ 分为 n 等分．有

$$f(x)-f(y) = \{f(x)-f(x_1)\} + \{f(x_1)-f(x_2)\} + \cdots + \{f(x_{n-1})-f(x_n)\}$$

$$w(n\delta) = |f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-1})-f(x_n)|$$

由于 $|x_i - x_{i+1}| \leqslant \delta$，所以 $|f(x_i)-f(x_{i+1})| \leqslant w(\delta)$．因为 $w(n\delta) \leqslant nw(\delta)$．

最后，顺便指出：李普希兹条件还可推广到复域中：

设 f 是定义在紧区间 $I = [0,1] \subset R$ 上的复函数，定义

$$w_{\delta}(f) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y| \leqslant \delta, x,y \leqslant I\}$$

若 $0 < \alpha < 1$，相应的李普希兹空间 $Lip\alpha$ 由全体便得

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\{\delta^{-\alpha}w_{\delta}(f) \mid \delta > 0\}$$

为有限的函数 f 构成，定义

$$Lip\alpha = \{f \in Lip\alpha \mid \lim_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}w_{\delta}(f) = 0\}$$

则 $Lip\alpha$ 是巴拿赫空间，并且 $Lip\alpha$ 是 $Lip\alpha$ 的闭子空间．

10　李普希兹条件与小波分析

当我们在一个吵闹的餐厅，可以很快进入这样的状态，对嘈杂的背景声听而不闻．而只专注于朋友的谈话．

通过不断调整一个聚焦过程的尺度参数，小波变换可以聚集于信号的局部结构．信号的奇异性或非正则结构通常包含了其本质的信息．例如，图像亮度的不连续性表示景物中含有边缘．在心电图或雷达信号中，令人感兴趣的信息包含在信号的峰变处．我们将证明，信号的局部正则性可以由其小波变换幅值随尺度参数的衰减性来刻画，奇异性和边缘可以通过跟踪小波变换在细尺度下的局部极大模来检测．

非孤立的奇异性出现在如同多分形般的复杂信号中．近年来，在 Mandelbrot 的领导

下,多分形得到了广泛的研究,已经发现,多分形存在于自然界和科学的每一个角落.小波变换利用多分形的自相似性来计算其奇异性分布,这种奇异性谱可以被用来分析多分形的性质.

为了刻画奇异性,我们必须对信号 $f(t)$ 的正则性给予精确的量化描述. Lipschitz 指数可以用来度量信号在时间区间的一致正则性,也可以度量信号在某一时刻 v 的正则性.如果 f 在时刻 v 有奇异性,则表明 f 在 v 点是不可微的,因而在 v 点的 Lipschitz 指数刻画了该奇异性行为.

在下面,我们将论及 f 在 $\mathbf{R}$ 上的一致 Lipschitz 正则性随傅里叶变换的幅值的渐近衰减性.这种全局的正则性度量对信号的在特定位置的局部性质是无益的.

泰勒公式将信号的可微性与局部多项式逼近联系起来.设 f 在区间 $[v-h,v+h]$ 上是 m 次可微的,设 p_v 是 v 的领域中的泰勒多项式

$$p_v(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(v)}{k!}(t-v)^k \tag{③}$$

那么,泰勒公式证明了该逼近误差

$$\varepsilon_v(t)=f(t)-p_v(t)$$

满足

$$\forall t\in[v-h,v+h],\ |\varepsilon_v(t)|\leqslant\frac{|t-v|^m}{m!}\sup_{u\in[v-h,v+h]}|f^m(u)| \tag{④}$$

因此,f 在 v 的领域中的 m 次可微性推出当 t 趋于 v 时,误差 $\varepsilon_v(t)$ 的一个上界. Lipschitz 正则性通过使用非整数的指数改进了这个误差上界.在一些数学文献中,Lipschitz 指数亦称为 Hölder 指数.

定义(Lipschitz)

- 函数 f 在点 v 称为是点态 Lipschitz $\alpha\geqslant0$ 的,如果存在 $K>0$ 及 $m=\lfloor a\rfloor$ 次多项式 p_v,使得

$$\forall t\in\mathbf{R},\ |f(t)-p_v(t)|\leqslant K|t-v|^\alpha \tag{⑤}$$

- 函数 f 称为在区间 $[a,b]$ 上是一致 Lipschitz α 的,如果存在 $K>0$ 使得③式对所有 $v\in[a,b]$ 成立,其中 K 与 v 无关.

- f 在点 v 或区间 $[a,b]$ 上的 Lipschitz 正则性定义为所有使得 f 是 Lipschitz α 的参数 α 之上界.

对任意 v,多项式 $p_v(t)$ 是唯一确定的.如果 f 在 v 的某领域内是 $m=\lfloor a\rfloor$ 次连续可微的,那么 p_v 是 f 在 v 点的泰勒展式.点态 Lipschitz 指数因横坐标点的变化而异我们可以构造出具有非孤立奇异性的多分形函数,使得 f 在每个点都具有不同的 Lipschitz 正则性.反之,一致 Lipschitz 指数则给出了适应某给定区间的一个较全局的正则性度量.如果 f 在点 v 的某领域内是一致 Lipschitz $\alpha>m$ 的,那么可以证明 f 在该领域内一定是 m 次连续可微的.

如果 $0 \leqslant \alpha < 1$,则 $p_v(t) = f(v)$ 且 Lipschitz 条件 ③ 可写成

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mid f(t) - f(v) \mid \leqslant K \mid t - v \mid^{\alpha}$$

有界但在 v 点不连续的函数在 v 点是 Lipschitz 0 的. 如果 f 在 v 点是 Lipschitz $\alpha < 1$ 的,那么 f 在 v 点不可微且 α 刻画了其奇异性类型.

图像中的边缘结构常常是模式识别中最重要的特征. 这可以从人的视觉能力来说明,我们容易从物体轮廓的简单线条识别一种物体. 然而,什么是边缘呢?边缘可定义为图像中亮度的峰变点. 而更细致的观察表明该定义通常是不能令人满意的,因为图像的纹理确实是亮度峰变点,但它们不能看做边缘. 当观察一堵砖砌成的墙时,我们可以把墙的轮廓看做边缘,而把砖看做纹理,同时,我们也可以将每一块砖的轮廓看做边缘而将砖的不规则表面结构当作纹理,边缘与纹理的界限依赖于观察与分析的尺度,这激发计算机视觉研究者们在不同的尺度下检测图像的峰变点. 在下一节,我们将介绍多尺度 Canny 边缘检测子. 它等价于在二维二进小波变换下检测模极大. 边缘点的 Lipschitz 正则性由小波模极大对于尺度的衰减性而求得. 还可以证明,从这些小波模极大可以重构图像的一个无视觉损失的近似. 因此图像处理算法可以在多尺度边缘的层面上进行.

几乎处处奇异的信号在纯数学中是作为病态的情形给予研究的. Mandelbrot 首先注意到这种现象是处处存在的. 在众多的例子中我们要提及像道 · 琼斯工业平均一类的经济学数据、包含心脏记录的生理学数据、大辐射噪声中的电磁振荡、自然地形图像中的纹理,交通中川流不息的变化 ……

多分形中的奇异性通常是逐点变化的,了解这些奇异性的分布对分析它们的性质是重要的. 由于数值分辨率的有限性,Lipschitz 指数的点态度量并不可行. 离散化后,每一个采样点来自于一个小的时间区间,信号在该区间中含有无穷多个互异的奇异性. 因此这种奇异性分布必须利用多分形的自相似性用整体度量来衡量.

充分发展的湍流出现在高 Reynolds(雷诺) 数不可压缩流体中. 理解水动力湍流的性质是现代物理学的一个主要问题,尽管从 1941 年的 Kolmogorov 理论以来,人们已经做了认真的研究和探索,但这个问题还根本没有解决. 三维湍流的自由度相当多,可以产生非常复杂的时空行为. 迄今为止,没有任何形式的东西可以产生一种基于 Navier-stokes 方程的统计物理学框架,以便我们理解湍流的整体行为,就如同热力学一样.

1941 年,Kolmogonov 阐明了湍流的统计学理论. 速度场被模型化为一个过程,其增量具有方差

$$E\{\mid V(x + \Delta) - V(x) \mid^2\} - \varepsilon^{2/3}\Delta^{2/3}$$

常数 ε 是单位质量与单位时间内能量耗散的速率,我们假定它是与位置无关的. 这意味着速度场是统计齐次的,其 Lipschitz 正则性 $\alpha = H = 1/3$. 这一理论预言一个三维速度场的一维迹是一个具有平稳增量的分形噪声过程,其谱以幂指数 $2H + 1 = 5/3$ 衰减

$$\hat{R}_V(\omega) = \frac{\sigma_H^2}{\mid \omega \mid^{5/3}}$$

对该功率谱之衰减性的大量实验结果证明这一理论是成功的.然而该理论并没有考虑到粘性结构的存在性,比如旋涡.这些现象与齐次性假设是冲突的,而后者正是 Kolmogorov 理论(1941) 的根基.

11 李普希兹映射与豪斯道夫维数

设 A 是一个集合,如果有一个集合序列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$,使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 且 $0 < |A_i| \leqslant \delta, \forall i$, $0 < \delta < \infty$,则称 $\{A_i\}$ 是集合 A 的一个 δ - **覆盖**.

定义 1 设 A 为 X 中的非空有界子集,令 $0 < \delta < \infty, 0 \leqslant p < \infty$,定义

$$\mu(A,p,\delta) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^p : A_i \in A \text{ 且 } |A_i| < \delta, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$$

并约定当 $A_i = \varnothing$ 时其直径 $|A_i|^0 = 0$.

可以证明 $\mu(A,p,\delta)$ 是 δ 的非递增函数,因此,我们定义

$$\mu(A,p) = \sup\{\mu(A,p,\delta):\delta > 0\} = \lim_{\delta \to 0} \mu(A,p,\delta)$$

对每个 $p \in [0,\infty)$ 有 $\mu(A,p) \in [0,\infty]$.

定义 2 设 m 是一个正整数,A 是距离空间$(\mathbf{R}^m, E)$ 中的有界子集,对每个 $p \in [0,\infty)$,上述所定义的 $\mu(A,p)$ 称为 Hausdorff - p 维测度,通常记为 $H^p(A)$.

集合的 Lebesgue 测度与它所在的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数 n 密切相关,例如,一个线段在 $\mathbf{R}^1$ 上 L 测度为有限值,而在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 上 L 测度为零值,在 $\mathbf{R}^0$ 上 L 测度为 $+\infty$.在这里维数只限于整数维.分形几何学把 Lebesgue 测度开拓到实数维的 Hausdorff 测度.

Hausdorff 测度具有以下性质:

1.如果 $F \subset \mathbf{R}^n$,且 $\lambda > 0$,则

$$H^p(\lambda F) = \lambda^p H^p(F)$$

这称为**齐次性**,其中 $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$.换句话说,当 F 扩大(或缩小)λ 倍,则 F 的测度扩大(或缩小)λ^p 倍.

2.设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 且 $f: F \to \mathbf{R}^n$ 是一个映射,使得对正值常数 c 和指数 a 满足 Hölder 条件

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^a \quad \forall x,y \in F$$

则对每个 p 有

$$H^{p/a}(f(F)) \leqslant c^{p/a} H^p(F)$$

这意味着,集合 F 在 f 映射下的像的 $\frac{p}{a}$ 维测度小于等于 F 的 p 维测度乘上 $c^{p/a}$ 因子,其中 a 称为 Hölder 指数.Hölder 条件蕴含了 f 的连续性.

当 $a = 1$ 时 Hölder 条件写成

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y| \quad \forall x,y \in F$$

此时,称为 Lipschitz 映射.对每一个 p 有

$$H^p(f(F)) \leqslant c^p \cdot H^p(F)$$

3. 设 $f: F \to \mathbf{R}^n$ 是一个映射,如果存在两个正常数 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$,使

$$c_1 |x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant c_2 |x - y|$$

则称 f 是一个双 Lipschitz 映射.

4. 若 Lipschitz 映射中 $c = 1$,则

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in F$$

称 f 为等距映射,此时有

$$H^p(f(F)) = H^p(F)$$

即 Hausdorff 测度在 f 变换下不变.

参 考 文 献

[1] 际文源,范先令.隐函数定理[M].兰州:兰州大学出版社,1986.

[2] WALTER RUDIN.泛函分析[M].刘培德,译.北京:机械工业出版社,2004.

[3] ARIEH LSERLES. 微分方程数值分析基础教程[M]. 刘晓艳,刘学深,等译. 北京:清华大学出版社,2005.

[4] 黄红选,韩继业. 数学规划[M].北京:清华大学出版社,2006.

[5] 张奠宙,顾鹤荣.不动点定理[M].辽宁教育出版社,1989.

[6] HORST R,PARDALOS P M, THOAI N V.全局优化引论[M].黄红选,译.北京:清华大学出版社,2003.

[7] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(第二册)[M].南京:江苏教育出版社,1999.

[8] LEHMANN E L, GEORGE CASELLA. 点估计理论[M]. 郑忠国,蒋建成,童行伟,译. 中国统计出版社,2005.

[9] 谢惠民,等.数学分析习题课讲义(上册)[M].北京:高等教育出版社,2003.

[10] 孙本旺,汪浩.数学分析中的典型例题和解题方法[M].长沙:湖南科学技术出版社,1981.

[11] 张芷芬,丁同仁,黄文红.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,2006.

[12] 邓宗琦.数学家辞典.武汉:湖北教育出版社,1990.

[13] 杨文金. 感悟 2006 高考定义型创新题.

[14] Stéphane Mallat,著. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华,戴道清,黄文良,等译. 北京:机械工业出版社,2006.

[15] 任念兵. 高等数学背景下的高考不等式问题[J].数学教学研究,2006(3).

[16] 张琥.介绍 2006 年高考题中两类数学创新试题[J].数学教学,2007(4).

[17] 何龙泉.上通现代数学,下达中学课堂[J].中学数学研究,2006(4).

附录 1　一种解方程的数值方法

假定我们的方程可以写为形式

$$x = \varphi(x) \qquad ①$$

在函数 $\varphi(x)$ 的定义域内取任意值 x_0 并利用递推公式

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,3,\cdots \qquad ②$$

构造序列 $\{x_n\}$. 序列 $\{x_n\}$ 称之为迭代序列. 对它进行研究时, 可以提出两个问题:

(1) 计算 x_n 的过程是否可以无限继续下去, 即在函数 $\varphi(x)$ 的定义域内是否含数 x_n?

(2) 如果迭代过程 ② 无限, 那么当 $n \to \infty$ 时, 数 x_n 将如何变化?

对这些问题研究, 可以证明在对函数 $\varphi(x)$ 作了某种确定的限制条件下, 迭代序列是无限的并且收敛于方程 ① 的根

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad c = \varphi(c) \qquad ③$$

但是, 为了进行上述研究, 我们必需引进一个新的概念.

如果存在这样的常数 α, 使得对于区间 $[a,b]$ 内的任意数 x_1 和 x_2, 均成立不等式

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| \qquad ④$$

我们就说, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足李普希兹常数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件, 那么它在这个区间上必连续. 事实上, 设 x_0 是在这个区间的任意点, 考察函数 $f(x)$ 在这一点的增量

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

利用 ④ 对这个增量进行估计

$$|\Delta f| \leqslant \alpha |\Delta x| \qquad ⑤$$

这样一来, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$. 这就表示函数连续.

李普希兹条件有简单的几何意义. 在函数 $y = f(x)$ 的图形上任意取两上点: M_1, 其坐标为 $(x_1, f(x_1))$; M_2, 其坐标为 $(x_2, f(x_2))$(图 1). 画出通过这两个点的直线, 其直线方程为

$$y = f(x_1) + k(x - x_1)$$

其中 k 是直线关于 x 轴倾角的正切, 由公式

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

确定.

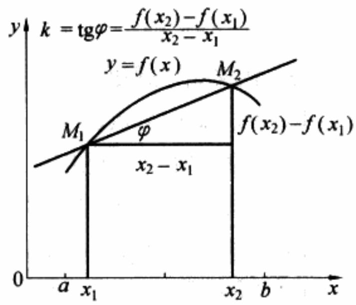


图 1　李普希兹条件的几何解释

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件 ④, 那么对于任意选取的点 M_1 和 M_2 将有: $|k| < \alpha$. 这样一来, 从几何的观点来看, 李普希兹条件表示通过函数 $y = f(x)$, 图形上所有"点对"的割线关于 x 轴倾角的正切有界.

现在进行以下假定, 即若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有界的导数: $|f'(x)| \leqslant m$, 当 $x \in [a,b]$ 时, 可以证明在这种情况下, $f(x)$ 满足李普希兹条件, 而李普希兹常数为 $\alpha = m$. 这个断言有简单的几何意义: 函数 $y = f(x)$ 图形上每一条割线, 都可以找到一条切线与其平行(图 2). 因

此割线倾角的正切的最大值不会超过切线倾角的正切的最大值，并且具有同样的常数 m：$|k|\leqslant m$. 这样一来，任何导数有界的函数 $f(x)$ 必定满足李普希兹条件.

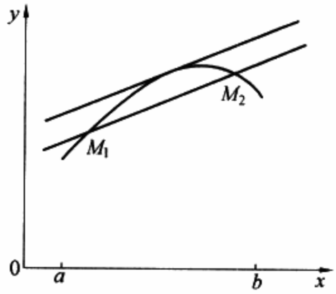


图 2　在函数 $f(x)$ 的可微性假设下，李普希兹条件的几何解释

在熟悉了李普希兹条件后，我们转向迭代序列的研究. 这时假定方程 ① 有根 $x=c$. 这个根的存在可以利用在本章 2 中应用过的定性方法研究方程而确立.

迭代序列收敛定理：设 c 是方程 ① 的根并且设函数 $\varphi(x)$ 在某个区间 $[c-\delta,c+\delta]$，$(\delta>0)$ 上满足李普希兹条件并且李普希兹常数 $\alpha<1$，那么，对于区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 上任意选取的 x_0，存在形如 ② 的无限迭代序列 $\{x_n\}$，并且这个序列收敛于根 $x=c$，这个根是方程 ① 在区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 上唯一的解.

上述定理有很简单的意义. 我们称函数 φ 将点 x 映像为点 $y=\varphi(x)$. 于是带有常数 $\alpha<1$ 的李普希兹条件表示 φ 是压缩映像：点 x_1 和 x_2 之间的距离大于它们的映像 $\varphi(x_2)$ 的距离.

根 c 是映像 φ 的不动点，即 φ 在这一点把自身变为自身：$c=\varphi(c)$. 因此，在迭代序列 ② 中每一步，都在压缩着距离，致使序列 $\{x_n\}$ 的项逼近于不动点 c.

按照上述道说明了定理的意义后，转向定理的证明. 在区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 上取任意点 x_0，此点与点 c 的距离不大于 δ：$|c-x_0|\leqslant\delta$.

算出 x_1：$x_1=\varphi(x_0)$，这时

$$x_1-c=\varphi(x_0)-\varphi(c)$$

对于差 $\varphi(x_0)-\varphi(c)$ 可以利用李普希兹条件估值：

$$|x_1-c|=|\varphi(x_0)-\varphi(c)|\leqslant\alpha|x_0-c|\leqslant\alpha\delta \tag{⑥}$$

不等式 ⑥ 说明 x_1 位于区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 内，并且 x_1 的位置比 x_0 更靠近点 c.

继续作出迭代序列. 算出 $x_2=\varphi(x_1)$，这时

$$|x_2-c|=|\varphi(x_2)-\varphi(c)|\leqslant\alpha|x_1-c|\leqslant\alpha^2|x_0-c|\leqslant\alpha^2\delta$$

点 x_2 仍然位于区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 内，并且 x_2 比 x_1 更靠近点 c，即更接近于 c.

按照归纳法容易证明，以后的迭代也存在并且满足不等式

$$|x_n-c|\leqslant\alpha^n|x_0-c|\leqslant\alpha^n\delta \tag{⑦}$$

由此推出

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-c)=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c \tag{⑧}$$

我们还要证明，根 $x=c$ 是方程 ① 在区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 上的唯一解. 事实上，假若还存在另一个根

$$x=c_1,\quad c_1=\varphi(c_1),\quad c_1\in[c-\delta,c+\delta] \tag{⑨}$$

我们取 c_1 作为零次近似并且作出迭代序列 ②. 于是考虑到等式 ⑨，便可得到

$$x_n=c,n=0,1,2,\cdots$$

另一方面按照刚才的证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c\qquad 即\qquad c_1=c$$

这就说明方程 ① 在区间 $[c-\delta,c+\delta]$ 上决不会再有其他的解.

可以运用迭代序列收敛于方程 ① 的根这个性质，在一定的精度下来近似地确定这个根. 为此必须进行足够次数的迭代.

举例说明上述方法，作为例子，我们再次考虑方程

$$x = \cos x$$

这里 $\cos x$ 相当于 $\varphi(x)$. 这个函数可微，其导数等于 $-\sin x$，在区间[0,1]上

$$|\varphi'(x)| = \sin x \leqslant \sin 1 \qquad ⑩$$

这样一来，函数 $\varphi(x) = \cos x$ 在区间[0,1]上满足李普希兹条件. 李普希兹常数为 $\alpha = \sin 1 < 1$.

按照迭代公式 ② 计算的结果列在表 1 上. 此时迭代公式 ② 具有形式

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

作为零次近似，我们取区间的中点：$x_0 = 0.5$.

表 1

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0.500 000 000 000	0.877 582 561 890
1	0.639 012 494 166	0.802 685 100 681
2	0.694 778 026 789	0.768 195 831 281
3	0.719 165 445 942	0.752 355 759 420
4	0.730 081 063 138	0.745 120 341 349
5	0.735 006 309 016	0.741 826 522 642
6	0.737 235 725 443	0.741 329 651 877
7	0.738 246 238 333	0.739 649 062 768
8	0.738 704 539 357	0.739 341 452 279
9	0.738 912 449 332	0.739 201 444 135

为了便于分析迭代序列，将它的项排成两行，因而且成了两列标号分别为奇数和偶数的项. 对它们进行比较，我们可以看出，偶数项小于奇数项：迭代序列中每项的值时而大时而小，当标号增加时，偶数项的值增加而奇数项的值减少，彼此间越来越接近.

例如，我们可以写出迭代 19 次的计算过程，并且可以写出根 c 的双向不等式

$$0.738\ 912\ 449\ 332 < c < x_{19} = 0.739\ 201\ 444\ 135 \qquad ⑪$$

即迭代序列的项 x_{18} 和 x_{19} 确定了根 c 的不足近似值与过剩近似值，并且其误差不超过差 $x_{19} - x_{18}$

$$\varepsilon < \Delta_{19} = x_{19} - x_{18} < 0.003$$

我们在迭代 19 次以后所达到的精度，若用夹叉法，大约第 12 步便可达到这个精度. 步数所以不同，其原因很清楚. 在两种方法中误差均按等比序列的规律减少. 对于夹叉法可知公比等于 1/2. 它不依赖于函数 $f(x)$ 的形式. 对于迭代法，我们知道公经等于 α - 是函数 $\varphi(x)$ 的李普希兹常数. 在这个例子中 $\alpha > \frac{1}{2}$，因此迭代法的收敛慢于夹叉法的收敛. 这个结论表示在同样情况下，从收敛速度的观点来看，当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时，迭代法才会比夹叉法优越.

附录 2　压缩映射定理

定义　设 f 是距离空间上的一个自身映射，即 $f: X \to X$，如果存在一个常数 $s, 0 \leqslant s < 1$ 使得对一切 $x, y \in X$ 有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant s d(x, y)$$

则称 f 为压缩映射，s 称为 f 的压缩因子.

为了下面讨论的方便起见，我们首先介绍定理 1，其实它本质上就是函数 f 在点 x 的连续性.

定理 1　设 (X, d) 是一个距离空间，$\{x_n\}$ 是收敛于 $x \in X$ 的一个柯西序列，令：$f: X \to X$ 是连续的，则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

这意指像点列 $f(x_n)$ 的极限点是原像点列极限点的像.

定理 2(Banach，1922)　设 $f: X \to X$ 是完备距离空间 (X, d) 上的一个压缩映射，则 f 具有唯一的不动点 $x_f \in X$，而且对任一 $x \in X$，序列 $\{f^{0n}(x) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 收敛到 x_f，即

$$\lim_{n\to\infty} f^{0n}(x) = x_f \quad \forall x \in X$$

证明　分以下三部分进行：

(1) 在 X 中任取一点 x_0，从 x_0 出发作迭代使

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^{02}(x_0), \cdots, x_n = f(x_{n-1}) = f^{0n}(x_0), \cdots$$

这样就得到 X 中一个点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要我们证明 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列.

由于 f 是压缩映射，不难由归纳法得到

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant s d(x_n, x_{n-1}) \leqslant s^2 d(x_n, x_{n-1}) \leqslant s^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \cdots\cdots \leqslant s^n d(x_1, x_0) \quad (n \geqslant 1)$$

其中 $0 \leqslant s < 1$ 为压缩因子. 于是，对于任意正整数 p，由三点不等式及上式得到

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &(s^{n+p-1} + s^{n+p-2} + \cdots + s^n) d(x_1, x_0) = \\ &\frac{s^n - s^{n+p}}{1-s} d(x_1, x_0) < \frac{s^n}{1-s} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由于 $0 \leqslant s < 1$，所以当 n 充分大时，不等式右边充分小，所以 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列. 我们取 $x_m = x_{n+p}$，则上式可写为

$$d(x_m, x_n) = d(f^{0m}(x_0), f^{0n}(x_0)) < \frac{s^{m \wedge n}}{1-s} d(f(x_0), x_0)$$

其中 $\wedge$ 符号表示 m 和 n 中最小者. 因此 $\{f^{0n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个柯西序列. 由于 (X, d) 是完备距离空间，任一柯西序列都具有极限 $x_f \in X$，且

$$\lim_{n\to\infty} f^{0n}(x) = x_f$$

(2) 再证明 x_f 是 f 的不动点.

由于 f 是压缩映射，有

$$d(f(x_n), f(x)) \leqslant s d(x_n, x)$$

当 $n \to \infty$ 时，$d(x_n, x) \to 0$，由此导出 $d(f(x_n), f(x)) \to 0$，因此 f 是连续的. 利用 f 的连续性和定理 1，

于是必有

$$f(x_f) = f(\lim_{n\to\infty} f^{0n}(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{0(0+1)}(x) = x_f$$

(3) 最后证明不动点的唯一性.

设有两个不动点 x_f 和 y_f,则 $x_f = f(x_f)$ 和 $y_f = f(y_f)$. 于是必有

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leqslant sd(x_f, y_f)$$

由于 $0 \leqslant s < 1$,欲要上式成立,必须 $d(x_f, y_f) = 0$,所以 $x_f = y_f$,f 具有唯一的不动点证毕.

以上压缩映射定理不但证明了不动点的存在性和唯一性,同时也提供了求不动点的方法 —— 迭代法. 具体地说,在完备距离空间中,从任了的初值 x_0 出发,逐次迭代得到一个点列 $\{x_n = f^{0n}(x_0): n = 1,2,\cdots\}$,它一定收敛到方程 $f(x) = x$ 的解. 这种方法也称为"逐次逼近法". 这个定理还给出了误差估计

$$d(x_n, x_f) \leqslant \frac{s^n}{1-s} d(x_1, x_0) \qquad n = 1,2,\cdots$$

上式不但告诉我们,x_n 与所求精确解 x_f 的逼近程度,这个估计对近似计算很有用. 而且它还告诉我们方程 $f(x) = x$ 的解可能存在的范围.

例 1 两个符号 $\{0,1\}$ 的代码空间 Σ 上的一个映射定义为

$$f(x_1x_2x_3\cdots) = 1x_1x_2x_3\cdots$$

证明 f 是压缩映射,并求出 f 的不动点.

证明 取 Σ 中任意两点

$$x = x_1x_2x_3\cdots \qquad 和 \qquad y = y_1y_2y_3\cdots$$

它们之间的距离为

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i} = \frac{|x_1 - y_1|}{3} + \frac{x_2 - y_2}{3^2} + \cdots$$

映射后,像点之间的距离为

$$d(f(x), f(y)) = \frac{|1-1|}{3} + \frac{|x_1 - y_1|}{3^2} + \frac{x_2 - y_2}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3} d(x,y)$$

因此 f 是一个压缩映射,压缩因子 $s = \dfrac{1}{3}$.

由不动点定义

$$f(x_1x_2x_3\cdots\cdots) = x_1x_2x_3\cdots = 1x_1x_2x_3\cdots$$

所以要满足 $x_1 = 1, x_2 = x_1 = 1, x_3 = x_2 = x_1 = 1, \cdots$,故不动点 $x_f = \overline{1111}$.

例 2 在两个符号 $\{0,1\}$ 的代码空间 Σ 上定义一个映射 $T: \Sigma \to \Sigma$,形式为

$$T(x_1x_2x_3\cdots) = x_2x_3x_4\cdots$$

称 T 为移位算子(a shift operator). 求 T^{03} 的不动点.

解 由于

$$T^{03}(x_1x_2x_3x_4\cdots) = x_4x_5x_6\cdots$$

求 T^{03} 不动点,即解

$$T^{03}(x_1x_2x_3\cdots) = x_1x_2x_3\cdots$$

由此得 $x_1 = x_4, x_2 = x_5, x_3 = x_6, x_4 = x_7, x_5 = x_8, x_6 = x_9, \cdots$,故 T^{03} 的不动点

$$x_f = \overline{x_1x_2x_3}, \forall x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

附录 3　分形空间上的压缩映射

介绍几个结论.

结论 1　设 $w:X\to X$ 是距离空间 (X,d) 上的一个压缩映射,那么 w 是连续的.

结论 2　设 $w:X\to X$ 是距离空间 (X,d) 上的一个连续映射,则 $w:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$.

证明　令 $S\in\mathscr{H}(X)$ 是 X 的非空紧子集,我们要证明 $w(S)$ 也是非空紧子集.

令 $\{x_n\}$ 是 S 中的无限点列,则 $\{y_n=w(x_n)\}$ 是 $w(S)$ 中的无限点列. 由 S 的紧性, $\{x_n\}$ 中必存在一个收敛的子序列 $\{x_{N_n}\}$,令其极限记为 $\hat{x}\in S$,这个收敛点列的像的点列 $\{y_{N_n}=w(x_{N_n})\}$ 是 $\{y_n\}$ 的子序列. 由 w 的连续性,和 2.8 节定理 1 必有

$$\lim_{n\to\infty}w(x_{N_n})=w(\hat{x})$$

因为 $\hat{x}\in S$,则 $w(\hat{x})\in w(S)$. 令 $y=w(\hat{x})$,我们可把上式改写为

$$\lim_{n\to\infty}w(x_{N_n})=\lim_{n\to\infty}y_{N_n}=\hat{y}\in w(S)$$

这说明 $w(S)$ 中任一无限点列 $\{y_n\}$ 存在收敛的子序列 $\{y_{N_n}\}$,且其极限 $\hat{y}\in w(S)$,证明了 $w(S)$ 是非空紧子集,引理证毕.

结论 3　设 $w:X\to X$ 是距离空间上的压缩映射,压缩因子为 $s(0\leqslant s<1)$,则 $w:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$ 为

$$w(B)=\{w(x):x\in B\}\qquad\forall B\in\mathscr{H}(X)$$

是一个在 $\mathscr{H}(X),h(d)$ 上具有压缩因子 s 的压缩映射.

证明　由结论 1 告诉我们:任意一个压缩映射都是连续映射. 由结论 2 得知, w 把 $\mathscr{H}(X)$ 映射到自身. 本引理要证明 w 在 $(\mathscr{H}(X),h(d))$ 上也是一个压缩映射. 假设 $B,C\in\mathscr{H}(X)$,则

$$\begin{aligned}d(w(B),w(C))&=\max\{\min\{d(w(x),w(y)):y\in C\}:x\in B\}\leqslant\\&\max\{\min\{sd(x,y):y\in C\}:x\in B\}=sd(B,C)\end{aligned}$$

类似可以证明

$$d(w(C),w(C))=d(w(B),w(C))\vee d(w(C),w(B))\leqslant s(d(B,C)\vee d(C,B))\leqslant sh(B,C)$$

所以 w 是 $(\mathscr{H}(X),h(d))$ 上的压缩映射,压缩因子为 s.

三个几何问题思考

叶中豪[1]　吕峰波[2]

1　三圆定理

1990年左右，在湖南长沙召开一次会议时，与上海市杨浦区教育学院特级教师余应龙先生同住一室，他告诉我曾对1988年国家集训队的一个几何试题作了推广. 原题为："在$\triangle ABC$中，$\angle C=30°$，I,O分别是三角形的内心和外心，在AC,AB两边上截取$AE=BF=AB$(圆1).求证：$EF=IO$."

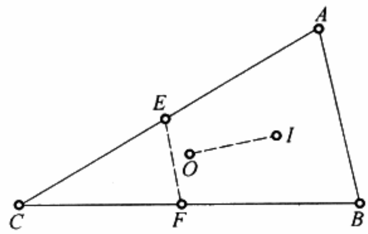


图1

余应龙先生将其推广为："在任意$\triangle ABC$各边所在直线上相应截取：$BA_1=CA_2=BC$，$CB_1=AB_2=CA$，$AC_1=BC_2=AB$，共得到六个点A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2.则A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2都垂直于内、外心联线，且$\triangle AA_1A_2,\triangle BB_1B_2,\triangle CC_1C_2$的外接圆是三个等圆(图2)."

在切磋中，我和余先生发现了如下进一步结论："和这三个等圆同时外切的圆必和$\triangle ABC$的外接圆相内切；和这三个等圆同时内切的圆也和$\triangle ABC$的外接圆相内切.而且三圆恰好通过外接圆上各优弧的中点."并找到这些结论的纯几何证法.后来，这题被单墫教授收入《数学竞赛研究教程》(江苏教育出版社1993年)一书中.

约十几年后，我们又重新思考了这一问题，得到相关结论如下：

三圆定理的推广　在$\triangle ABC$内任取一点P(P至三边的距离记为x,y,z)，在AB,AC所在直线上相应截取

$$BA_1:BC:CA_2=1/z:1/x:1/y$$

(注：即$\triangle PBA_1,\triangle PBC,\triangle PBA_2$面积相等)

① 上海教育出版社(永福路123号，邮政编码：200031).

② 浙江省嘉兴一中(中环南路，邮政编码：314001).

在 BC，BA 所在直线上相应截取

$CB_1 : CA : AB_2 = 1/x : 1/y : 1/z$

在 CA，CB 所在直线上相应截取

$AC_1 : AB : BC_2 = 1/y : 1/z : 1/x$

共得到六个点 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. 则：

(1) A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 都平行于 P 点的“三线极线”；

(2) $\triangle AA_1A_2$，$\triangle BB_1B_2$，$\triangle CC_1C_2$ 的外接圆半径之比为 $x : y : z$；

(3) 记 $\triangle AA_1A_2$，$\triangle BB_1B_2$，$\triangle CC_1C_2$ 的外接圆圆心依次为 O_1, O_2, O_3，则 AO_1，BO_2，CO_3 三线共点，且所共点 X 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上；

(4) 若记 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 与外接圆的另一个交点依次为 N_1, N_2, N_3，记射线 AP，BP，CP 与外接圆的交点依次为 S_1, S_2, S_3，则

$$N_1B : N_1C = S_1C : S_1B$$

$$N_2C : N_2A = S_2A : S_2C$$

$$N_3A : N_3B = S_3B : S_3A$$

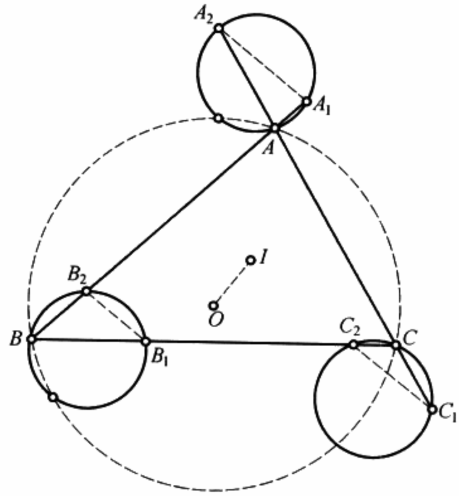


图 2

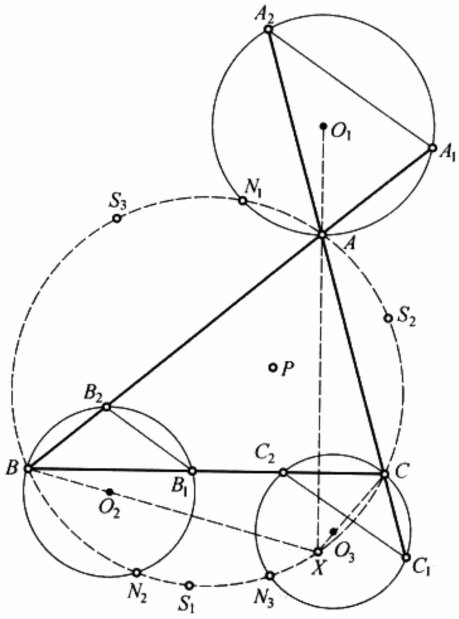


图 3

注记 所谓“三线极线”(trilinear polar)，指的是对 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点 P，先分别作直线 AP，BP，CP 与对应边 BC，CA，AB 的交点 D_1, E_1, F_1；再作直线 E_1F_1，F_1D_1，D_1E_1 分别与对边 BC，CA，AB 相交于点 D_2, E_2, F_2；则 D_2, E_2, F_2 必共线，所共之线就称为 P 点关于 $\triangle ABC$ 的三线极线.—— 事实上，它就是点 P 所对应的 Ceva 三角形与原 $\triangle ABC$ 的透视轴.

反之，对 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一条直线 l，反过去能唯一确定一点 P，以 l 为其三线极线. 具体确定过程如下：先作直线 l 与 BC，CA，AB 边的相应交点 D_2, E_2, F_2；再联结 BE_2，CF_2 相交于 A_1；联结 CF_2，AD_2 相交于 B_1；联结 AD_2，BE_2 相交于 C_1，则 AA_1，BB_1，CC_1 必共点于 P. 相应地，称 P 为直线 l 的“三线极点”(trilinear pole).

命题 1　若 P,Q 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点，则它们各自的三线极线是关于 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭线.

命题 2　线束的三线极点轨迹，是经过原三角形三个顶点的二次曲线；点列的三线极线包络，是与原三角形三边都相切的二次曲线.

具体说，已知 $\triangle ABC$，当 l 绕着定点 P 旋转时，l 的三线极点的轨迹是经过 $\triangle ABC$ 三个顶点的二次曲线口.

问题 1　考虑 Ω 的等角共轭像 l'（它是一条直线），并研究 l' 和点 P 的关系.

经研究发现，l' 是 P 的等角共轭点 Q 的三线极线. 即：

命题 3　若 P,Q 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点，则过 P 的任意直线 l 的三线极点轨迹 Ω，与 Q 点的三线极线互为等角共轭像.

或叙述成：

命题 4　Q 点的三线极线上任意一点的等角共轭点的三线极线，一定经过其等角共轭点 P.

特别地，当 P 点取无穷远点，即当 l 是一族平行线时，这时 Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆上的某点，其三线极线是经过 $\triangle ABC$ 的类似重心 K 的一条直线. 故作为一族平行线，其三线极点轨迹的特征是 —— 它是经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点以及重心 G 的二次曲线.

问题 1 的对偶问题是：

问题 2　已知 $\triangle ABC$，当点 P 沿着定直线 l 移动时，P 的三线极线的包络是与 $\triangle ABC$ 三边都相切的二次曲线 Ω'. 其切线的等角共轭线始终经过定点 P'，它可被认为是 Ω' 的等角共轭像.

同样应考虑 P' 与所给的定直线 l 之间的关系.

根据对偶性，相应结论为：P' 点的三线极线 l' 与直线 l 互为等角共轭线.

当 P 取内心时，就得到原先的"三圆定理"；而当 P 取重心时，三圆同时退化为点.

曹纲指出，三条平行线段 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 的长度之比，恰好和 P 点的重心坐标一致.

上述推广后的三圆定理引出了一系列可供研究、探讨的课题. 例如，考虑 P 点的位置与三个圆之间的内在关系，就是一件极有意义的事情.

通过几何画板发现，当 P 点在经过 $\triangle ABC$ 三个顶点的二次曲线 Ω 上移动时，三个圆的圆心轨迹恰好为直线（一般说来这三条直线并不共点，也不经过 $\triangle ABC$ 的相应顶点）.

尤其值得重视的是如下情况：当上述二次曲线还经过 $\triangle ABC$ 的重心 G 时，三个圆的圆心轨迹便成为经过 $\triangle ABC$ 相应顶点的三条直线，而且它们共点于 $\triangle ABC$ 外接圆上一点 X！—— 这正是我们得出上述第(3)个结论的依据.

至于 X 点的具体描述，我们给出了如下结果：

命题 5　当 P 点在经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点以及重心 G 的二次曲线上移动时，P 点的等角共轭点 Q 的轨迹是过 $\triangle ABC$ 的类似重心 K 的一条直线（如图 4），它的三线极点 Y 也

在 $\triangle ABC$ 的外接圆上;X,Y 恰好是外接圆的对径点!而且,这时线段 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 都平行于 X 点的 Simson 线.

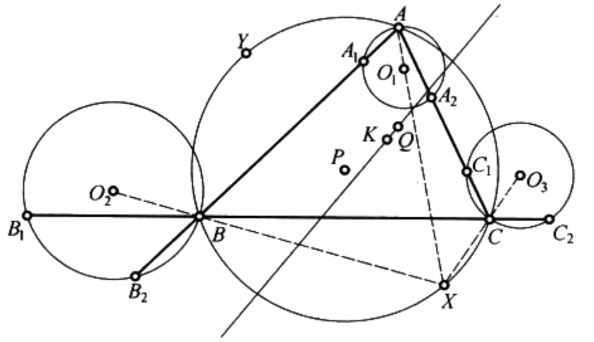


图 4

2 五圆定理

所谓"完全四边形"(complete quadrilateral)(在射影几何中亦称"四线形"),指平面上四条一般位置的直线,其中既没有两条平行,也没有三条共点.

完全四边形的每两边的交点,称为其顶点.完全四边形共有六个顶点,可以分成三组,每组称为对顶点,对顶点的联线称为对角线.完全四边形共有三条对角线,其中点共线,称为完全四边形的"Newton 线".

从完全四边形的四条边中每取出三条,构成三角形,称为其基本三角形.每个完全四边形共有四个基本三角形,它们之间关系密切.例如,四个基本三角形的外接圆必共点,所共点称为完全四边形的"Miquel 点";四个基本三角形的垂心必共线,称为完全四边形的"垂心线"(ortholine),它一定和完全四边形的 Newton 线相垂直(Gauss-Bodenmiller 定理).

还可以进一步考虑完全五边形(即五边形)—— 平面上一般位置的五条直线.任意取出其中的四条,都可构成一个完全四边形.这样的完全四边形共有五个,其五条 Newton 线一定共点,所共的点实际上是同时和完全五边形的五条边相切的二次曲线的中心.

注记 有些文献将上述五条 Newton 线所共之点称为"吴点",认为是由我国数学家吴文俊首先用机器证明的.但据平面几何高手 —— 深圳市教委主任尚强先生告知,在前苏联的一本平面几何习题集中(约 50 年代出版)早就将这个结论列为习题.

由于 Newton 线是和完全四边形的四条边同时相切的无数条二次曲线的中心轨迹 —— 这正是 Newton 首先证明的[4],因此,可以相信 Newton 本人早已熟知这一结果.本文中,我们约定将此点称呼为完全五边形的"Newton 点".

大约在 1838 年,A · Miquel 考察了完全五边形所含的五个完全四边形各自的 Miquel 点,他发现这五个点一定位于同一个圆上(图 5)—— 这就是完全五边形的 Miquel 定理.

(称这五个 Miquel 点所共的圆为该完全五边形的"Miquel 圆".)

注记 严济慈先生《几何证题法》(第 249 页总习题第 44 题)[5] 以及梁绍鸿先生《初等数学复习及研究(平面几何)》(第 480 页习题第 17 题)[1] 都载有这个定理:"五直线交成五个完全四边形,它们的五个 Miquel 点共圆."

《数学通报》1964 年第 11 期陈圣德一文[6] 对这个定理作了详细讨论.

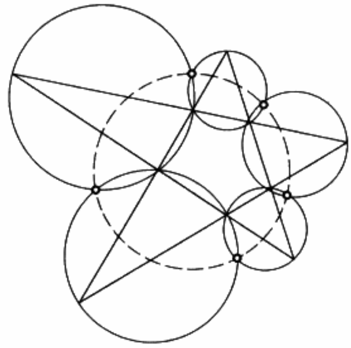


图 5

接着考虑由 6 条直线组成的完全六边形,其所含的 6 个完全五边形各自的 Miquel 圆必定共点,称为该完全六边形的"Miquel 点";再考虑由 7 条直线组成的完全七边形,其所含的 7 个完全六边形各自的 Miquel 点必定共圆,称为该完全七边形的"Miquel 圆"…… 这样可无限推广下去.首先证明这个奇妙定理的是英年早逝的英国数学家 William Kingdom Clifford(1845 ~ 1879),他曾在非欧几何和非交换代数方面作出过杰出贡献,继 Hamilton 的四元数之后,引入了新的超复数 —— 八元数(biquaternion),并推广为更一般的"Clifford 代数".

注记 南京师范大学单墫教授 1997 年从加拿大滑铁卢大学图书馆所藏的《Clifford 全集》中复印了这篇原始论文,回国后将复印件慨然相赠.

而国内,因不了解这题的背景,河南的郑格于先生也独立地给出过一种证明.

这方面登峰造极的工作要数我国数学家周毓麟院士,他于 1954 年发表了"连环定理"一文,对这类问题作了统一处理,得到了一条囊括全局的普遍定理[7].

2001 年初,余应龙先生去新加坡开会,买回了一部原版书:David Wells 所著的《几何学奇趣辞典》[8],并于 2001 年 2 月 8 日将这本书借给了我.同书作者曾写过《数学与联想》一书,他的著作具有内容新奇、图文并茂的特点,我很喜欢其风格.借到这本书,我立刻被这本书的丰富内容所吸引.在书的第 79 页有这样一个定理:

五圆定理 作五个圆,其圆心都坐落在同一个定圆上,且相邻两圆的交点(其中的一个)也在该定圆上.那么,将这些圆的其余交点联结成直线,则恰好可构成一个顶点位于各圆上的五星形(图 6).

可以从不同的角度来欣赏这条定理,我们把立足点放在图中的那个五星形上 —— 它的图形和上面提到的 Miquel 定理非常相似,但也有区别,因为一般完全五边形的 Miquel 圆并不经过外心.经研究表明,这时不仅仅图中所示的五个基本三角形的外心在定圆上,事实上,其余五个基本三角形的外心也在同一个圆上,因此加上五个 Miquel 点,一共有 15 点共圆!这是 Miquel 定理的一种非常精致的特例!这个图形的出现为 Miquel 定理的研究注入了新的活力.

那么,究竟怎么样的完全五边形才满足“五圆定理”呢?由于原书相应的那节中并未引证参考文献,因此我们无从知道该定理的原始出处,只能独立地作一些探索.

2001年2月17日晚,我利用几何画板发现:如果先取定完全五边形中的四条直线,那么第五条直线只有唯一的位置满足“五圆定理”,于是我把探索的重点放在搞清楚这五条直线的内在关系.

第一个发现是:第五条直线必须平行于另四条直线的垂心线.换句话说,在“五圆定理”中,每条直线都必须平行于其余四条直线的垂心线.由此还得到其逆命题:

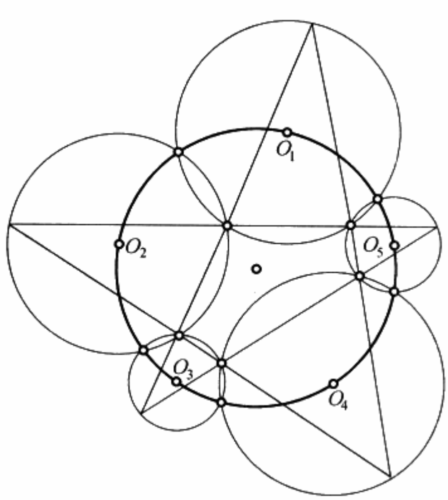


图 6

命题 6 如果在一个完全五边形中,能够找到两条直线,分别平行于去掉每条直线所剩下的完全四边形的垂心线,那么,其余三条直线也具有同样的性质.

(注:我们目前只给出命题6解析的证明.)

仅仅知道第五条直线和垂心线平行是不够的,因为还不足以确定它的位置.于是,我就着意去寻找关于位置的线索,以便能够给出“五圆定理”的精确刻画.

随着探索的深入,接着又得到了第二个发现:在“五圆定理”中,每三条直线所围成三角形的垂心,和另外两条直线的交点所联成的线段(以下我们将它称呼为“好线段”,一共有10条)两两互相平分.换言之,在“五圆定理”中,完全五边形的10个顶点和10个基本三角形的垂心恰好构成两幅彼此中心对称的图案!由此还可提出其逆命题:

命题 7 在一个完全五边形中,如果有3条“好线段”彼此互相平分,那么,所有的10条“好线段”一定都两两互相平分.

(注:命题7中的“3条”不能减少为“2条”,否则可以举出反例.)

命题7给出的线索十分重要,整个图形的对称中心非常值得关注 —— 它正是刻画“五圆定理”的一把金钥匙!为了确定第五条直线的位置,我引入了完全四边形的“广义垂心”的概念.它依赖于下面的这条命题:

命题 8 已知完全四边形 l_1, l_2, l_3, l_4.

将 l_2, l_3, l_4 所围成的三角形的垂心记为 H_1;l_1, l_3, l_4 所围成的三角形的垂心记为 H_2;l_1, l_2, l_4 所围成的三角形的垂心记为 H_3;l_1, l_2, l_3 所围成的三角形的垂心记为 H_4.以 H_i 为中心,作出 l_i 的1/2位似直线 $l'_i(i=1,2,3,4)$.则 l'_1, l'_2, l'_3, l'_4 共点,所共点 H 位于完全四边形的 Newton 线上(图7).

称 H 点为完全四边形 l_1, l_2, l_3, l_4 的“广义垂心”.

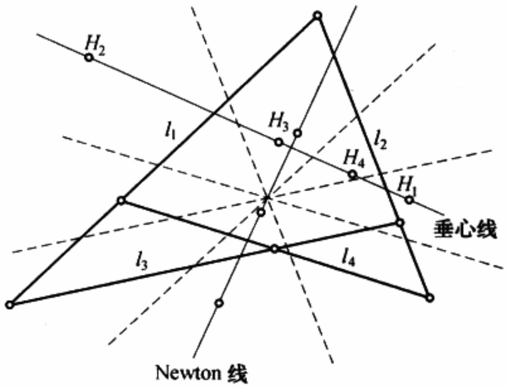


图 7

证明　考虑 $\triangle CBE$ 和 $\triangle CDF$，记其垂心为 H_1, H_2. 过 H_1 作 AD 的平行线，过 H_2 作 AB 的平行线，两线交于 P. 易见 C 是 $\triangle PH_1H_2$ 的垂心. 故而 $PC \perp H_1H_2$. 但 H_1H_2 是完全四边形的垂心线，故而 CP 平行于完全四边形的 Newton 线(图 8).

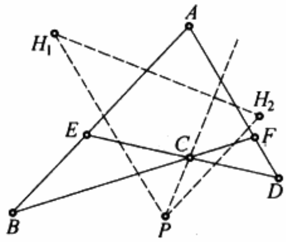


图 8

以 A 为中心，作直线 CP 的 1/2 位似线，则所得到的位似直线就是完全四边形的 Newton 线(因为它过 AC 的中点，且垂直于垂心线). 因此 AP 的中点(即广义垂心)必在完全四边形的 Newton 线上. 证毕.

(注：上述证法是田廷彦于 2002 年 1 月 18 日给出的.)

随着"广义垂心"的引入，"五圆定理"的刻画终于有了圆满的结果：只要将完全四边形的垂心线关于"广义垂心"作一次中心对称，就得到了"五圆定理"中所需要的第五条直线！这时，所得完全五边形所含的五个完全四边形的广义垂心合而为一——它就是该完全五边形的"Newton 点".

对"广义垂心"还可以作如下理解：所谓完全四边形的"广义垂心"，从本质上说就是完全四边形的四条边，加上其垂心线(一共五条直线)所形成的完全五边形的"Newton 点". 因此，"五圆定理"中的第五条直线也可以这样描述：先作与完全四边形的四条边以及垂心线都相切的二次曲线 Ω，然后再作 Ω 的切线，使其与垂心线相平行——它就是第五条直线！

另外，田廷彦给出了"五圆定理"图形中间的那个凸五边形所需满足的充要条件：

命题 9　"五圆定理"等价于

$$CD/\cos\angle A \cdot \sin(\angle C + \angle D) =$$
$$DE/\cos\angle B \cdot \sin(\angle D + \angle E) = \cdots = d$$

其中 d 是"Miquel 圆"的直径.

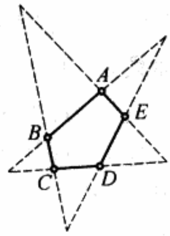


图 9

2001 年下半年偶然中发现,将命题 3 中的“垂心”全改为“外心”,结论仍成立:

命题 10 已知完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4,将 l_2,l_3,l_4 所围成的三角形的外心记为 O_1;l_1,l_3,l_4 所围成的三角形的外心记为 O_2;l_1,l_2,l_4 所围成的三角形的外心记为 O_3;l_1,l_2,l_3 所围成的三角形的外心记为 O_4. 以 O_i 为中心,作出 l_i 的 1/2 位似直线 $l''_i(i=1,2,3,4)$. 则 l''_1,l''_2,l''_3,l''_4 共点,所共点 O 也位于完全四边形的 Newton 线上.

索性将 O 点也称为完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4 的“广义外心”.

注记 命题 9 的证明起初甚为曲折:首先用到 Steiner 定理,说明以三个外心为顶点的三角形之垂心必落在相应的第四条直线上;然后,由于完全四边形的四个外心共圆(即所谓的“外心圆”,Miquel 点也在该圆上),再利用“共圆四点,每三点所构成三角形的垂心——共四点,所形成图形与原来的四点是中心对称图形.”(这个结论曾作为竞赛题)而这个对称中心正是命题 10 中所谓的“广义外心”,它也位于完全四边形的 Newton 线上.这样曲折的三部曲,合起来就可完成其证明.

后来(2002 年 5 月 23 日),在给吴伟朝的一封信中,我给出命题 10 和下述推论 1 的简单证明.

将命题 8 和命题 10 相结合,可得如下两个结论:

推论 1 已知完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4. 将 l_2,l_3,l_4 所围成的三角形的重心记为 G_1;l_1,l_3,l_4 所围成的三角形的重心记为 G_2;l_1,l_2,l_4 所围成的三角形的重心记为 G_3;l_1,l_2,l_3 所围成的三角形的重心记为 G_4. 以 G_i 为中心,作出 l_i 的 1/2 位似直线 $l'''_i(i=1,2,3,4)$. 则 $l'''_1,l'''_2,l'''_3,l'''_4$ 共点,所共点 G 也位于完全四边形的 Newton 线上.

也可以将 G 点称为完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4 的“广义重心”.

不难注意到,推论 1 是这几条同类命题中最简单的一个,因为它是仿射性质.

推论 2 已知完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4. 则 l_1 平行于 l_2,l_3,l_4 所围成的三角形的 Euler 线的充要条件是广义垂心和广义外心互相重合.

推论 2 表明,完全四边形的四条直线中,只要有一条平行于其余三条所围成的三角形的 Euler 线,那么,广义垂心、广义外心、广义重心三者全都重合——事实上,整条 Newton 线上的点经演变后都重合为同一个点!

由推论 2,即可得到如下漂亮的定理:

定理 已知完全四边形 l_1,l_2,l_3,l_4. 若 l_1 平行于 l_2,l_3,l_4 所围成的三角形的 Euler 线,则每条 l_i 都平行于另外三条直线所围成三角形的 Euler 线.

注记 扬州大学蒋声教授及南京师范大学单墫教授首先给出了这一定理的解析几何证法,北京大学黄利兵同学则用配极的办法给出了证明,后来河南省实验中学叶松高同学也寄来了他的解析几何证法.今年 8 月,上海延安中学钟建国老师及上海中学张俊毅同学,分别给出了纯几何的证明办法.

广州大学吴伟朝先生将其翻译成英文,推荐到《美国数学月刊》2002 年第 12 期上发表.

两正一反三相似图形

叶中豪

叠在同一平面上的三张相似形，其中两张是同向的，一张是反向的，这种构形比三张同向放置的相似形要来得复杂．下面就来研究这一结构的内在属性．①

如图1所示，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3 是三条任意线段，将它们作为相似形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ中的对应元素——我们先从它们出发来研究三相似形．作

$$\triangle P_1A_1B_1(\text{反}) \backsim \triangle P_2A_2B_2(\text{正}) \backsim \triangle P_3A_3B_3(\text{正})$$

其中，P_1，P_2，P_3 是三幅相似形中的对应动点，分别从属于相似形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ．

记相似形Ⅱ、Ⅲ的不动点为 O_{23} 由于相似形Ⅰ、Ⅱ及Ⅰ、Ⅲ间属于反向关系，图中同时画出了其不动点 O_{12}，O_{13} 和彼此垂直的两组逆相似轴．

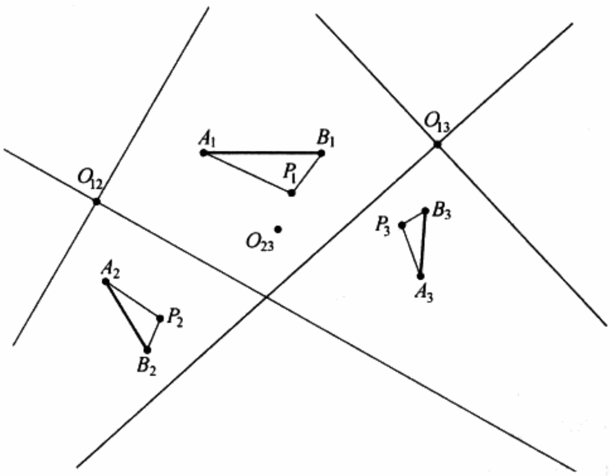


图 1

1　三对应点三角形的遍历性

首先研究三对应点所构成的三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 形状的变化．

① 三张顺相似形的研究可见于《近代欧氏几何学》的最后一章；属于 Brocard 几何的范畴．

作 $\triangle PMN \backsim \triangle P_1P_2P_3$，其中 MN 是固定线段．借助于 $P_1 \rightarrow P$ 的变换，我们可搞清楚 $\triangle P_1P_2P_3$ 形状变化的规律．

画板表明（也不难用复数的方法精确地予以说明），这种变换将一切直线变为圆（这里所谓的圆是广义的，也包括直线）；当直线平移时，可观察到轨迹圆几乎扫遍整个平面（但有一条"缝隙"是例外，下文将着重给予解释），所以从总体上说 $\triangle P_1P_2P_3$ 几乎可遍历所有形状．

但在平移过程中，这些轨迹圆却始终经过两个定点，其中一个记为 P_0，是三相似形固有的特征点；另一个是随平行方向改变的相对定点．

在这两个定点处，出现了奇异现象，表明这时不是一一对应关系；也就是说，有一族动态的 $\triangle P_1P_2P_3$ 对应于 $\triangle P_0MN$ 这同一种形状——这正是"两正一反三相似形"所固有的本质属性之一；而另一个相对定点处，却没有三角形和它对应（其实和它对应的乃是无穷大三角形）（图 2）．

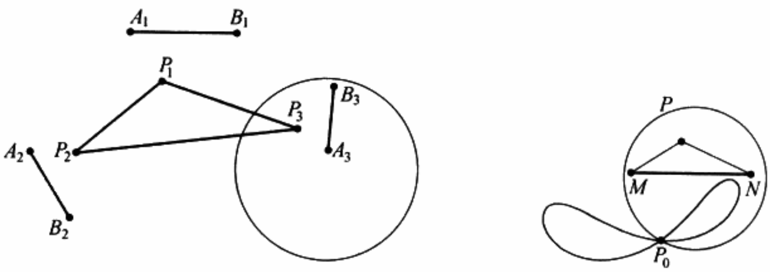


图 2

后文将逐渐揭示在奇异点处发生的现象．

我们将 P_0 点（相对于 MN 而言）称为"两正一反三相似形"的母点，而将 $\triangle P_0MN$（主要指其形状）称为"两正一反三相似形"的特征三角形．

与此同时，也可考虑圆的像：这一变换将圆变为四次曲线，它们有时像月形，有时像 8 字形，有时像蜗形（图 3），一旦有交叉点，该点就一定是上面提到的母点 P_0．

原则上讲，圆的像一定过母点！（但须包括虚的情形——看上去不经过的，其实是"虚的"经过．）

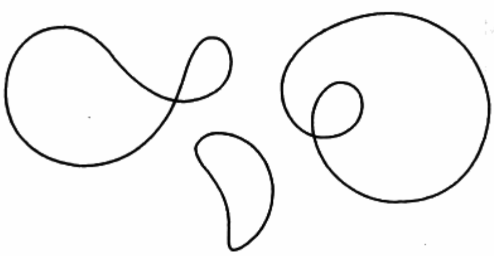


图 3

另外,在本文的结尾部分将讨论三条对应直线所围成的三角形.

2　三对应点何时共线?

所谓三对应点共线,其实就是当 $\triangle PMN$"压扁"成直线时的特例,不过这种特例值得单独给予关注.

"两正一反三相似形"的对应点共线问题比三个顺相似形复杂.

每个对应点形成的轨迹是二次曲线,而不是三个顺似形中的 McCay 圆.

为下文讨论方便起见,我们姑且把这样的三条彼此相似的二次曲线称作"两正一反三相似"构形中的 McCay 二次曲线,并把三幅相似图形中的 McCay 二次曲线依次称呼为 McCay 二次曲线 Ⅰ、McCay 二次曲线 Ⅱ 和 McCay 二次曲线 Ⅲ.

具体地说,McCay 二次曲线 Ⅰ 经过 O_{12} 和 O_{13};McCay 二次曲线 Ⅱ 经过 O_{12} 和 O_{23};McCay 二次曲线 Ⅲ 经过 O_{13} 和 O_{23}(图 4).

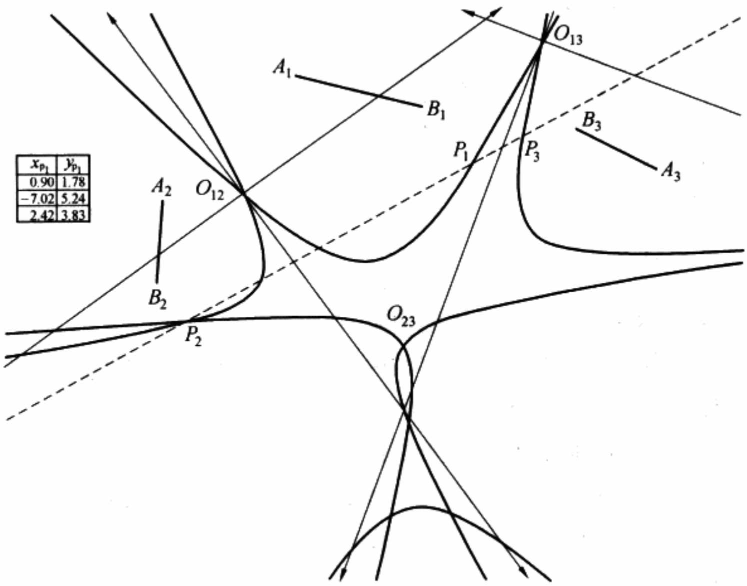


图 4

如何特征地描述 McCay 二次曲线,并精确地把它作出来是我们下一步的目标.(图 4 中暂且借助于描点,故并不精确,且不能拖动.)

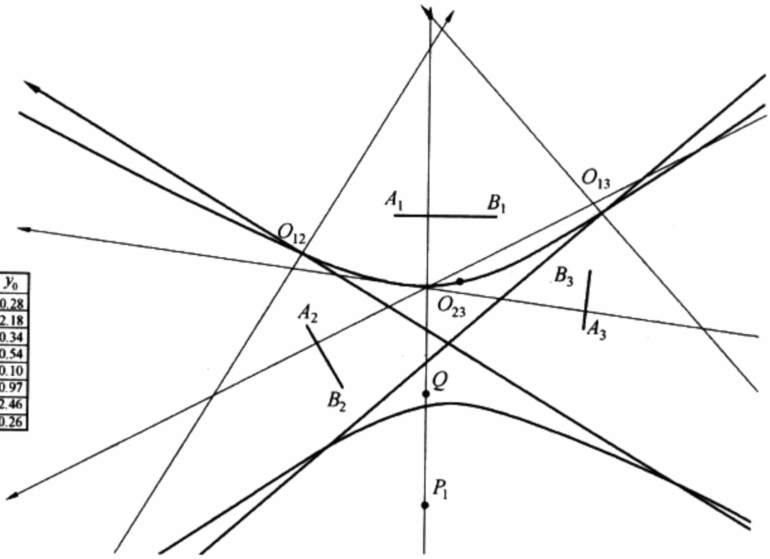
在后文中,利用不可及圆,我们揭示了其深刻的定量特征,给出离心率的表示式,并在 9 中,利用 $P \to P_1$ 逆变换,完成其在几何画板中的精确作图.

3　三对应线何时共点?

与三对应点共线问题相对偶的是三对应线共点问题.

在三个顺相似形中,三对应线一旦共点,则所共点形成 Brocard 圆.

而在“两正一反三相似形”中,形成的却又是二次曲线——同时经过三个相似中心的一条二次曲线,我们也姑且把它称作“两正一反三相似形”中的 Brocard 二次曲线(图 5).



x_0	y_0
−1.47	0.28
3.12	2.18
−2.16	0.34
0.10	0.54
−1.83	0.10
−4.37	0.97
−7.98	2.46
−1.27	0.26

图 5

在后面课 11 中,已给出了 Brocard 二次曲线的精确作图,但尚未给出特征刻画.

可以进一步研究 Brocard 二次曲线和前面提到的 McCay 二次曲线离心率之间的联系.

4　$P_1 \to P$ 变换的研究

为了解开 1 中现象的奥秘,我们观察当直线绕着某个定点 A 旋转时的情形.这时可观察到轨迹圆是经过两个定点的第二类共轴圆系,其中的一个定点就是 A 的对应点 A_0,另一个定点乃是前面提到的母点 P_0.

直线平移可理解为绕无穷远点旋转,所以这时特定的 A_0 点正是无穷远点的像,我们把这种点称为不可及点.每个平行方向上都对应着一个不可及点.

问:全体不可及点形成的轨迹是什么?

答案:是一个经过 P_0 点的圆.

我们把这个由不可及点所形成的圆称为不可及圆(注意:它属于线段 MN 所在平面),它就是前文提到的“缝隙”.将这个圆刻画清楚是下文的目标之一.

这个圆相对于 MN 的位置又是“两正一反三相似形”的一个重要特征.它揭示了三对应点所构成的三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 在遍历过程中的局限——有一族三角形的形状(它们构成所谓的“圆形集”)是不能取到的;仅在极限的意义下,当 $\triangle P_1P_2P_3$ 在各个方向上变得越来越大,才趋向于这些形状.

现象：作为直线像的圆时大时小，而在某一时刻它可能退缩成一个点 —— 母点 P_0；图 6 中以粗线来显示对应于母点的这条特殊直线. 换句话说，当 P_1 沿着这条直线移动时，奇异的现象发生了：$\triangle P_1P_2P_3$ 的形状始终保持不变 —— 总是取特征三角形之形状.

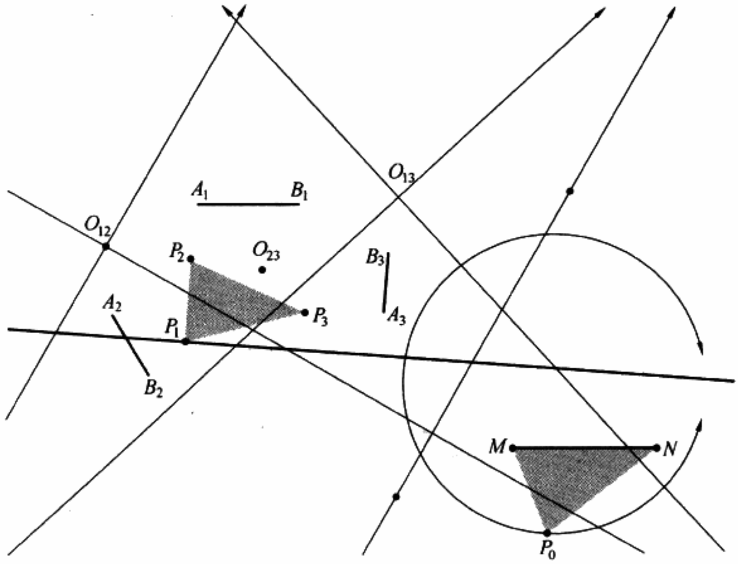


图 6

我们把这条具有特征意义的直线称为"两正一反三相似形" 的母线(注意：它属于相似形 Ⅰ).

以母线为线索，可以把握"两正一反三相似形" 的基本构造.

图 7 中，同时画出了母线在相似形 Ⅱ、Ⅲ 中的对应直线，借以观察这三条对应线的规律.

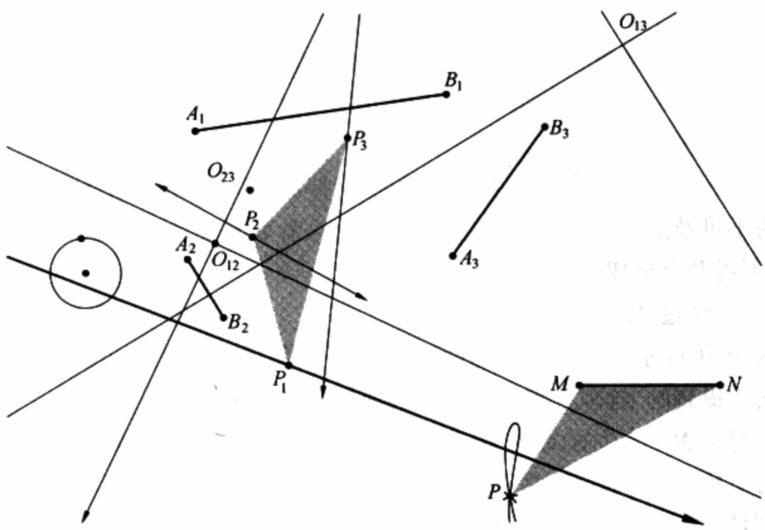


图 7

从表面上看，这几条直线并没有明显的特点，它们与相似轴之间似乎也没有体现出应有的关系.

要深入理解这一构形，必需再引入下一个重要的概念 —— 影消点.

5　影消点 T 的研究

在"两正一反三相似形"中，不动点 O_{23} 正是相似形 Ⅱ、Ⅲ 中表示同一位置的点，此乃"不动点"这一称呼之来历. 而将不动点 O_{23} 在 Ⅱ、Ⅲ 中的位置移植到相似形 Ⅰ 中，便可形成另一个重要的点 T，我们把它称作影消点.

更具体地说，T 是满足性质 $\triangle TA_1B_1 \backsim \triangle O_{23}A_2B_2$(或 $\backsim \triangle O_{23}A_3B_3$) 的唯一的那个点.

为什么把它称为影消点，它具有什么意义呢?

观察动点 P_1 趋近于 T 点时的情形，此时 P_2, P_3 会同时趋近于点 O_{23}，这样 $\triangle P_1P_2P_3$ 就"瘦死"成了一条线段；换言之，其相似形 ——$\triangle PMN$ 就会"膨胀"成一个无穷大三角形，即此时的 P 点将消失于茫茫远方 —— 这正是其取名之缘由.

另外，当 P_1, P_2 重合于 O_{12} 时，P_3 在 Ⅲ 中的位置 T_{12}；以及当 P_1, P_3 重合于 O_{13} 时，P_2 在 Ⅱ 中的位置 T_{13}—— 这两个点也理应具备一定的特性，但目前尚未找到它们的性质.

下面是"两正一反三相似形"中的第一个基本结论：

定理 1　母线是线段 $O_{23}T$ 的垂直平分线.

其实这一定理可从如下出发点加以解释：

记母线为 l_1，它在相似形 Ⅱ、Ⅲ 中的对应直线分别记作 l_2, l_3. 这三条对应直线所围的三角形记为 $\triangle L_1L_2L_3$(图 8).

当相似形 Ⅰ 中的动点 P_1 位于 O_{23} 时，记它在相似形 Ⅱ、Ⅲ 中的对应点为 U, V.

易知线段 $O_{23}T, UO_{23}, VO_{23}$ 属于三相似形中的对应线段，于是它们的垂直平分线(即上述 l_1, l_2, l_3) 也是对应的.

当 P_1 点沿着直线 L_2L_3 跑动时，根据三相似形的规律，知

$$\text{Rt}\triangle TP_1L \backsim \text{Rt}\triangle O_{23}P_2M \backsim \text{Rt}\triangle O_{23}P_3N$$

其中 L, M, N 分别是上述三条对应线段的中点.

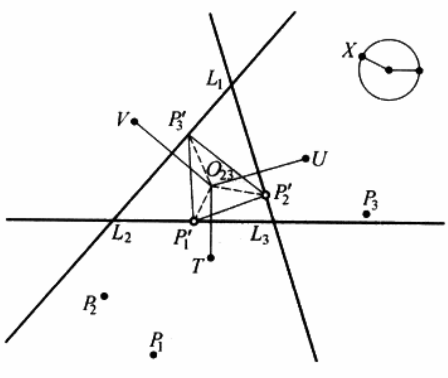


图 8

将其中第一个直角三角形沿母线翻折，得到其轴对称形 $\text{Rt}\triangle O_{23}P_1L$(图 9). 这样，就有三个顺向相似的直角三角形：$\text{Rt}\triangle O_{23}P_1L, \text{Rt}\triangle O_{23}P_2M, \text{Rt}\triangle O_{23}P_3N$ 在围绕 O_{23} 点作

旋转.(画板中,可用控制点 X 来操纵旋转过程.)

而这正是 Miquel 定理的基本结构:当三对应点 P_1,P_2,P_3 沿着 $\triangle L_1L_2L_3$ 三边移动时,$\triangle P_1P_2P_3$ 是形状不变的 Miquel 三角形,而 O_{23} 正是其 Miquel 点.

由此对应得到的 $\triangle P_0MN$ 位置始终不变,所以,它就是特征三角形!

换句话说:

定理 2 特征三角形就是 O_{23} 对于 $\triangle L_1L_2L_3$ 的垂足三角形.

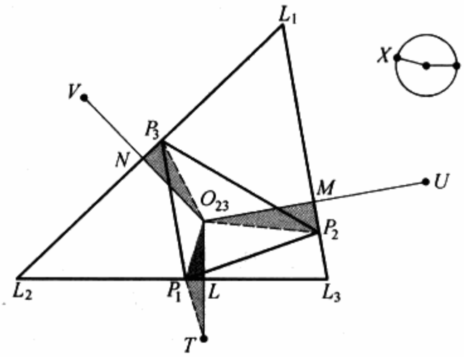


图 9

其实,以 $\triangle L_1L_2L_3$ 和点 O_{23} 为基础,整个"两正一反三相似"构形就完全特征地决定了(图 10).也就是说,一切对"两正一反三相似形"的研究,可以立足在这一特征图形的基础上;而可将不带有特征意义的三条对应线段 A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3 从后面的讨论中摒除出去.

(从图 10 中可观察到如下现象:T,U,O_{13} 共线;T,V,O_{12} 共线.其实,这很容易给予以解释,后文将提及.)

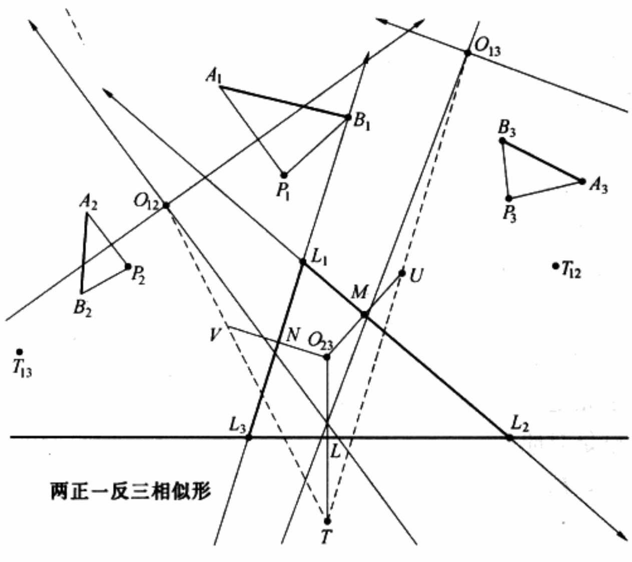


图 10

但是,下面将揭示,$\triangle L_1L_2L_3$ 在整个讨论中的地位并不突出,它没有什么本质的属性.我们将改以 L,M,N 为顶点的三角形作为基本出发点(M,N 就是图 10 中线段 $O_{23}U$ 及线段 $O_{23}V$ 的中点),从而导致下面的特征化模式.

为什么要强调 M,N 两点的重要性呢?

原因在于发现了一个重要的现象:

当把1中所提到的 $\triangle PMN$ 的底边直接选择为上述 MN 线段时(所以采取了相同的字母名称),则作为与母线平行的一族直线的像的圆,恰好与母线相切(图11)!

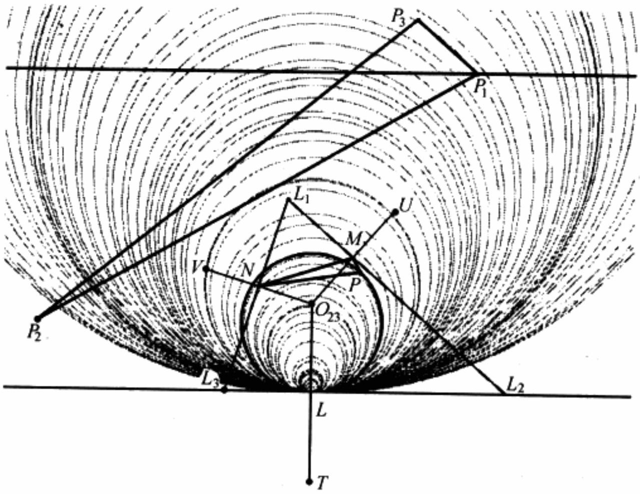


图 11

换言之:

定理 3 作 $\triangle PMN \backsim \triangle P_1P_2P_3$,当 P_1 沿平行于母线的直线移动时,P 点在一个与母线相切的圆上运动.

即:母线的平行线族,经 $P_1 \to P$ 的变换后,变为以母线为根轴,以 L 点为公共切点的第三类共轴圆系.

为了讨论的方便,下面我们改以 A,B,C,D 四个常用字母来重新标记 L,M,N,O_{23} 四点.

6 特征化模式

如图12所示,在 $\triangle ABC$ 中,D 是任意一点,E 是 D 点关于顶点 A 的中心对称点.作 $\triangle P_1AE$(反) $\backsim$ $\triangle P_2BD$(正) $\backsim$ $\triangle P_3CD$(正),则动点组 P_1,P_2,P_3 可代表三对应点.

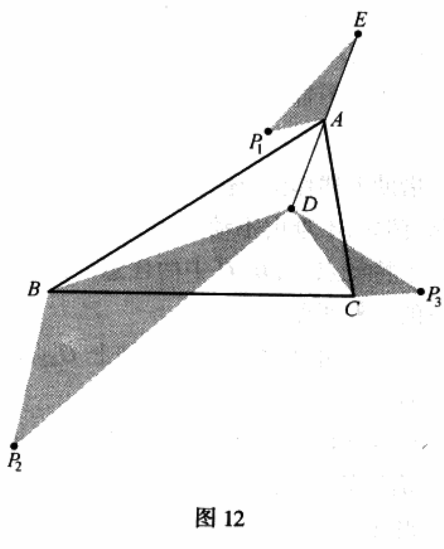


图 12

这就是“两正一反三相似形”的标准模

式.

其中,A 是母点(下文马上解释这样称呼的理由),D 是 Ⅱ、Ⅲ 间的相似不动点,E 是影消点.$\triangle ABC$ 代表了特征三角形.由定理1知,母线就是经过顶点 A 所作的 AD 的垂线.

有向线段 AE,BD,CD 正是三相似形中三条基本的对应线段,所以,它们的长度之比代表了三幅相似形的比例.

换句话说,D 点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离之比就是三相似形间的相似比.

试图从这个特征构形出发,确定其他的一些特征对象,如除 D 以外的另外两个不动点、相似轴、前述两种二次曲线等等,是颇具挑战性的任务.

在这些课题的研究过程中,可以采取复数的方法、解析几何的方法、重心坐标的方法.

下面以不动点 O_{12} 和 O_{13} 的构作为例.

引理 将点 P 变为 Q,Q 变为 R 的反相似变换,其不动点就是 $\triangle PQR$ 的外接圆在 Q 点处的切线与直线 PR 的交点.

证明 设过 Q 点的切线与 PR 交于 O 点(图13).易知 $\triangle OPQ$ 反相似于 $\triangle OQR$,故 O 就是上述变换的不动点.

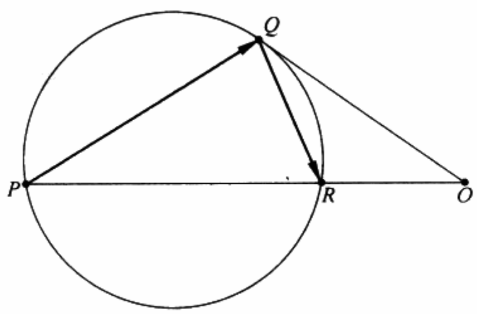


图 13

由引理,O_{12} 和 O_{13} 可按如下步骤作出(图14):

作出 D 关于 B,C 两点的中心对称点 V,U 分别取 $\triangle ABD$,$\triangle ACD$ 的外心 O_1,O_2.过 D 作线段 O_1D 的垂线,与直线 VE 的交点即为 O_{12};同样,过 D 作线段 O_1D 的垂线,与直线 UE 的交点即为 O_{13}.

上述作图告诉我们

$$\angle O_{12}DO_{13} = \angle BDC - \angle BAC$$

借助上述作法,还可以考虑逆向作图的问题.例如,不难由不动点 D,O_{12},O_{13},再加上三个特征点 A,B,C 中的任意一点,确定剩下的另外两点.

也可以由 A,B,C 三点,加上 O_{12},确定 D 和 O_{13}.

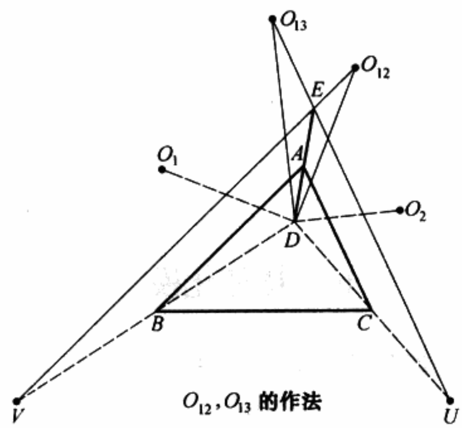


图 14

至于由 A,B,O_{12},O_{13}(或 B,C,O_{12},O_{13})确定其余两点,则似有一定难度.

当 A,B,C 三点固定,而 D 点沿着某条直线运动时,O_{12},O_{13} 的轨迹是双曲线(图

15)，它们各有一条渐近线垂直于给定直线，而另两条渐近线则分别平行于 AB 和 AC. 所以，当直线平移时，上述双曲线的离心率不变.

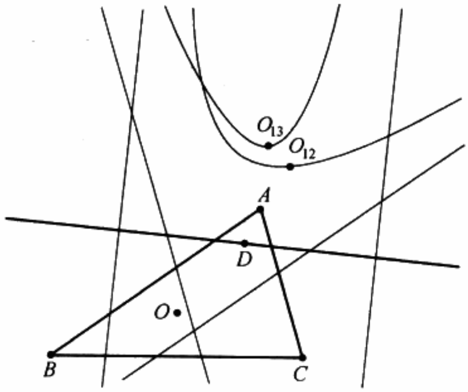


图 15

特别是，当这条直线经过 $\triangle ABC$ 的外心时，其中两条渐近线便重合于过外心的垂线，而另两条渐近线恰相交于外心 O 关于 A 点的中心对称点. 这些现象值得继续探讨.

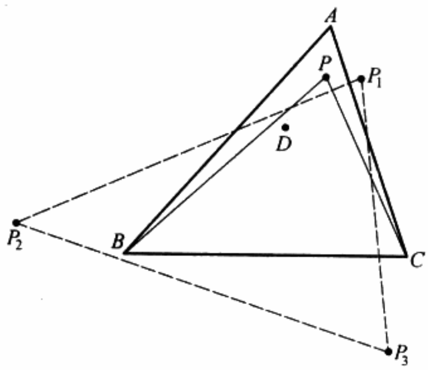


图 16

7　不可及圆的刻画

再作 $\triangle PBC \backsim \triangle P_1P_2P_3$（顺相似）（图 16），则正如前述，$P_1 \to P$ 的变换规律是我们颇感兴趣的课题之一. 尤其是讨论直线在变换前后的规律.

由定理 3 知，平行于母线的一族直线，经变换后，成为一族相切于顶点 A 的圆（第三类共轴圆系）.

所以，顶点 A 也就是前面课题 1 中提到的特征点——所有的直线的像所共同经过的母点.

当平行线成为无穷远线时，其像对应于一个特殊的圆，它应该就是前面所提出的不可及圆.

循着这条思路，2005 年 12 月 15 日完成了对不可及圆的刻画，得到如下基本结论：

定理 4　不可及圆是以不动点 D 为圆心，并与母线相切于 A 点的圆（图 17）.

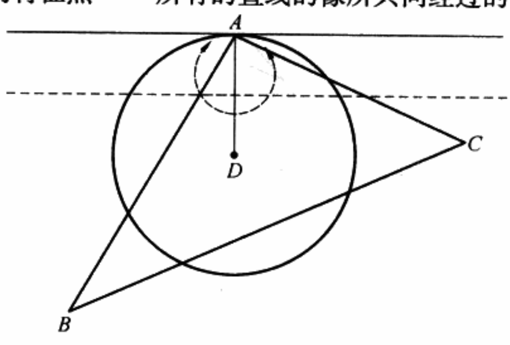


图 17

不可及圆一经刻画，课题 1 中所提到的

轨迹圆所经过的另一定点也就迎刃而解.

定理 5 过 A 点作给定直线 l 的平行线,记它与不可及圆的另一交点为 K,则直线 l 的像是经过 A,K 两点的一个圆(图 18).

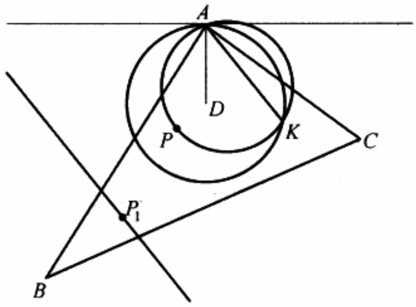


图 18

换言之,这一方向上的平行线族,其像是以 A,K 两点为公共点的第二类共轴圆系;K 点也就是这一方向上的无穷远点的像!

在定理 5 的基础上,我们给出了如下对 McCay 二次曲线的分类:

定理 6 "两正一反三相似"构形中的 McCay 二次曲线是椭圆、抛物线或双曲线,取决于不可及圆与直线 BC 的相离、相切或相交.

尤其当不可及圆与 BC 相交时,设交点为 I,J,则 McCay 双曲线的渐近线必与 AI,AJ 平行,由此就可推算出其离心率(图 19).

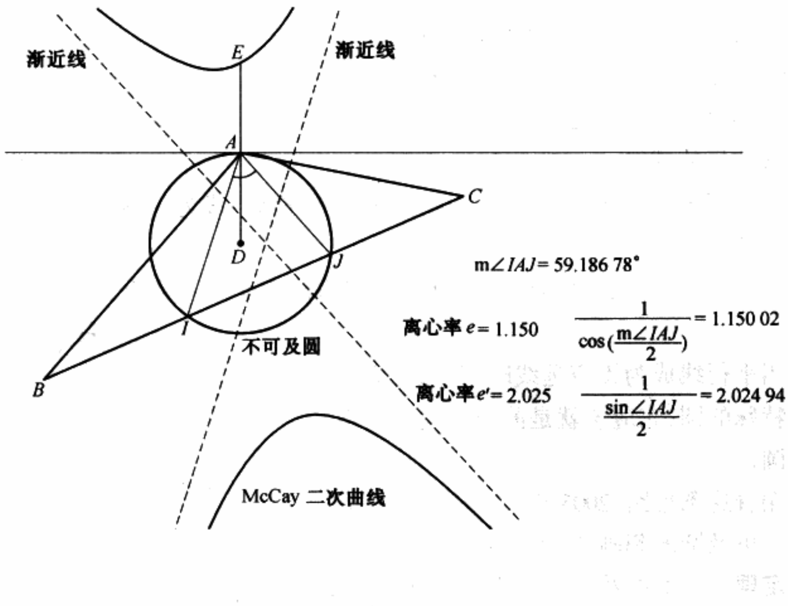


图 19

定理 7 若不可及圆与直线 BC 相交于 I, J 两点，则 McCay 二次曲线的离心率等于 $\frac{1}{\cos\frac{\angle IAJ}{2}}$ 或 $\frac{1}{\sin\frac{\angle IAJ}{2}}$.

一般地，可给出 McCay 二次曲线离心率的统一公式.

定理 8 设 D 到顶点 A 的距离为 r，到对边 BC 的距离为 d，则 McCay 二次曲线的离心率 $e=\sqrt{\frac{2r}{r\pm d}}$(图 20).

(当 $d<r$ 时为双曲线，其离心率可能取两个值中的一个，取决于双曲线位于渐近线中哪一对区域.)

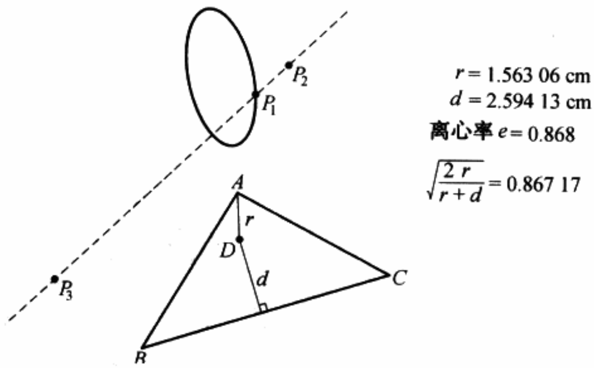


图 20

8 $P_1\to P$ 变换的分解

既然定理 3 告诉我们：母线的平行线族变换成以 A 为公切点的第三类共轴圆系，那么，再经一次以 A 为中心的反演变换，又可将这些圆变回成直线！

上面这一想法十分奏效，由此即可用变换复合的思想来简化问题，从而有助于对这一变换的理解.

为了深入揭示 $P_1\to P$ 的规律，引入 P 点关于以 AD 为半径的圆的反演点 Q(图 21).

$P_1\to Q$ 的变换比 $P_1\to P$ 的变换更易把握：它把所有直线变为直线；把所有圆变为二次曲线，所以提示我们这应该是一种射影变换. 经验证果然如此(图 22).

定理 9 $P_1\to Q$ 是一种射影变换，以过 A 点所作 AD 的垂线(母线)为影消线，以线段 AD 的垂直平分线为无穷远线；D 点及线段 AE 的中点是这一变换的两个不动点，这几条平行线上的无穷远点是这一变换的第三个不动点(图 23).

定理 9 表明，我们业已将 $P_1\to P$ 的变换成功地分解为一次射影变换和一次反演变换的复合.

对上述变换的定量刻画如下：

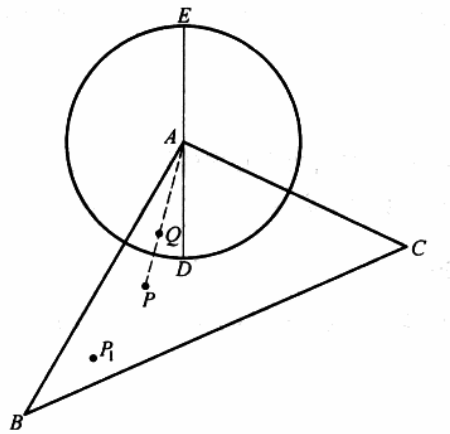


图 21

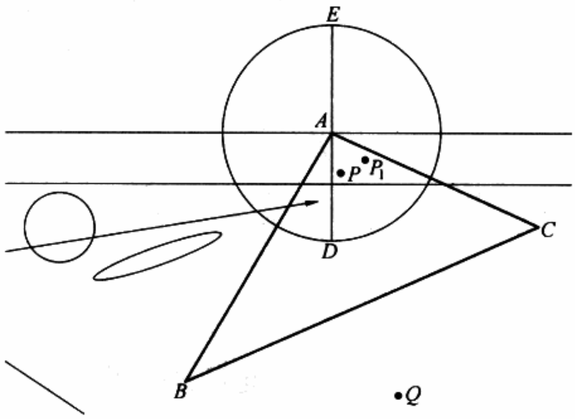


图 22

定理 10　设 AD 的长度为 r，P_1 和 Q 两点到母线的距离分别为 x,y，到直线 AD 的距离分别为 p,q. 则成立如下关系：(1) $2xy = r(r+x)$；(2) $\frac{p}{q} = \frac{2x}{r}$.

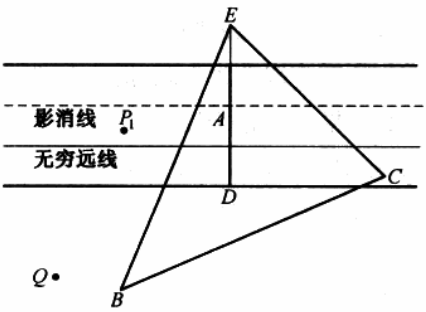


图 23

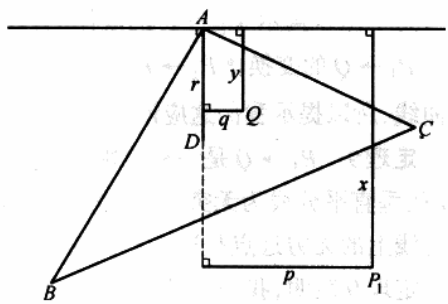


图 24

9　上述变换的逆变换及 McCay 二次曲线作图

根据变换复合的“穿脱原理”，$P \to P_1$ 这一逆变换可分解成 $P \to Q$ 和 $Q \to P_1$，前者是反演，后者是射影变换.

由于反演变换具有保圆性，而射影变换则把圆变为二次曲线，于是，作为综合效应，逆变换 $P \to P_1$ 把一切直线或圆变为二次曲线.

特别地，它把特征化模式中的直线 BC 变成一条特定的二次曲线——它就是 McCay 二次曲线 Ⅰ. 依此，便可给出 McCay 二次曲线的精确作图(图 25).

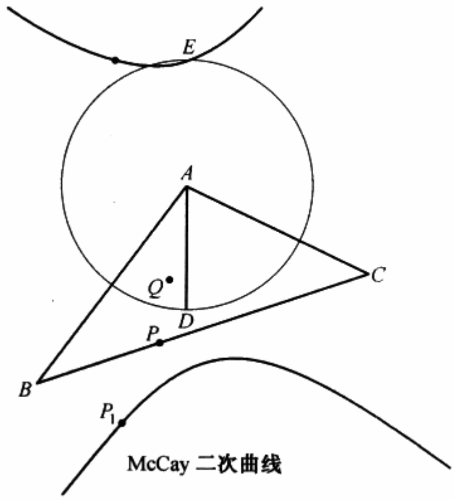


图 25

图 26 中，我们从特征模式出发，同时精确画出了 McCay 二次曲线 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，并构造出了不动点 O_{12}，O_{13}.

又如，对 BC 边的垂直平分线作逆映射，所得到的二次曲线，是使得 $\triangle P_1P_2P_3$ 成为等腰三角形(其中 $P_1P_2 = P_1P_3$)的 P_1 点的轨迹(图 27).

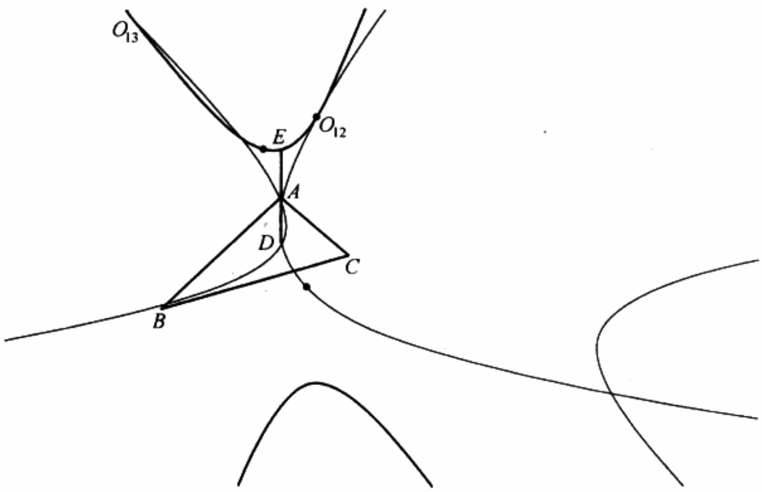


图 26

而使 $P_1P_2 : P_1P_3$ 为定值的 P_1 点的轨迹，是图 28 所示的一族二次曲线，以 O_{12}，O_{13} 为两个极限点.

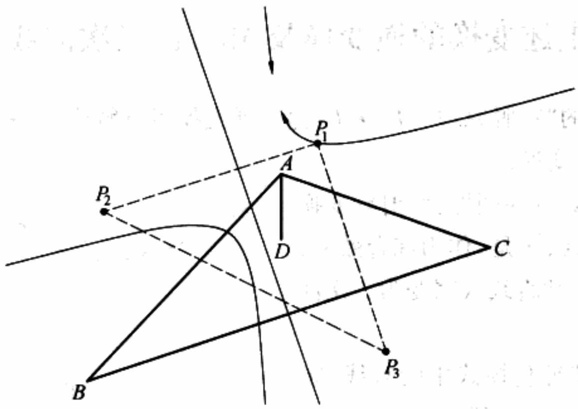


图 27

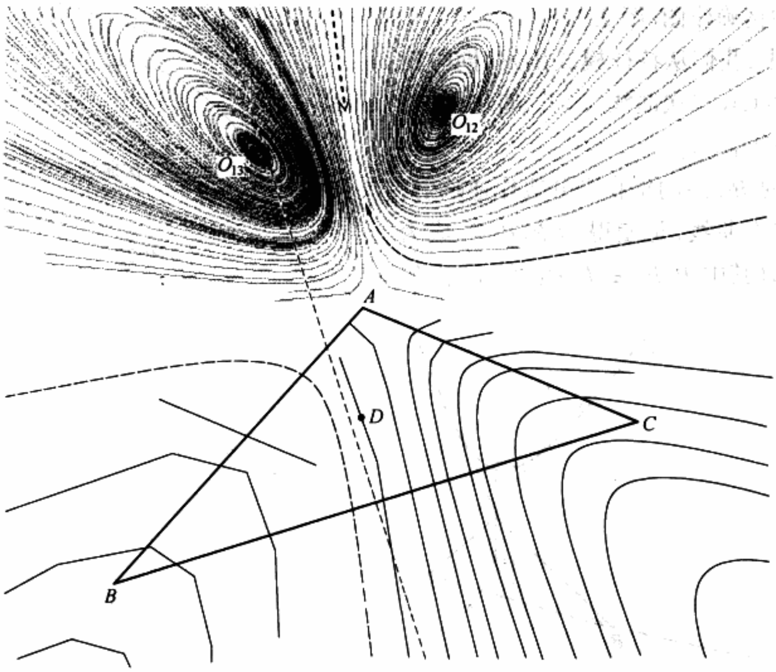


图 28

10　退化模式

正如三顺相似形有退化情形,"两正一反三相似形"也存在退化情形.

把三张相似形的某一对应点故意重叠到一起,便可容易地得到退化情形.这时三个

不动点 O_{23}, O_{13}, O_{12} 重合于同一点 O.

在三顺相似形的退化情形中,三对应点所构成的三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 始终保持同一形状(Peterson-Schoute 定理).

而在"两正一反三相似形"的退化情形中,我们发现:三对应点所构成的三角形——$\triangle P_1P_2P_3$ 却局限在一个圆形集中变化(图 29)!

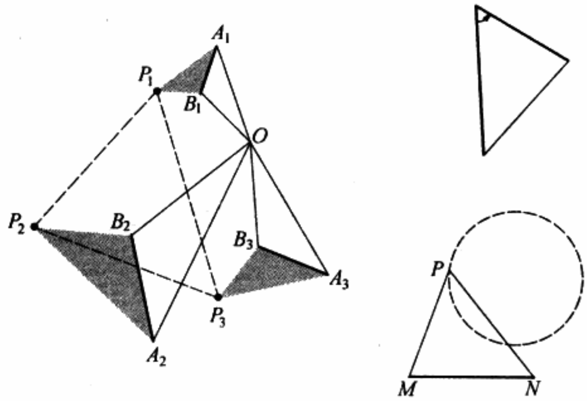


图 29

这是一个非常深刻的现象,揭示了退化情形与一般情形有本质上的差异.

(图 29 中,作为预先给定的三对应线段 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,须满足:$\triangle OA_1B_1$(反)$\backsim \triangle OA_2B_2$(正)$\backsim \triangle OA_3B_3$(正),其中 O 就是那个重合在一起的不动点;而动点组 P_1, P_2, P_3 则满足:$\triangle P_1A_1B_1$(反)$\backsim \triangle P_2A_2B_2$(正)$\backsim \triangle P_3A_3B_3$(正).右下方显示的是该圆形集的特征圆;右上方是顺相似形 Ⅱ、Ⅲ 间的特征三角形.)

当 P_1 点沿着过不动点 O 的一条直线移动时,$\triangle P_1P_2P_3$ 位似地变化,即此时 P 是定点;也就是说,以 O 为中心的线束,与圆形集特征圆上的点有种一一对应的关系(图 30).

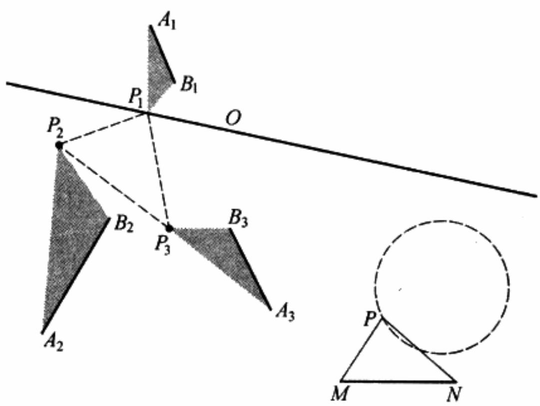


图 30

我们把它总结为:

定理 11 特征圆上的每一点 P,对应于一条过 O 点的直线,它与线段 OH_1 的夹角等于$\frac{1}{2}\ \overset{\frown}{HP}$. 当 P_1 点在这条直线上运动时,P_1,P_2,P_3,O 四点始终相似于 P,M,N,L 四点(图 31).

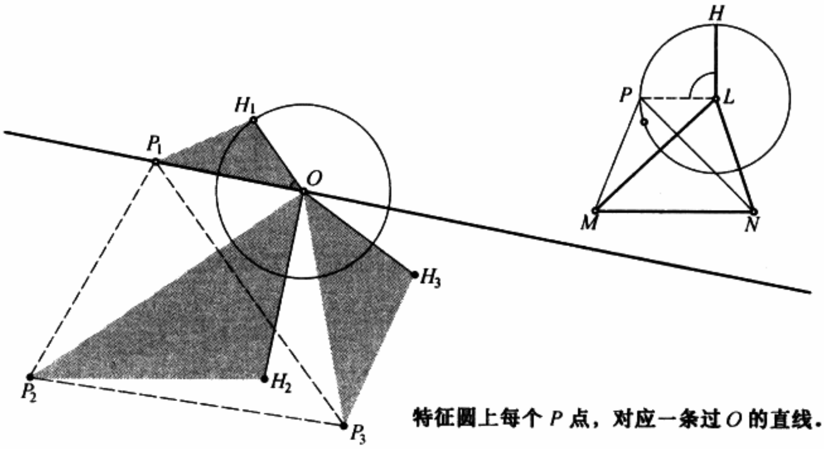


图 31

对于退化情形,"两正一反三相似形"的原有特征模式完全失效了,除了共有的不动点 O 是其重要特征外,上述特征圆和相似形 Ⅱ、Ⅲ 间的特征三角形显然也是其特征之一,但下面的重要关系表明后二者并不独立:

定理 12 记该圆形集特征圆的圆心为 L,则 $\triangle LMN \backsim \triangle OP_2P_3$,其中,$\triangle OP_2P_3$ 就是相似形 Ⅱ、Ⅲ 间的特征三角形(图 32).

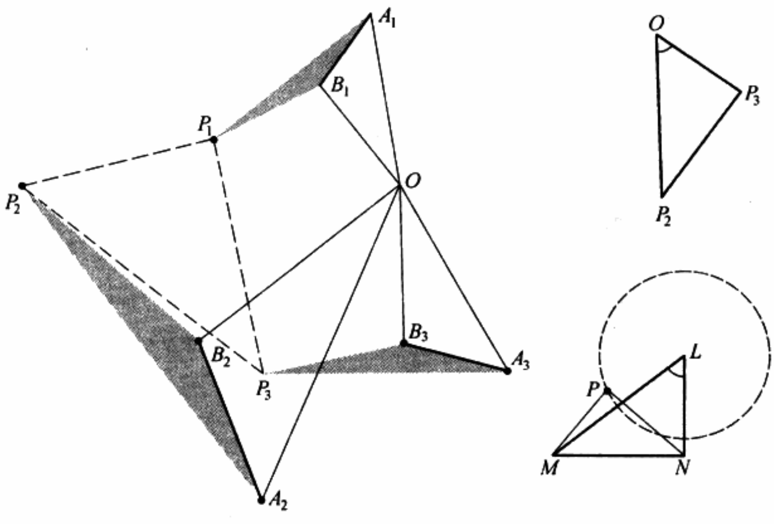


图 32

定理 13 设特征圆的半径为 R,则 $R:LM:LN$ 正是三相似图形中对应线段的长度比.

定理 13 表明:圆形集特征圆的半径仅与相似形 Ⅰ 关于 Ⅱ、Ⅲ 的相对大小有关;也就是,当相似形 Ⅰ 绕着 O 点旋转时,特征圆的大小并不会发生改变(图 33).

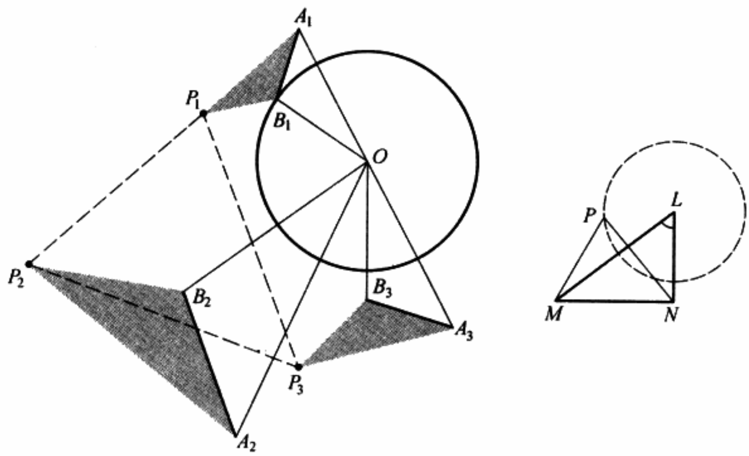


图 33

为了特征地刻画退化情形,除了不动点 O 和圆形集这两个基本对象外,还需要追加一个确定三相似图形大小和方向的辅助点.

例如,可选择特征圆上的最高点 H.在相似图形 Ⅰ 中,取出以 O 点为圆心的单位圆,并在此单位圆上指定一点 H_1,使它作为其最高点.

然后按如下次序来构作:由 $\triangle H_1OH_2 \backsim \triangle HLM$,$\triangle H_1OH_3 \backsim \triangle HLN$ 确定 H_2,H_3 两点;

对于动点 P_1,由

$$\triangle P_1H_1O(\text{反}) \backsim \triangle P_2H_2O(\text{正}) \backsim \triangle P_3H_3O(\text{正})$$

确定其三相似对应点 P_2,P_3.

这样,整个对应关系就完全特征地决定了(图 34).

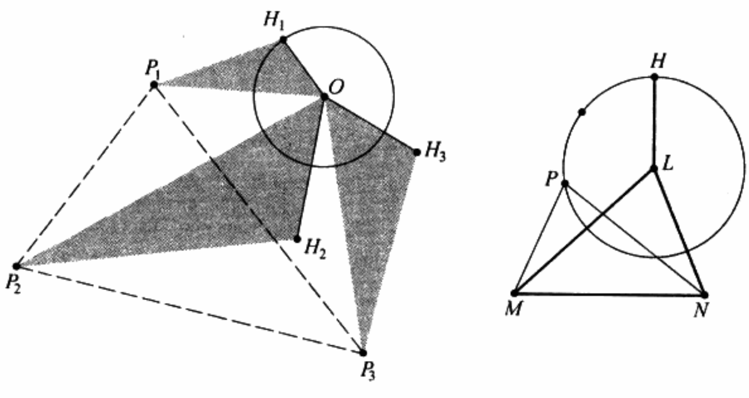


图 34

不动点、圆形集和辅助点 H_1，这三者合在一起，构成了退化情形的完备特征组.

（必要时，我们甚至可以将线段 H_1O 适当缩放后重叠于线段 HL，让三对应点 P_1,P_2,P_3 安置在圆形集的特征图形附近，即通过 $\triangle P_1HL$(反) $\backsim \triangle P_2ML$(正) $\backsim \triangle P_3NL$(正) 来确定三相似对应点 P_1,P_2,P_3，从而以这一紧凑的形式来研究退化模式(图 35).）

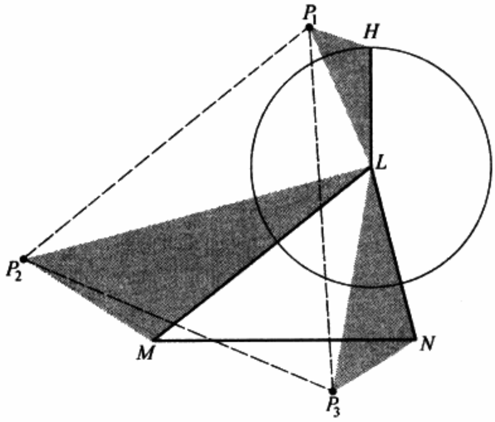
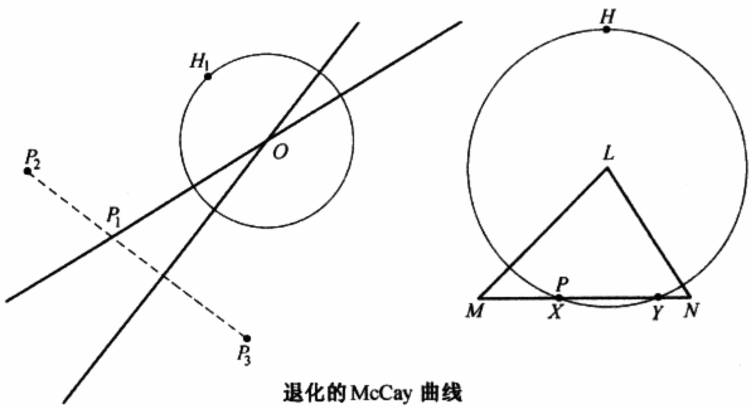


图 35

退化模式中，McCay 二次曲线未必总存在.

定理 14 在退化模式中，McCay 二次曲线存在的充要条件是特征圆与直线 MN 相交(或相切)；这时 McCay 二次曲线退化为交于 O 点的两条(或一条)直线，其夹角等于上述交点间所夹弧的度数的一半.

如图 36 中，设特征圆与 MN 相交于 X,Y 两点，这时 McCay 二次曲线 Ⅰ 为图中所示的相交直线，它属于退化的双曲线，这两条直线的夹角等于 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{XY}$.



退化的 McCay 曲线

图 36

定理 15 在退化模式中，Brocard 二次曲线也退化为两条相交于不动点 O 的直线，而且，它们按定理 11 的方式分别对应于特征圆与 $\triangle LMN$ 外接圆的两个交点.

如图 37 中,设特征圆与 $\triangle LMN$ 的外接圆相交于 U,V 两点,这时 Brocard 二次曲线即图中显示的两条直线,也属于退化的双曲线,其夹角等于$\frac{1}{2}\angle ULV$.

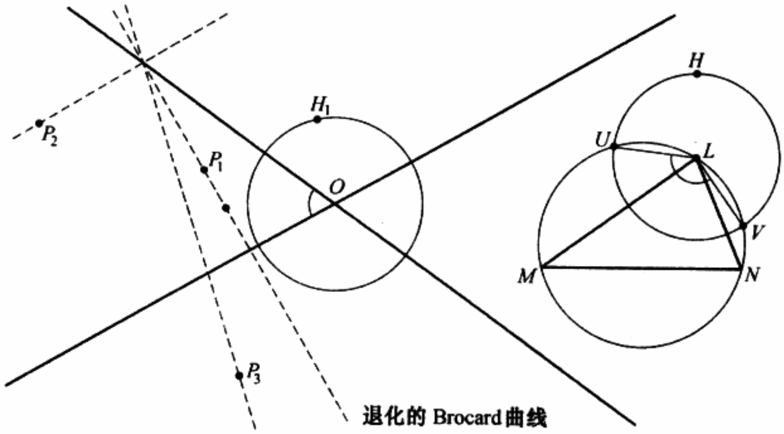


图 37

另外,几何画板显示,相似形 Ⅰ、Ⅲ 间的逆相似轴与相似形 Ⅱ、Ⅲ 间的逆相似轴(各取正的一条或各取负的一条)之间的夹角,仅与特征三角形有关,并且恰好等于其顶角$\angle P_2OP_3$ 的一半(图 38).

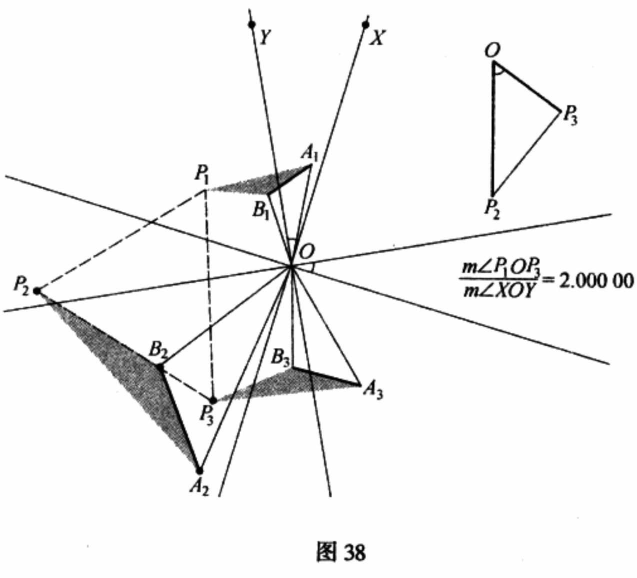


图 38

11 三条对应直线

下面进一步研究"两正一反三相似形"中的三对应直线.

如图 39,设 $P_1P'_1, P_2P'_2, P_3P'_3$ 是相似形 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 中的三条对应直线,它们两两的交点记作 I_1, I_2, I_3.

由于 Ⅰ、Ⅱ 间属于顺相似关系,所以 $\angle I_1$ 的大小保持不变,始终等于 $180° - \angle BDC$.

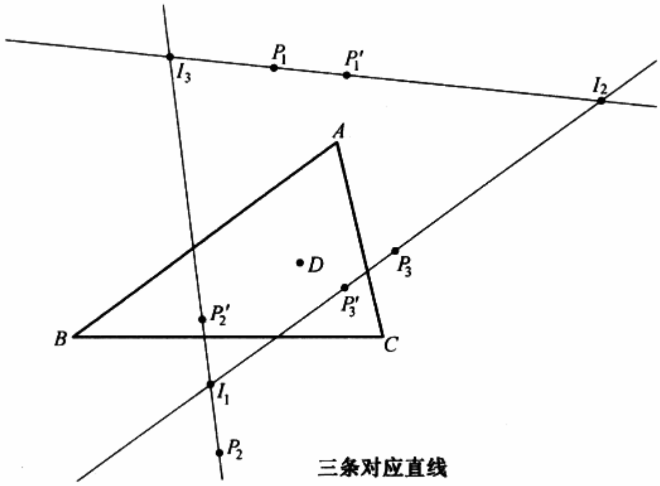


图 39

当三对应直线平移时,I_1, I_2, I_3 在三条共点的直线上移动,其中 I_1 的轨道还经过 D 点(当直线 I_2I_3 通过影消点 E 时,I_1 便重合于 D).

换言之,$\triangle I_1I_2I_3$ 形成一族位似形,其位似中心 P 就是三对应线共点时的相应公共点(图 40).

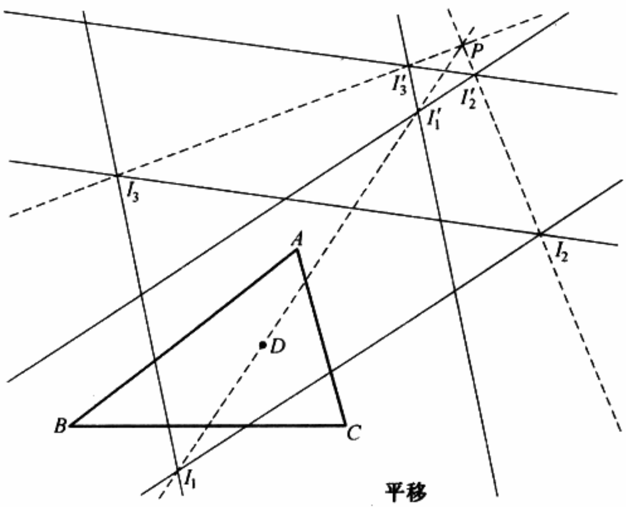


图 40

利用上述规律,就可在几何画板中精确作出三对应线所共点的轨迹——课题 3 中所

提到的 Brocard 二次曲线(图 41)

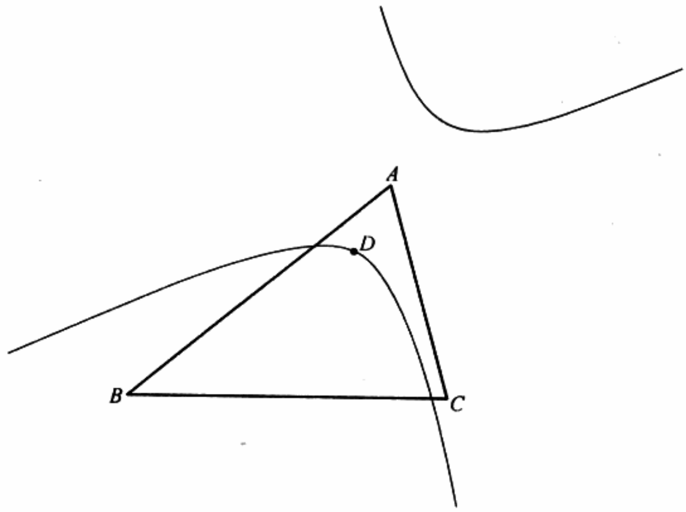


图 41

虽说我们尚不清楚这条二次曲线所具备的更多性质,不过已成功得到了其离心率的定量结果.

定理 16 Brocard 二次曲线与 $\triangle DBC$ 的外接圆恰好相切于 D 点.

定理 17 设 D 到顶点 A 的距离为 r,$\triangle DBC$ 的外接圆直径为 d,则 Brocard 二次曲线的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{2d}{d\pm r}}$(图 42).

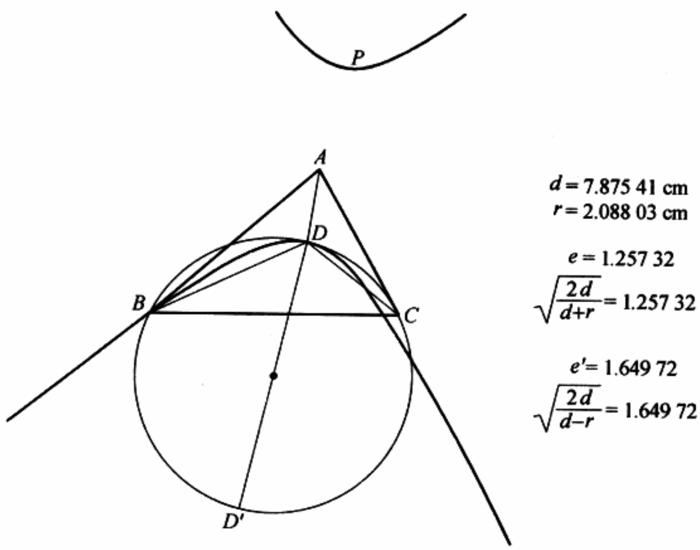


图 42

（当 $r < d$ 时为双曲线，这时其离心率会在两个可能值之间跳跃，取决于双曲线位于渐近线中哪一对区域.）

定理17和定理8在形式上虽相像，但因 D 到 BC 边的距离与 $\triangle DBC$ 的外接圆直径长度之间并无必然联系，因而，在同一"两正一反三相似形"构形中，Brocard 二次曲线和 McCay 二次曲线的离心率一般说来是彼此独立的.

$\triangle ABC$ 给定后，当 D 点落在一条高次曲线上时，所对应的 Brocard 二次曲线恰为抛物线；当 D 点位于曲线上方或下方时，Brocard 二次曲线分别取双曲线或椭圆(图 43).

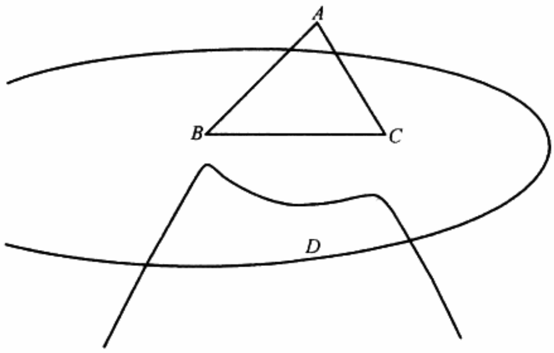


图 43

还可采用如下办法来操纵三对应直线：

由动点 P_1 作线段 EP_1 的垂线，其中 E 是影消点——将这条垂线作为相似形 Ⅰ 中的任意直线；再取 P_1 的相似对应点 P_2, P_3，分别自 P_2, P_3 作线段 DP_2, DP_3 的垂线，它们就是相似形 Ⅱ、Ⅲ 中的对应直线.

随意拖动 P_1 点，便可灵活地观察这三条直线所围成三角形的变化.

猜测　当上述三对应直线共点时，P_1 点所形成的轨迹也是一条二次曲线，而且，恰与 Brocard 二次曲线相位似(图 44)！(已在几何画板中作了验证)

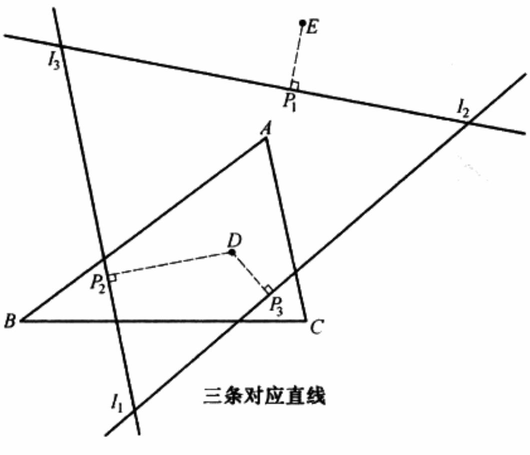


图 44

上述猜测表明,“两正一反三相似形”中的三线共点现象,比起三个顺相似形要复杂一些.在三个顺相似形构形中,全体满足共点条件的直线,在每幅图形中形成线束,线束的中心就是所谓的“不变点”,即第一 Brocard 三角形的顶点,而在“两正一反三相似形”构形中,这些直线的包络却是复杂的,是 P_1 点沿二次曲线运动时 EP_1 的垂线所形成的.

下面再用运动的观点讨论三条对应直线两两的交点所形成的轨迹.

当 P_1 沿直线运动时,I_1 的轨迹是一条直线;I_2,I_3 的轨迹是图 45 所示的复杂曲线.

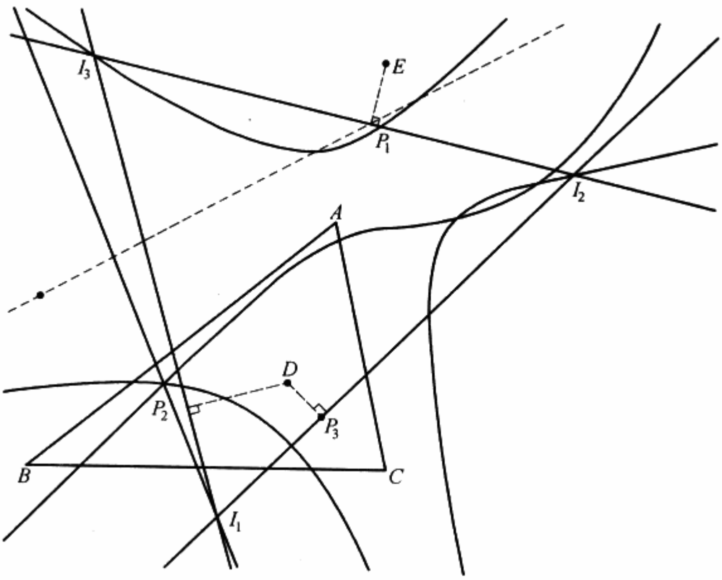


图 45

当 P_1 沿以 E 点为圆心的圆运动时,I_1 的轨迹是圆;I_2,I_3 的轨迹则是一种双股状的曲线,酷似二次曲线,其实并不是(图 46).

当 P_1 沿其他圆运动时,I_1 的轨迹仍是圆;而 I_2,I_3 的轨迹(有时)成了形状狭长的曲线(图 47).

当上述圆经过 E 点时,这就相当于三条对应直线分别绕三个定点 X_1,X_2,X_3 旋转(其中 X_1 就是 E 在圆上的对径点;X_2,X_3 是 X_1 的三相似对应点).这时,轨迹的复杂性有所下降.

具体说来:I_1 的轨迹是经过 D,X_2,X_3 三点的圆;I_2 的轨迹是经过 X_1,X_3 点的一条二次曲线;I_3 的轨迹是经过 X_1,X_2 点的一条二次曲线.

这里我们还观察到一种非常有趣的曲线共点现象:上述圆、两条二次曲线,再加上 Brocard 二次曲线,这四条曲线总存在一个(甚至三个)公共点(图 48)!

公共点和定点 X_1 的对应关系究竟如何?乃是个耐人寻味的问题.

(如:当 X_1 点位于直线 AD 上时,D 点便一定是它们的公共点.)

当三对应直线分别绕 A,B,C 三点旋转时,还表现出如下特异的性质:点 I_1 的轨迹

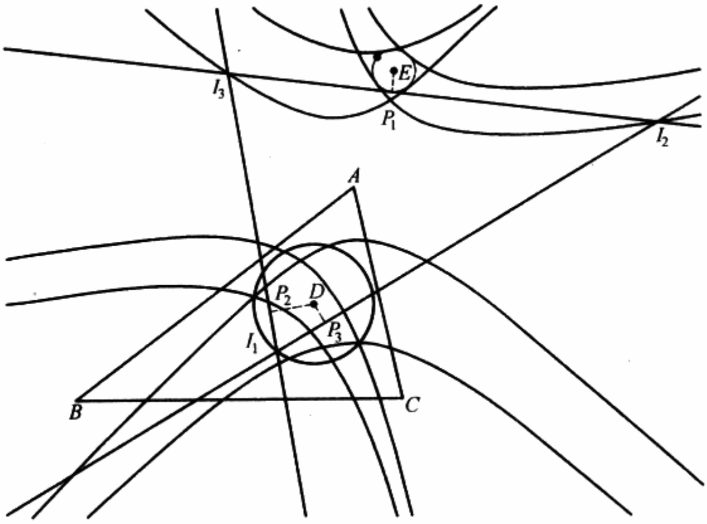


图 46

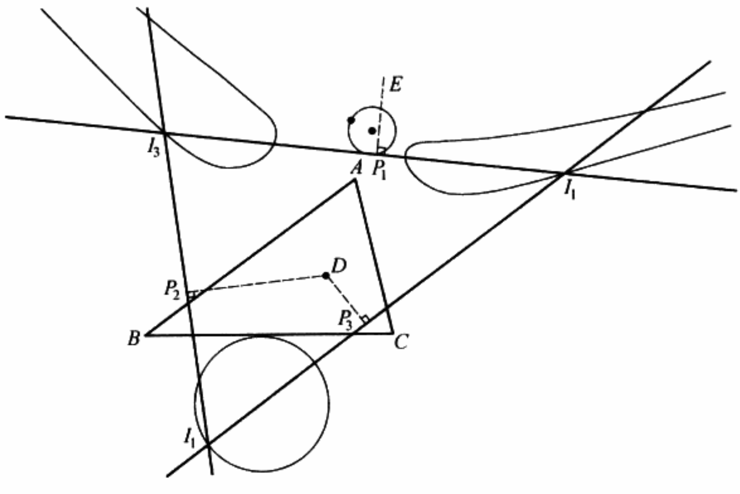


图 47

是 $\triangle DBC$ 的外接圆；点 I_2 的轨迹是经过 A,C,D,O_{13} 四点的等轴双曲线，其中心恰是 AC 边的中点；点 I_3 的轨迹是经过 A,B,D,O_{12} 四点的等轴双曲线，其中心恰是 AB 边的中点. 而且这两条等轴双曲线除交于 A,D 两点外，另外两个交点一定位于 $\triangle DBC$ 的外接圆上(图 49).

下文中，我们同时考虑"两正一反三相似形"三个不动点，并讨论它们与三条对应直线所围成的三角形之间的联系. 为统一起见，仍将相似形 Ⅱ、Ⅲ 的不动点 D 标记为 O_{23}，并把以 O_{23},O_{13},O_{12} 为顶点的三角形称作相似三角形.

定理 18 由三条对应直线所围成的 $\triangle I_1I_2I_3$ 透视于相似 $\triangle O_{23}O_{13}O_{12}$(图 50).

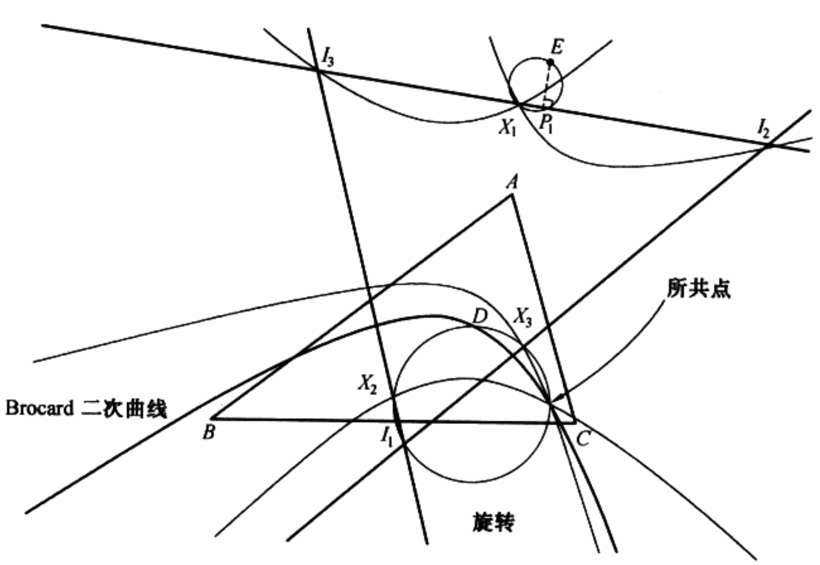
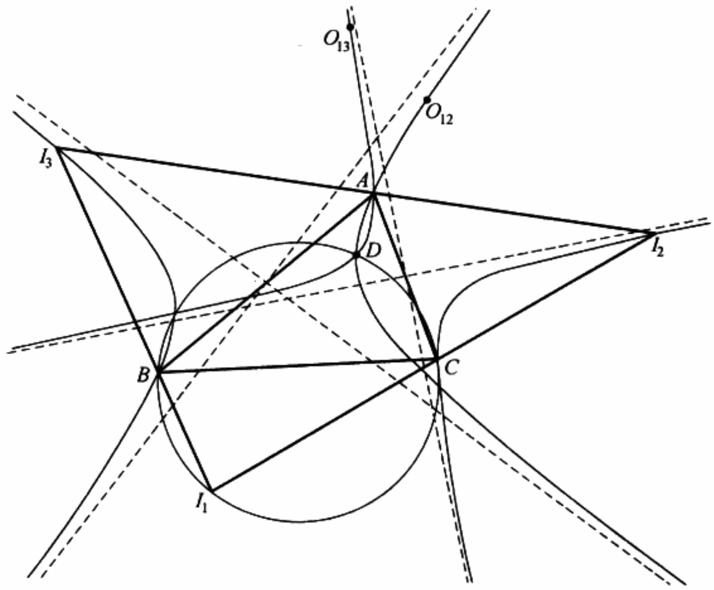


图 48



分别过 A,B,C 三点的三对应直线围成的三角形

图 49

证明 设三相似形的相似比为 $k_1:k_2:k_3$(图 51).因 O_{23} 是相似形 Ⅱ、Ⅲ 的不动点,故它到对应直线的 I_1I_2,I_1I_3 的距离比为 $k_3:k_2$.于是

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{O_{23}P}{O_{23}I_1}:\frac{O_{23}Q}{O_{23}I_1}=\frac{O_{23}P}{O_{23}Q}=\frac{k_3}{k_2} \qquad ①$$

同理

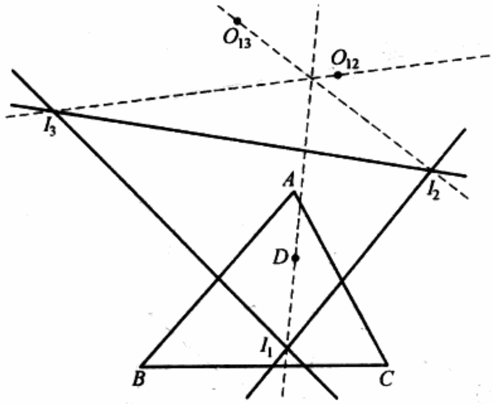


图 50

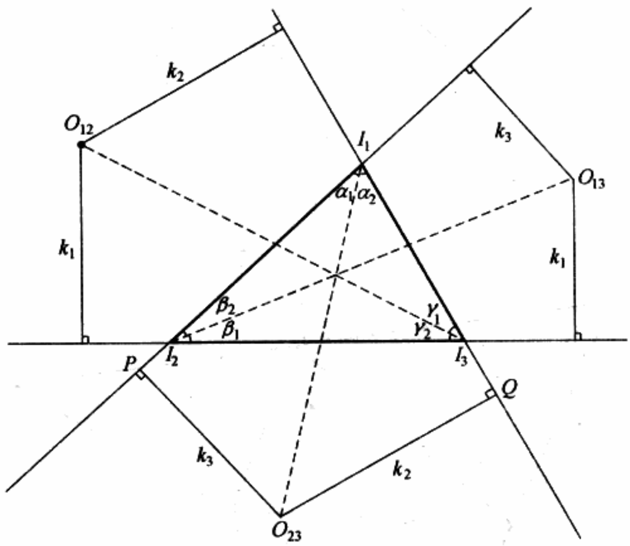


图 51

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{k_1}{k_3} \quad ②$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{k_2}{k_1} \quad ③$$

将 ①、②、③ 相乘，得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{k_3}{k_2}\cdot\frac{k_1}{k_3}\cdot\frac{k_2}{k_1}=1$$

根据 Ceva 逆定理，知 $O_{23}I_1, O_{13}I_2, O_{12}I_3$ 共点，即 $\triangle I_1I_2I_3$ 与 $\triangle O_{23}O_{13}O_{12}$ 透视. 证毕.

注：上述证明也适用于三个顺相似形中的类似结论(《近代欧氏几何学》§ 518).

推论　透视中心对于 $\triangle I_1I_2I_3$ 的三线性坐标即为三张图形的相似比 $k_1 : k_2 : k_3$. 其实,Brocard 二次曲线正是全体透视中心所形成的点集.

12　三角形周围的三相似形

对于一个给定的 $\triangle ABC$,将它的三条边作为对应线段,这样构作而得到的三相似图形通常会表现出特有的属性。

例如,以三边构作顺相似形,有如下两种基本类型:

类型 1　$\triangle P_1CB \backsim \triangle P_2AC \backsim \triangle P_3BA$.

其特点是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心始终是一个定点,即 $\triangle ABC$ 的重心 G(图 52).

类型 2　$\triangle P_1BC \backsim \triangle P_2AC \backsim P_3BA$.

其特点是 $AP_3P_1P_2$ 始终是一个平行四边形(图 53).

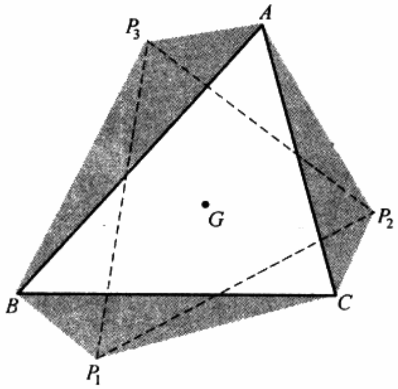


图 52

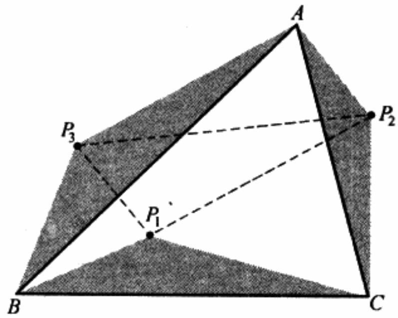


图 53

倘若以三边构作“两正一反三相似形”,则变化更多,我们主要对如下两种结构比较对称的类型感兴趣:

类型 3　$\triangle P_1BC$(反)$\backsim \triangle P_2CA$(正)$\backsim \triangle P_3AB$(正)(图 54).

类型 4　$\triangle P_1BC$(反)$\backsim \triangle P_2AC$(正)$\triangle P_3BA$(正)(图 55).

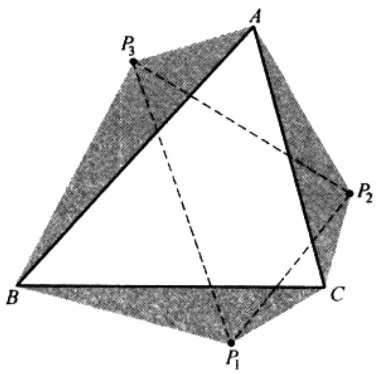


图 54

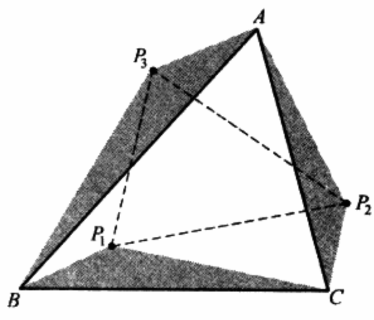


图 55

类型 3 表现出的特点是：$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心始终位于垂直于 BC 边的一条直线上（$\triangle ABC$ 的重心 G 也在该线上（图 56））.

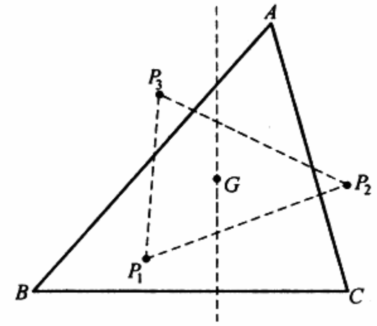


图 56

其另一特点是：线段 P_2P_3 和 AP_1 的中点连线始终平行于底边 BC（图 57）.

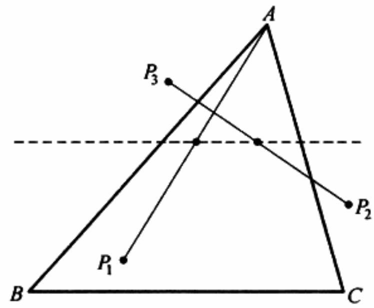


图 57

至于类型 4，其特点是：$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心始终位于一条平行于 BC 边的直线上（$\triangle ABC$ 的重心 G 也在该线上（图 58））.

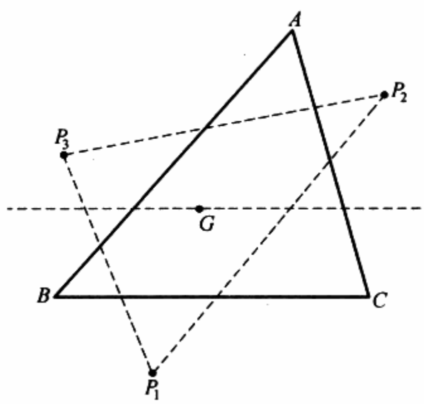


图 58

我们试图通过特征化模式，揭示类型 3 和类型 4 的内在特点，但仅取得初步结果.

我们发现，这两种类型的四个特征点都仅存在三个自由度，但究竟如何由前三个点确定第四个点还未完全搞清楚.

对于类型 3，仅知道四个特征点满足$\frac{LN}{LM}=\frac{O_{23}M}{O_{23}N}$(图 59).

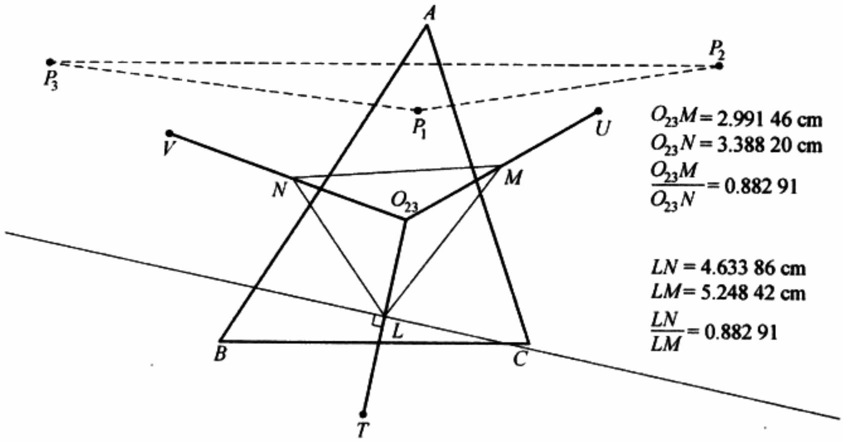


图 59

至于类型 4，我们则发现如下规律：$\angle MLN$，$\angle MO_{23}N$ 都与原三角形的顶角 A 相等或互补(图 60).

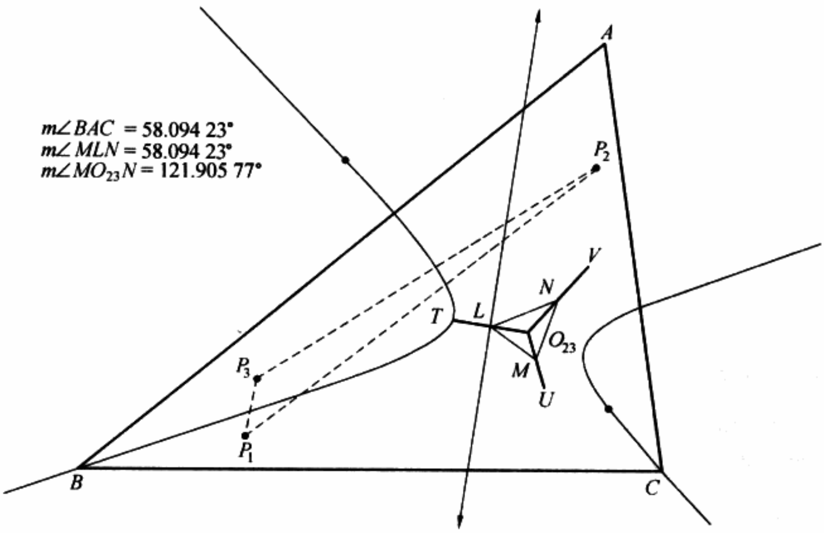


图 60

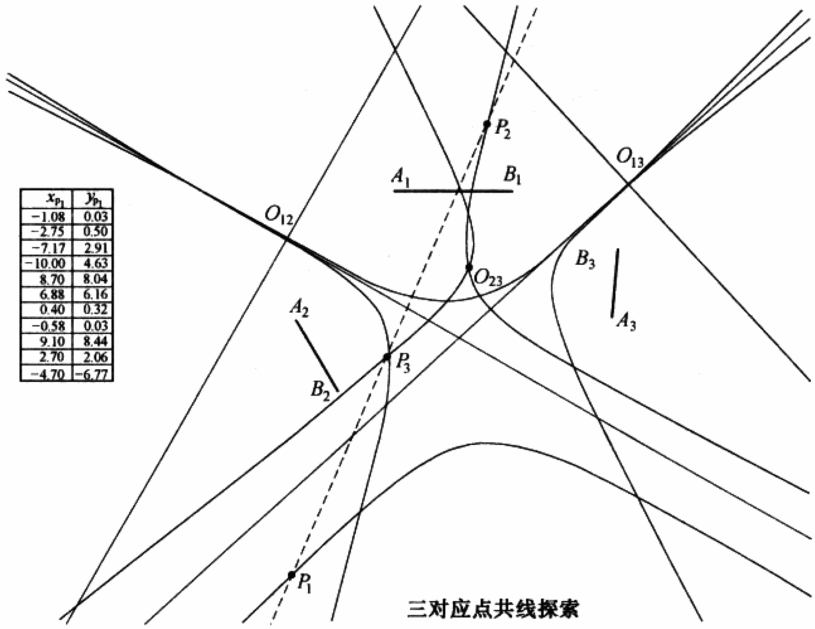
在类型 3 中，McCay 二次曲线 Ⅰ 经过顶点 A；而在类型 4 中，McCay 二次曲线 Ⅰ 经过顶点 B，C(其实就是 O_{12} 和 O_{13}).

13 其　他

还有一些可供研究的、富有挖掘潜力的课题：

什么时候McCay二次曲线Ⅰ刚好分别与McCay二次曲线Ⅱ、Ⅲ相切于O_{12}和O_{13}两点？这时，两组逆相似轴是否一定就是切点处的切线和法线？

我们曾找到了二组极其逼真的疑似案例(图61)：



x_{P_1}	y_{P_1}
−1.08	0.03
−2.75	0.50
−7.17	2.91
−10.00	4.63
8.70	8.04
6.88	6.16
0.40	0.32
−0.58	0.03
9.10	8.44
2.70	2.06
−4.70	−6.77

图61

当一组三对应点所构成的$\triangle P_1P_2P_3$反向相似于另一组三对应点所构成的$\triangle P'_1P'_2P'_3$时，两者在位置上有什么内在关系？

(在三个顺相似形的情形中，我们曾证明了：关于McCay圆互为反演关系的一对点，所对应的两个三角形恰好反向相似！而且这是充要条件.)

还可用运动的观点来看待三相似形结构的变化.如：

当三相似形中的一幅沿某向量平移时，相关的那些特征对象是按什么规律变化的？

当第一幅反相似形沿某条直线l翻折过去后，便转化成了三个顺相似形的构形；这时可研究两种构形的特征对象之间的联系.例如，当且仅当第一幅反相似形沿着母线翻折时，所得到的顺三相似形是退化的.

[编者注]　这篇文章虽然涉及一个联赛试题背景，"可惜"走得太远，可以说从功利的角度说，它完全"无用"，但从知识探求角度看却有大用.马大猷曾说："我们的研究都是

着重在所谓一种有用的东西上,缺少科学的思维,缺少一种完完全全求知的精神,即没有最初的动机.科学的原动力是在求知.说来说去,几千年以来,我们整个民族没有在纯粹求知的领域里有兴趣,科学探讨的精神是我们所欠缺的."从这个意义上说发表此文对当前大讲实用的文风是一种矫枉过正,但是值得.



一道几何题的证明及其联想

唐传发[①]

吴伟朝先生曾提出下面一道优美的几何题.笔者在此先给出它的一个纯几何证明,然后再利用此题作为基础给出另外几个几何命题的证明,最后,笔者也提出一个命题.

试题 已知凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于 P, $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle ADP$ 的内心分别为 O_1, O_2, O_3, O_4.求证: O_1, O_2, O_3, O_4 四点共圆的充要条件是四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形.

证明 先证必要性.

引理 1 已知 $ABCD$ 为圆外切四边形,则 $\triangle ABC$ 的内切圆与 $\triangle ADC$ 的内切圆相切于 AC 上同一点.

证明 令 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AC 相切于 M, $\triangle ADC$ 的内切圆与 AC 相切于 M'(图 1).则

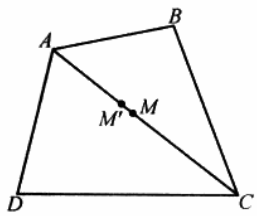


图 1

$$AM = \frac{AB + AC - BC}{2} \quad ①$$

$$AM' = \frac{AD + AC - DC}{2} \quad ②$$

又因为 $ABCD$ 为圆外切四边形,所以

$$AB + DC = AD + BC$$

所以

$$AB - BC = AD - DC \quad ③$$

由①、②、③知 $AM = AM'$,所以 M 与 M' 重合.引理得证.

引理 2 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AC 相切于 M,圆心为 E_1,则 $\frac{CE_1^2}{AE_1^2} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{MC}{AM}$.

证明 如图 2,过 C 点作 $CN \parallel AE_1$ 交 E_1M 的延长线于 N,记 $\odot E_1$ 与 AB 相切于 H,与 BC 相切于 K,连结 HK, MK, MH, E_1K, E_1H,因为

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin A}{\sin C} \quad ④$$

① 安徽省枞阳县汤沟中学(邮编:246716)

易知 E_1,M,C,K 四点共圆，且 E_1C 为此圆直径，所以

$$\sin C=\frac{MK}{E_1C} \quad ⑤$$

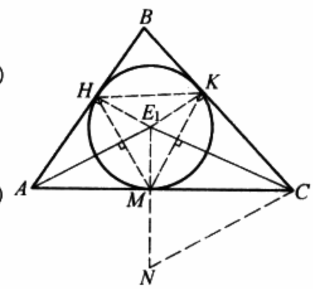


图 2

同理

$$\sin A=\frac{MH}{E_1A} \quad ⑥$$

由 ④、⑤、⑥ 知

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CE_1}{MK}\cdot\frac{MH}{AE_1} \quad ⑦$$

又因为
$$\angle NE_1C=90°-\frac{1}{2}\angle BCA$$

而
$$\angle MHK=\frac{1}{2}\angle ME_1K=\frac{1}{2}(180°-\angle BCA)=90°-\frac{1}{2}\angle BCA$$

所以
$$\angle NE_1C=\angle MHK$$

同理可证

$$\angle AE_1N=\angle MKH$$

而
$$\angle E_1NC=\angle AE_1N$$

所以
$$\angle E_1NC=\angle MKH$$

从而
$$\triangle CE_1N\backsim\triangle MHK$$

所以
$$\frac{MH}{MK}=\frac{CE_1}{CN} \quad ⑧$$

由 ⑦、⑧ 得

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CE_1^2}{AE_1\cdot CN} \quad ⑨$$

又因为
$$AE_1 /\!/ NC$$

所以
$$\frac{CN}{AE_1}=\frac{MC}{AM}$$

即
$$CN=\frac{MC\cdot AE_1}{AM} \quad ⑩$$

由 ⑨、⑩ 得
$$\frac{BC}{AB}=\frac{CE_1^2}{AE_1^2}\cdot\frac{AM}{MC}$$

即
$$\frac{CE_1^2}{AE_1^2}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{MC}{AM}$$

证毕.

引理 3 如图 3，已知圆外切四边形 $ABCD$，E_1,E_2,E_3,E_4 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle ABD$，$\triangle CBD$ 的内心，则$\dfrac{BE_3\cdot DE_4}{AE_1\cdot CE_2}=\dfrac{BE_4\cdot DE_3}{AE_2\cdot CE_1}$.

证明 由引理 1 知 $\odot E_1$ 与 $\odot E_2$ 相切于 AC 上同一点 M；$\odot E_3$ 与 $\odot E_4$ 相切于 BD 上同一点 N. 由引理 2 可知

$$\frac{CE_1^2}{AE_1^2}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{MC}{AM} \quad ⑪$$

$$\frac{AE_2^2}{CE_2^2}=\frac{AM}{MC}\cdot\frac{AD}{CD} \quad ⑫$$

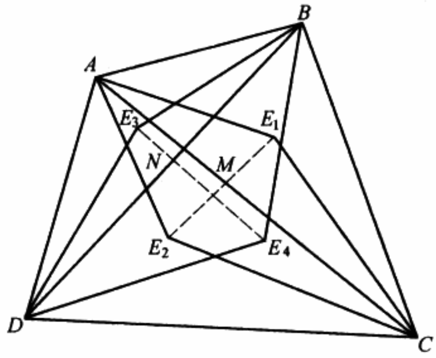


图 3

两式相乘

$$\frac{CE_1^2}{AE_1^2}\cdot\frac{AE_2^2}{CE_2^2}=\frac{BC\cdot AD}{AB\cdot DC}$$

同理可证

$$\frac{BE_4^2\cdot DE_3^2}{BE_3^2\cdot DE_4^2}=\frac{BC\cdot AD}{AB\cdot DC}$$

两式比较,即

$$\frac{CE_1\cdot AE_2}{AE_1\cdot CE_2}=\frac{BE_4\cdot DE_3}{BE_3\cdot DE_4}$$

从而

$$\frac{BE_3\cdot DE_4}{AE_1\cdot CE_2}=\frac{BE_4\cdot DE_3}{AE_2\cdot CE_1}$$

现在来证原题必要性:欲证 O_1,O_2,O_3,O_4 四点共圆,只需证明 $O_1P\cdot O_3P=O_2P\cdot O_4P$.

如图 4,连结 AO_1,连结 CO_2 它们的延长线相交于 E_1,CO_3 与 AO_4 的延长线相交于 E_2,BO_1 与 DO_4 的延长线相交于 E_3,BO_2 与 DO_3 的延长线相交于 E_4. 易知 E_1,E_2,E_3,E_4 分别为 $\triangle ABC,\triangle ADC,\triangle ABD,\triangle CBD$ 的内心. 由引理 1 知 $\odot E_1$ 与 $\odot E_2$ 相切于 AC 上同一点 M,$\odot E_3$ 与 $\odot E_4$ 相切于 BD 上同一点 N. 因为

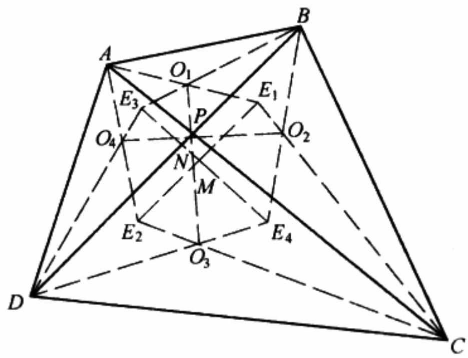


图 4

$$\frac{O_1P}{\sin\frac{\angle BAP}{2}}=\frac{AP}{\sin(90^\circ+\frac{\angle ABP}{2})}=\frac{AP}{\cos\frac{\angle ABP}{2}}$$

即

$$O_1P=\frac{AP\sin\frac{\angle BAP}{2}}{\cos\frac{\angle ABP}{2}}$$

同理

$$O_3P=\frac{PC\cdot\sin\frac{\angle PCD}{2}}{\cos\frac{\angle PDC}{2}},\quad O_2P=\frac{PC\sin\frac{\angle PCB}{2}}{\cos\frac{\angle PBC}{2}},\quad O_4P=\frac{AP\sin\frac{\angle PAD}{2}}{\cos\frac{\angle PDA}{2}}$$

所以欲证 $O_1P\cdot O_3P=O_2P\cdot O_4P$,只需证明

$$\frac{\sin\frac{\angle BAP}{2}\cdot\sin\frac{\angle PCD}{2}}{\cos\frac{\angle ABP}{2}\cdot\cos\frac{\angle PDC}{2}}=\frac{\sin\frac{\angle PCB}{2}\cdot\sin\frac{\angle PAD}{2}}{\cos\frac{\angle PBC}{2}\cdot\cos\frac{\angle PDA}{2}}$$

又只需证明

$$\frac{\frac{E_1M}{AE_1}\cdot\frac{E_2C}{E_2C}}{\frac{BN}{BE_3}\cdot\frac{DN}{DE_4}}=\frac{\frac{E_1M}{CE_1}\cdot\frac{E_2M}{AE_2}}{\frac{BN}{BE_4}\cdot\frac{DN}{DE_3}}$$

从而只需证明

$$\frac{BE_3\cdot DE_4}{AE_1\cdot E_2C}=\frac{BE_4\cdot DE_3}{CE_1\cdot AE_2}$$

而这由引理 3 即知成立.从而必要性至此完全证毕.

接下来证充分性.

令 AO_1 与 CO_2 相交于 E_1,CO_3 与 AO_4 相交于 E_2,BO_1 与 DO_4 相交于 E_3,BO_2 与 DO_3 相交于 E_4(图 5).

作 $E_1M\perp AC$ 于 M,作 $E_2M'\perp AC$ 于 M',作 $E_3N\perp BD$,作 $E_4N'\perp BD$,则易知 E_1,E_2,E_3,E_4,分别为 $\triangle ABC,\triangle DAC,\triangle ABD,\triangle CBD$ 的内心.因为

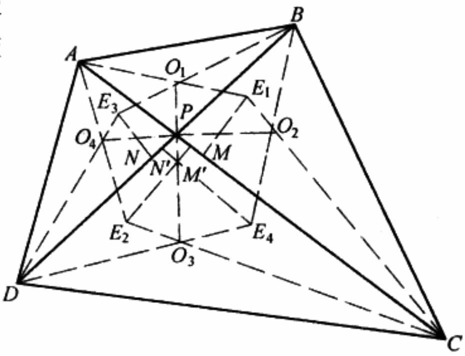


图 5

$$\frac{O_1P}{\sin\frac{\angle PAB}{2}}=\frac{AP}{\sin(90°+\frac{\angle PBA}{2})}$$

所以

$$O_1P=\frac{AP\sin\frac{\angle PAB}{2}}{\cos\frac{\angle PBA}{2}}=\frac{AP\cdot\frac{E_1M}{AE_1}}{\frac{BN}{BE_3}},\quad O_3P=\frac{PC\cdot\sin\frac{\angle PCD}{2}}{\cos\frac{\angle PDC}{2}}=\frac{PC\cdot\frac{E_2M'}{E_2C}}{\frac{DN'}{DE_4}}$$

$$O_2P=\frac{PC\cdot\sin\frac{\angle PCB}{2}}{\cos\frac{\angle PBC}{2}}=\frac{PC\cdot\frac{E_1M}{CE_1}}{\frac{BN'}{BE_4}},\quad O_4P=\frac{AP\cdot\sin\frac{\angle PAD}{2}}{\cos\frac{\angle PDA}{2}}=\frac{AP\cdot\frac{E_2M'}{AE_2}}{\frac{DN}{DE_3}}$$

因为 O_1,O_2,O_3,O_4 四点共圆,所以

$$O_1P\cdot O_3P=O_2P\cdot O_4P$$

所以

$$\frac{\frac{E_1M}{AE_1}\cdot\frac{E_2M'}{E_2C}}{\frac{BN}{BE_3}\cdot\frac{DN'}{DE_4}}=\frac{\frac{E_2M'}{AE_2}\cdot\frac{E_1M}{CE_1}}{\frac{BN'}{BE_4}\cdot\frac{DN}{DE_3}}$$

所以
$$\frac{DN}{BN}\cdot\frac{BE_3\cdot DE_4}{BE_4\cdot DE_3}=\frac{DN'}{BN'}\cdot\frac{AE_1\cdot E_2C}{AE_2\cdot CE_1} \tag{13}$$
由上面的引理 2 可知
$$\frac{BE_3}{DE_3}=\sqrt{\frac{BA}{DA}\cdot\frac{BN}{DN}} \tag{14}$$
$$\frac{DE_4}{BE_4}=\sqrt{\frac{DC}{BC}\cdot\frac{DN'}{BN'}} \tag{15}$$
从而
$$\frac{BE_3\cdot DE_4}{BE_4\cdot DE_3}=\sqrt{\frac{AB\cdot DC\cdot DN'\cdot BN}{AD\cdot BC\cdot DN\cdot BN'}} \tag{16}$$
同理
$$\frac{AE_1\cdot E_2C}{AE_2\cdot CE_1}=\sqrt{\frac{AB\cdot DC\cdot AM\cdot CM'}{BC\cdot AD\cdot CM\cdot AM'}} \tag{17}$$
由 ⑬、⑯、⑰,得
$$\frac{DN}{BN}\cdot\frac{CM}{AM}=\frac{DN'}{BN'}\cdot\frac{CM'}{AM'}$$
所以
$$\left(\frac{BD}{BN}-1\right)\cdot\left(\frac{AC}{AM}-1\right)=\left(\frac{BD}{BN'}-1\right)\cdot\left(\frac{AC}{AM'}-1\right) \tag{18}$$
若 $BN>BN'$,则
$$\frac{AB+BD-AD}{2}>\frac{BC+BD-DC}{2}$$
从而 $AB-BC>AD-DC$,所以
$$\frac{AB+AC-BC}{2}>\frac{AD+AC-DC}{2}$$
从而
$$AM>AM'$$
故
$$\frac{BD}{BN}-1<\frac{BD}{BN'}-1,\quad \frac{AC}{AM}-1<\frac{AC}{AM'}-1$$
从而
$$\left(\frac{BD}{BN}-1\right)\cdot\left(\frac{AC}{AM}-1\right)<\left(\frac{BD}{BN'}-1\right)\left(\frac{AC}{AM'}-1\right)$$
这与 ⑱ 式矛盾,故 $BN>BN'$ 不成立.

同理可证 $BN<BN'$ 亦不成立.从而只有 $BN=BN'$,即
$$\frac{AB+BD-AD}{2}=\frac{BC+BD-DC}{2}$$
从而 $AB+DC=BC+AD$,故四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形,从而命题的充分性证毕.

利用上述命题不难给出吴伟朝所提的第二个命题:已知凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 P,$\triangle ABP$,$\triangle BCP$,$\triangle CDP$,$\triangle ADP$ 的内切圆半径分别为 r_1,r_2,r_3,r_4,求证:四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形的充要条件是 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.

证明 图形及辅助线如图 6 所示:记 $\triangle ABP$,$\triangle BCP$,$\triangle DCP$,$\triangle ADP$ 的内心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4 易知

$$\frac{r_1}{PE_1}=\frac{r_3}{PE_3}\Rightarrow\frac{r_1}{PE_1}=\frac{r_1+r_3}{PE_1+PE_3} \quad ⑲$$

同理
$$\frac{r_2}{PE_2}=\frac{r_2+r_4}{PE_2+PE_4} \quad ⑳$$

由 ⑲、⑳ 知

$$\frac{r_1+r_3}{r_2+r_4}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{PE_2}{PE_1}\cdot\frac{PE_1+PE_3}{PE_2+PE_4} \quad ㉑$$

又易知 $\dfrac{PE_2}{O_2P}=\dfrac{r_3}{O_3P}$，$\dfrac{PE_1}{O_1P}=\dfrac{r_4}{O_4P}$

从而
$$\frac{PE_2}{PE_1}=\frac{r_3}{r_4}\cdot\frac{O_2P\cdot O_4P}{O_3P\cdot O_1P}$$

代入 ㉑

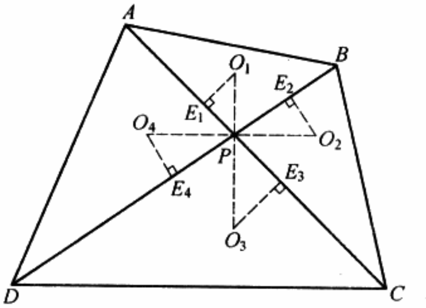


图 6

$$\frac{r_1+r_3}{r_2+r_4}=\frac{r_1\cdot r_3}{r_2\cdot r_4}\cdot\frac{O_2P\cdot O_4P}{O_3P\cdot O_1P}\cdot\frac{PE_1+PE_3}{PE_2+PE_4} \quad ㉒$$

又易知

$$ABCD\text{ 为圆外切四边形}\Leftrightarrow PE_1+PE_3=PE_2+PE_4 \quad ㉓$$

$$ABCD\text{ 为圆外切四边形}\Leftrightarrow O_1,O_2,O_3,O_4\text{ 共圆}\Leftrightarrow O_2P\cdot O_4P=O_1P\cdot O_3P \quad ㉔$$

由 ㉒、㉓、㉔ 可知

$$ABCD\text{ 为圆外切四边形}\Leftrightarrow\frac{r_1+r_3}{r_2+r_4}=\frac{r_1\cdot r_3}{r_2\cdot r_4}\Leftrightarrow\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

证毕.

乘胜前进，下述命题亦是可以证明的了.

命题 已知凸四边形 $ABCD$，对角线相交于 P，P 点到 AB,BC,CD,AD 的距离分别为 h_1,h_2,h_3,h_4. 求证：

$\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_3}=\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_4}$ 是四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形的充要条件.

证明 如图7，记 $\triangle ABP,\triangle BCP,\triangle CDP,\triangle ADP$ 的内切圆半径分别记为 r_1,r_2,r_3,r_4，记 $\angle APB=\alpha$.

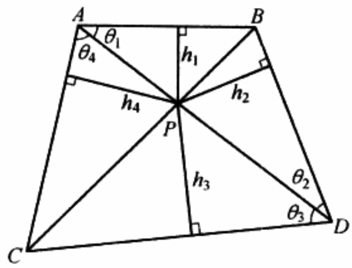


图 7

由上题可知，欲证此题，只需证明 $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_3}=\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_4}$ 等价于 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_4}$.

因为

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}\Leftrightarrow\frac{h_1+h_3}{h_2+h_4}=\frac{h_1h_3}{h_2h_4}=\frac{h_1}{h_4}\cdot\frac{h_3}{h_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_4}\cdot\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AD}{DC}$$

又因为

$$\frac{h_1+h_3}{h_2+h_4}=\frac{\dfrac{AP\cdot BP\sin\alpha}{AB}+\dfrac{DP\cdot CP\cdot\sin\alpha}{CD}}{\dfrac{BP\cdot CP\sin(180^\circ-\alpha)}{BC}+\dfrac{AP\cdot DP\sin(180^\circ-\alpha)}{AD}}=$$

$$\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{DC\cdot AP\cdot BP+AB\cdot DP\cdot CP}{AD\cdot BP\cdot CP+BC\cdot AP\cdot DP}$$

所以

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}\Leftrightarrow DC\cdot AP\cdot BP+AB\cdot DP\cdot CP=AD\cdot BP\cdot CP+BC\cdot AP\cdot DP \qquad ㉕$$

因为

$$r_1=\frac{AP\cdot BP\cdot\sin\alpha}{AP+BP+AB},\quad r_3=\frac{CP\cdot DP\cdot\sin\alpha}{CP+DP+DC}$$

$$r_2=\frac{BP\cdot CP\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{BP+CP+BC},\quad r_4=\frac{AP\cdot DP\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{AP+DP+AD}$$

所以

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\Leftrightarrow\frac{AP+BP+AB}{AP\cdot BP}+\frac{CP+DP+CD}{CP\cdot DP}=\frac{BP+CP+BC}{BP\cdot CP}+\frac{DP+DP+AD}{AP\cdot DP}\Leftrightarrow AB\cdot DP\cdot CP+DC\cdot AP\cdot BP=BC\cdot AP\cdot DP+AD\cdot BP\cdot CP \qquad ㉖$$

由㉕、㉖可知

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}\Leftrightarrow\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

故命题得证.

如果由圆外切四边形去证倒数和关系,那么也可以用牛顿定理去完成.下面就其中的一个倒数和给出证明.另一个倒数和的证明是类似的.

已知:如图8,圆外切四边形 $ABCD$,对角线相交于 P,P 点到 AB,BC,CD,DA 距离分别为 h_1,h_2,h_3,h_4,求证

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}$$

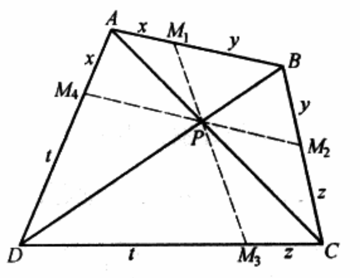


图8

先证一个引理:已知 $ABCD$ 为圆外切四边形,M_1,M_2,M_3,M_4 分别为 $ABCD$ 四条边切点,由切线长定理,可记 $AM_1=AM_4=x$,$BM_1=BM_2=y$,$CM_2=CM_3=Z$,$DM_3=DM_4=t$,求证:$\frac{BP}{DP}=\frac{y}{t}$,$\frac{CP}{AP}=\frac{z}{x}$.

引理的证明:连结 M_1M_3,M_2M_4.因为 $ABCD$ 为圆外切四边形,由牛顿定理可知 M_1M_3,M_2M_4 相交于对角线 AC,BD 的交点 P.

$$\frac{S_{\triangle BPM_1}}{S_{\triangle DPM_3}}=\frac{\frac{1}{2}BP\cdot PM_1\sin\angle BPM_1}{\frac{1}{2}DP\cdot PM_3\sin\angle DPM_3}=\frac{BP\cdot PM_1}{DP\cdot PM_3}$$

又易知
$$\angle BM_1P=\angle CM_3P=180^\circ-\angle DM_3P$$
所以
$$\sin\angle BM_1P=\sin\angle DM_3P$$
又因为

$$\frac{S_{\triangle BPM_1}}{S_{\triangle DPM_3}}=\frac{\frac{1}{2}M_1P\cdot BM_1\sin\angle BM_1P}{\frac{1}{2}M_3P\cdot DM_3\sin\angle DM_3P}=\frac{BM_1\cdot PM_1}{DM_3\cdot PM_3}$$

所以
$$\frac{BP}{DP}=\frac{BM_1}{DM_3}=\frac{y}{t}$$
同理
$$\frac{CP}{AP}=\frac{z}{x}$$
引理证毕.

借助此引理,不难推出圆外切四边形的另一个性质,不妨把它作为另一个引理:如图9,已知圆外切四边形 $ABCD$ 对角线相交于 P,求证:$DC\cdot AP\cdot BP+AB\cdot DP\cdot CP=AD\cdot BP\cdot CP+BC\cdot AP\cdot DP$.

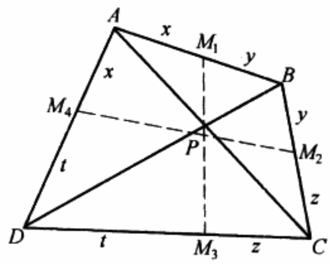


图 9

证明 因为

$$DC\cdot\frac{BP}{DP}+AB\cdot\frac{CP}{AP}=(t+z)\cdot\frac{y}{t}+(x+y)\cdot\frac{z}{x}=$$
$$y+z+\frac{yz}{t}+\frac{yz}{x}$$

又因为

$$AD\cdot\frac{BP}{DP}\cdot\frac{CP}{AP}+BC=(x+t)\cdot\frac{y}{t}\cdot\frac{z}{x}+y+z=\frac{yz}{t}+\frac{yz}{x}+y+z$$

所以
$$DC\cdot\frac{BP}{DP}+AB\cdot\frac{CP}{AP}=AD\cdot\frac{BP}{DP}\cdot\frac{CP}{AP}+BC$$
整理
$$DC\cdot BP\cdot AP+AB\cdot CP\cdot DP=$$
$$AD\cdot BP\cdot CP+BC\cdot AP\cdot DP$$
证毕.

现在来证原题.如图10,记 $\angle APB=\alpha'$ 因为

$$\frac{h_1}{h_4}\cdot\frac{h_3}{h_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_4}\cdot\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AD}{DC}$$

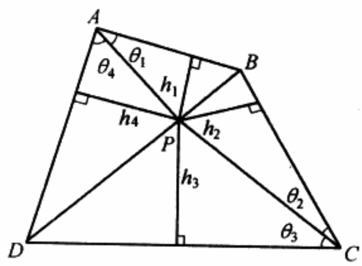


图 10

又因为

$$\frac{h_1+h_3}{h_2+h_4}=\frac{\frac{AP\cdot BP\cdot\sin\alpha}{AB}+\frac{DP\cdot CP\cdot\sin\alpha}{CD}}{\frac{BP\cdot CP\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{BC}+\frac{AP\cdot DP\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{AD}}$$

所以

$$\frac{h_1+h_3}{h_2+h_4}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{DC\cdot BP\cdot AP+AB\cdot CP\cdot DP}{AD\cdot BP\cdot CP+BC\cdot AP\cdot DP}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AD}{DC}$$

所以
$$\frac{h_1+h_3}{h_2+h_4}=\frac{h_1h_3}{h_2h_4}$$

所以
$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}$$

证毕.

在给出了吴伟朝先生的几何题的证法之后,笔者也发现了一个关于圆外切四边形的一个充要条件.现叙述如下:如图11,四边形 $ABCD$ 相交于 P,$\triangle ABP$ 和 $\triangle ADP$ 的内心分别为 O_1,O_4,$\triangle ABC$ 的内切圆与 AC 相切于 M,$\triangle ADC$ 内切圆与 AC 相切于 N,求证:$ABCD$ 为圆外切四边形的充要条件是 $\angle O_1MA=\angle O_4NA$.

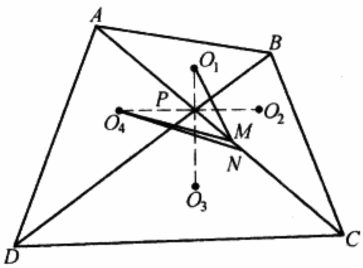


图 11

此题可取 $\triangle BCP$ 和 $\triangle DCP$ 的内心 O_2,O_4,然后去证明 $\angle O_1MA=\angle O_4NA$ 与 O_1,O_2,O_3,O_4 四点共圆等价,从而由本文第一个命题,可证本命题.证明不难,这里从略.读者不妨一试.

[编者的话] 唐传发先生在平面几何圈中也算是一位小有名气的年轻人,以解决大量叶中豪、吴伟朝的平面几何题目而著称.唐先生对数学极其热爱,经常打电话来编辑部或探讨问题或询问新书预告.唐先生虽在县城教书,但家在农村,所以有时接到他假期从农村打来的电话,电话那端隐约可闻鸡犬之声,妇幼之音,靠想象不难勾勒出一派农家田园生活景象.田园生活城里人体会是休闲,而久居其间会感受到艰辛.这样环境中产生的文章,自然缺一些文笔的华丽,少一些内容的虚张声势,而多一分质朴,添一分原创,这样的文章我喜欢.

神灵相助　魔术分身

邓寿才

1

我们知道,对于任意一个 $\triangle ABC$,它有重心 G,内心 I,外心 O,垂心 H,Fermat 点布洛长尔点 N,关于这几个点的研究,历来是人们关注的重心.

通过探讨,不难得出结论:这些特殊点到 $\triangle ABC$ 的三顶点的距离之和,不小于它到三边的距离之和的 2 倍.

那么,对 $\triangle ABC$ 内任意一点 P,上述结论还成立吗?

其实,早在 1935 年,爱尔特希(Erdös) 就建立了著名的:

名题　设 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,P 到三边的垂足依次为 D,E,F,则

$$PA + PB + PC \geqslant 2(PD + PE + PF) \tag{①}$$

此名题具有美的三要素 —— 题意简洁,结构优雅,趣味无穷.因此它特别容易被人理解和记住 —— 外观漂亮的线性不等式 ①.

我们仍然设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r.那么众所周知,有著名的欧拉(Euler) 不等式

$$R \geqslant 2r \Rightarrow R + R + R \geqslant 2(r + r + r) \tag{②}$$

如果具有敏锐的洞察力,那么我们就能从一滴水中见到太阳的光辉 ——② 式的结构和外观与 ① 式同样优美漂亮.它表明:$\triangle ABC$ 的外心 O 到三顶点的距离之和,不小于内心 I 到三边距离之和的 2 倍,即

$$PA + PB + PC \geqslant 2(PD + PE + PF) \tag{③}$$

$$OA + OB + OC \geqslant 2(ID + IE + IF) \tag{④}$$

比较 ① 式中的 P 点知,它经过如下变换

$$O \xleftarrow[\text{向左}]{\text{外心变换}} P \xrightarrow[\text{向右}]{\text{内心变换}} I$$

自身被分离成了 O 和 I 两点.

为了行文方便,我们记

$$\begin{cases} S(P) = PA + PB + PC \\ d(P) = PD + PE + PF \end{cases} \Rightarrow S(P) \geqslant 2d(P) \tag{⑤}$$

即
$$S(O) \geqslant 2d(I) \tag{⑥}$$

2

进一步地,我们设 $\triangle ABC$ 的三条中线长为 m_a, m_b, m_c,则

$$\sum m_a^2 = \frac{1}{4}\sum[2(b^2 + c^2) - a^2] = \frac{3}{4}\sum a^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2 \Rightarrow$$

$$2\sum GD \leqslant \sum GA = \frac{2}{3}\sum m_a \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{3\sum m_a^2} \leqslant 3R = \sum OA \Rightarrow$$

$$OA + OB + OC \geqslant 2(GD + GE + GF) \tag{⑦}$$

即
$$S(O) \geqslant 2d(G) \tag{⑧}$$

对于 $\triangle ABC$ 的垂心 H,应用①式,有

$$2\sum HD \leqslant \sum HA = 2R\sum\cos A \leqslant 3R = \sum OA \Rightarrow$$

$$OA + OB + OC \geqslant 2(HD + HE + HF) \tag{⑨}$$

即
$$S(O) \geqslant 2d(H)$$

同样,对于 H 和 O 有

$$\sum HA = 2R\sum\cos A = 2R(1 + 4\prod\sin\frac{A}{2}) = 2R + 8R\sin\frac{A}{2} = 2R + 2r$$

而
$$2\sum OD = 2R\sum\cos A = 2(R + r)$$

即
$$HA + HB + HC = 2(OD + OE + OF) \tag{⑩}$$

$$S(H) = 2d(O) \tag{⑪}$$

进一步地,有

$$S(G) \geqslant S(I) \geqslant 2d(G) \tag{⑫}$$

由于 $S(G) \geqslant S(I)$ 是我们在前一篇文章中已证明了的,因此,我们只须证明

$$S(I) \geqslant 2d(G) \tag{⑬}$$

即
$$IA + IB + IC \geqslant 2(GD + GE + GF) \tag{⑭}$$

证 设 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的高为 h_a, h_b, h_c,则

$$GD = \frac{1}{3}h_a, GE = \frac{1}{3}h_b, GF = \frac{1}{3}h_c \Rightarrow GD + GE + GF = \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c) \leqslant$$

$$\frac{1}{3}[(IA + r) + (IB + r) + (IC + r)] = \frac{1}{3}(IA + IB + IC) + r \leqslant$$

$$\frac{1}{3}\sum IA + \frac{1}{6}\sum IA = \frac{1}{2}\sum IA \Rightarrow S(I) \geqslant 2d(G)$$

再设 F 为 $\triangle ABC$ 内的 Fermat 点,则有

$$2\sum FD \leqslant \sum FA \leqslant \left(\frac{9}{2}R^2+\frac{9}{2}R^2\right)^{1/2}=3R=$$

$$\sum OA \Rightarrow \sum OA \geqslant 2\sum FD \tag{15}$$

即

$$S(O) \geqslant 2d(F) \tag{16}$$

其次,我们首先注意到

$$\begin{cases} d(H)=2R\sum \cos B\cos C \\ d(O)=R\sum \cos A \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \triangle = 2R^2\sin A\sin B\sin C \\ \triangle = \frac{1}{2}ah_a = Rh_a\sin A \end{cases}\right. \Rightarrow h_a = 2R\sin B\sin C \Rightarrow$$

$$d(G)=\sum GD=\frac{1}{3}\sum h_a=\frac{2}{3}R\sum \sin B\sin C$$

于是有

$$3d(G)-d(H)=2R\left(\sum \sin B\sin C-\sum \cos B\cos C\right)=$$

$$-2R\sum \cos(B+C)=2R\sum \cos A=2d(O)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 3d(G)=\ & d(H)+2d(O) \\ & S(H)=2d(O) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3d(G)=\ & d(H)+S(H) \\ & S(H)\geqslant 2d(H) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} & d(G)\geqslant d(H) \\ & S(G)\geqslant S(I)\geqslant 2d(G) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(G)\geqslant S(I)\geqslant 2d(G)\geqslant 2d(H)$$

另一方面,我们从

$$\left.\begin{aligned} 3d(G)=d(H)+S(H) \\ d(H)\leqslant \frac{1}{2}S(H) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(H)\geqslant 2d(G)$$

总括上述结论,列表如下:

分身术	变换式
1. $O \longleftarrow P \longrightarrow I$	$S(O) \geqslant 2d(I)$
2. $O \longleftarrow P \longrightarrow G$	$S(O) \geqslant 2d(G)$
3. $O \longleftarrow P \longrightarrow H$	$S(O) \geqslant 2d(H)$
4. $O \longleftarrow P \longrightarrow F$	$S(O) \geqslant 2d(F)$
5. $H \longleftarrow P \longrightarrow O$	$S(H) = 2d(O)$
6. $I \longleftarrow P \longrightarrow G$	$S(I) \geqslant 2d(G)$
7. $H \longleftarrow P \longrightarrow G$	$S(H) \geqslant 2d(G)$

8. $G \longleftarrow P \longrightarrow H$　　$S(G) \geqslant 2d(H)$

9. $I \longleftarrow P \longrightarrow H$　　$S(I) \geqslant 2d(H)$

这就是 P 点的九种“魔术分身术”，它演变出了九个漂亮的变换式.

3

（ⅰ）从上述推导中，我得到了一个漂亮的副产品

$$d(G) \geqslant d(H) \tag{17}$$

这表明：对于一个三角形，它的重心到三边的距离之和，不小于其垂心到三边的距离之和.

（ⅱ）上述简表的第 6 列即为

$$IA + IB + IC \geqslant 2(GD + GE + GF) \tag{18}$$

这是简表中 9 个趣味结论之一，它有一个加权推广：

推广一　设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，重心 G 到三边的垂足为 D,E,F，系数 $t_1,t_2,t_3 \in (1,7)$，且 $t_1+t_2+t_3 \leqslant 9$，则

$$t_1 IA + t_2 IB + t_3 IC \geqslant 3[(t_1-1)GD + (t_2-1)GE + (t_3-1)GF] \tag{19}$$

显然，当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，⑲ 式化为 $2\sum t_1 \geqslant 3\sum(t_1-1) \Leftrightarrow \sum t_1 \leqslant 9$.

当取 $t_1 = t_2 = t_3 = 3$ 时，⑲ 式化为 ⑱ 式.

证明　令 $\lambda_i = (t_i - 1)/6 (i = 1,2,3)$，则

$$\left.\begin{array}{l} 1 < t_i < 7 \\ t_1 + t_2 + t_3 \leqslant 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \lambda_i < 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

于是

$$\sum \lambda_1 GD = \frac{1}{3}\sum \lambda_1 ha \leqslant \frac{1}{3}\sum \lambda_1 (IA + r) = \frac{1}{3}\left(\sum \lambda_1 IA + r\sum \lambda_1\right) \leqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum \lambda_1 IA + r\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(\sum \lambda_1 IA + \frac{1}{6}\sum IA\right) =$$

$$\frac{1}{18}\sum(1 + 6\lambda_1) IA = \frac{1}{18}\sum t_1 IA \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{6}(t_1 - 1) GD \leqslant \frac{1}{18}\sum t_1 IA \Rightarrow \sum t_1 IA \geqslant 3\sum (t_1 - 1) GD$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $t_1 + t_2 + t_3 = 9$.

（ⅲ）令人惊奇的是，我们还可从指数方面去推广 ⑱ 式：

推广二　设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，重心 G 到三边的垂足为 D,E,F，$n \in \mathbf{N}$，则

$$IA^n + IB^n + IC^n \geqslant 2^n(GD^n + GE^n + GF^n) \tag{20}$$

显然，当 $n = 1$ 时，⑳ 式化为 ⑱ 式.

证明 我们只须证明 $2 \leqslant n \in \mathbf{N}$ 的情形即可.

$$\sum(3GD)^n = 3^n\sum GD^n = \sum h^n a \leqslant \sum(IA+r)^n =$$

$$\sum(r^n + IA^n + \sum_{k=1}^{n-1})C_n^k r^k \cdot IA^{n-k} =$$

$$3r^n + \sum IA^n + \sum(\sum_{i=1}^{n-1} C_n^k r^k \cdot IA^{n-k}) =$$

$$3r^n + \sum IA^n + \sum_{k=1}^{n-1}(C_n^k r^k \sum IA^{n-k}) \qquad ㉑$$

由于 $\sum IA \geqslant 6r$,应用幂平均不等式,有

$$\left(\frac{\sum IA}{3}\right)^k = \frac{\sum IA^k}{3} \Rightarrow (2r)^k \leqslant \frac{1}{3}\sum IA^k \Rightarrow r^k \leqslant \frac{\sum IA^k}{3\times 2^k} \text{ 及 } 3r^n \leqslant \frac{1}{2^n}\sum IA^n$$

结合 ㉑ 式有

$$3^n\sum GD^n \leqslant 2^{-n}\cdot\sum IA^n + \sum IA^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\left[\frac{(\sum IA^k)(\sum IA^{n-k})}{3\times 2^k}\right] =$$

$$(1+2^{-N})\sum IA^n + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_n^k}{2^k}\left[\frac{(\sum IA^k)(\sum IA^{N-K})}{3}\right]$$

$$(\text{应用切比雪夫不等式}) \leqslant (1+2^{-n})\sum IA^n + \sum_{k=1}^{n-1}(2^{-k}C_n^k\sum IA^n) =$$

$$(1+2^{-n})\sum IA^n + (\sum_{k=1}^{n-1}2^{-k}C_n^k)\sum IA^n = (1+2^{-n}+\sum_{k=1}^{n-1}2^{-k}C_n^k)\sum IA^n =$$

$$(1+\frac{1}{2})^n\sum IA^n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n\sum GD^n \Rightarrow \sum IA^n \geqslant 2^n\sum GD^n$$

即 ⑳ 式成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

4

(ⅰ)与推广二相应的是,① 式还有如下指数推广:

当 $|k| \leqslant 1$ 时,有

$$PA^k + PB^k + PC^k \geqslant 2^k(PD^k + PE^k + PF^k) \qquad ㉒$$

当 $|k| > 1$ 时,有

$$PA^k + PB^k + PC^k > 2^{\frac{k}{|k|}}(PD^k + PE^k + PF^k) \qquad ㉓$$

(ⅱ)设 $n \in \mathbf{N}, \lambda, u, v > 0$,证 PA, PB, PC 及 PD, PE, PF 依次为 x, y, z, p, q, r,则

$$\lambda x^n + uy^n + vz^n \geqslant 2\sqrt{uv}p^n + 2\sqrt{v\lambda}q^n + 2\sqrt{\lambda u}r^n + 6(2^{n-1}-1)(\lambda uv)^{\frac{1}{3}}(pqr)^{n/3} \qquad ㉔$$

(ⅲ)① 式可加强为:

设 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,$\angle BPC$、$\angle CPA$、$\angle APB$ 的平分线依次交 BC 于 U,交 CA 于 V,交 AB 于 W,则

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PU+PV+PW) \tag{25}$$

因为 $PU\geqslant PD, PV\geqslant PE, PW\geqslant PF$,故从㉕式立即导出①式,反之则不能.因此,如果将㉕式进行了推广,便是对①式进行了推广.

如果我们设锐角 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 满足 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$,则㉕式可推广为

$$(PB+PC)\cot\theta_1+(PC+PA)\cot\theta_2+(PA+PB)\cot\theta_3\geqslant 2\left(\frac{PU}{\sin\theta_1}+\frac{PV}{\sin\theta_2}+\frac{PW}{\sin\theta_3}\right) \tag{26}$$

(ⅳ)进一步地,㉕式还可从三角形推广到平面多边形中去:

设 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内任意一点,$\angle A_iPA_{i+1}$($i=1,2,\cdots,n$,约定 $A_{n+1}\equiv A_1$)的平分线交 A_iA_{i+1} 边于 W_i,则有

$$\sum_{i=1}^{n}PA_i\geqslant\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}PW_i \tag{27}$$

(ⅴ)㉗式还可再从指数、系数、多边形个数三个方面进行综合推广.

此外,①式还有一系列的相关配套命题.



关于"平面等周问题的简单解法"的注记

ALFRED D. GARVIN

问题 给定一个三角形 T,其周长为 P,内切圆周长为 c,设有一数为 p,$c < p < P$,在 T 内的所有周长为 p 的区域之中,找出面积最大的区域 R.

结论 具有最大面积的区域 R 的边界是由每一条都与 T 的两邻边相切的三条圆弧以及 T 的边界上夹在这些圆弧的顶点之间的三条线段组成.并且这三条圆弧具有相同的半径(图 1).

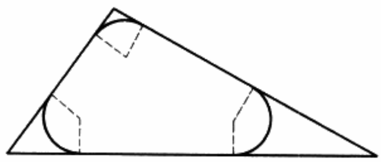


图 1

在给出这个结论的证明之前,DeMar 教授对我表示由衷的感谢,为了我提出了这个问题以及正确地猜测到它的解答——这是我通过物理实验得到的.也许读者有兴趣了解是什么样的物理实验使得我推测出这种结论的.

第一个实验的理论根据是,三角形容器里的水平液体表面,具有很大的表面张力,使其呈现等周的最佳形状.把三块玻璃片放在水平放置的玻璃板上构成一个具有平底的直立的小三角形容器,将液态的水银慢慢注入其内,可以预料,水银将先构成一个小圆点,渐渐扩大,直到成为与三角形内切的圆为止.当继续注入水银时,这个圆面将在三个切点处沿这个容器的边渐渐平展,同时半径逐渐缩小,三个圆弧将逐渐靠近三角形的顶点.仔细观察这些圆弧的形状,并用彩笔描下这个水银面的形成过程中的许多中间图形.

第二个实验基于与第一个实验相同的理论根据.然而,在这个实验中却是先在三角形容器里注入一部分水,然后将一种粘度适宜的油慢慢注入水中,这时将会发生与第一个实验所描绘的相同的观察结果,看到同样的图形现象.

第三个实验的理论根据是对三角形容器里的由一种可塑带所范围的区域内部施加水平压力,能呈现出一个等周的最佳形状.用木材作一个类似于不对称的台球台的三角形围栏,按照 DeMar 的说法,把长为 $p(c < p < P)$ 宽为半英寸的硬纸带两端钉在一起,形成一个闭圈,并把它在上述三角形围栏里舒展开,把数以百计的小滚球倒入由可塑带所包围的空间里,并施加压力,直到盛满为止.这时,可塑的围栏沿竖硬的三角形围栏边沿伸展,同时以三个一样的圆弧形状向三角形的内角方向鼓起,仔细观察,并描绘出这些

圆弧.

所有这三个实验的结果都表明,所形成的弧基本是圆形的,反复的实验进一步证明了这一现象.在前面两个表面张力实验中,弯月面效应(用水银时是凸的,用油时是凹的)使得这些弧的端点变形.事实上,第三个内压实验表明这些弧的端点就是圆弧和三角形边界的切点.

根据在任何一种由这些物理实验所形成的区域中的这三个圆弧之间的关系,可以对它们提出这样三种假设:

ⅰ)它们有相同的半径.

ⅱ)它们有相同的弦.

ⅲ)它们有相同的弧长.

我们根据这三条假设中的任何一条,就可以得到周长为 $p(c < p < P)$ 的相应的那种区域的面积的求积公式.一些具体计算表明,对任何给定的三角形区域 T 及 p,根据第一条假设所得到的区域的面积最大.当然应排除 T 是等边三角形情况,这时从三个假设出发都得出同样的面积.

正是本作者 —— 显然不是一位数学家 —— 猜出了问题的解答,而后来由 DeMar 所证明.

这里所讨论的问题仅是我所关心的更广的问题的一部分.利用 DeMar 的说法,这个更广的问题就是:

问题　给定一个三角形区域 T,其周长为 P,内切圆周长为 c.在包含于 T 内的所有区域中,求区域 R,使用其面积与周长的比最大.

很容易确定,这样的一个区域的周长 p 必须小于 P 而大于 c.解决这个问题的下一步是确定这个区域的一般形状.通过以上的讨论,给出了我一开始所提出的问题的解答.假定这个解答是对的,我用同样的有点不自然的方法立刻解决了这个更广的问题,这个问题的推广解决了①.从而这也提出了一个在数学上有意义的猜想.

从以下这一点上来说,我具有很好的判断力:我求助于 DeMar 教授来证实我的猜想(如果他证明了这些猜想的话);以及我提供了严格数学证明的背景,事情正是这样,DeMar 教授证明了所有这些猜想.我们一起合作把这一系列的猜想进行整理,写出了具有相当价值的论文.

极其不幸的是,在那篇文章发表后不久,F. DeMar 教授就去世了.据说,那篇文章是他的富有创造力的学者生涯中的最后工作.由于 DeMar 教授的去世,使得作者关于更广的问题的工作的发表推迟到他得到另一位同样慷慨的学者的帮助.

---

① 这里是指用物理实验的方法来解决.—— 译者注

平面等周问题的简单解法①

Richard F. Demar

等周问题,顾名思义,就是要在周长给定并满足某些条件的所有区域中,找出面积最大的区域.解这类问题,通常是先证明如果解存在,则它必定具有某种形状,然后再去证明解必定存在.在探讨等周问题的较早一些的著述中,都认为解的存在性是不言而喻的,并没有意识到这是一个必须加以考虑的问题.因此,在默认了解必定存在之后,剩下的问题仅仅是讨论解所必须具有的形状.试图用初等方法来研究这一问题,大致也只能如此.本文就是报告一种初等方法,但它比过去使用过的大多数方法看来具有更广泛的用途.如前所述,我们将始终假定解是存在的,而只是讨论解所必须具有的形状.

从古时候起,人们就考虑等周问题,相传 Dido 女皇(凭直觉)解决过一个等周问题,并由此导致了迦太基城的建立([5],第 882 页).根据 Coolidge 的考证,古希腊数学家 Zenodorus 在公元前二世纪就研究过这类问题,他的研究成果在5个世纪之后由 Pappus 详述并加以推广.18 世纪时,Lagrange 创立了变分法,这对处理等周问题提供了最强有力的工具,尤其适用于这个问题的更一般性的提法.但是,几何方法不仅在平面中,而且在别的某些场合也都成功地使用,这一事实是由 19 世纪时的大几何学家 Jacob Steiner 证明的.

(*)在具有周长 p 的所有区域中,如果 R 的面积最大,则 R 一定是凸的.

集合 S 被称为是凸的,如果对于 S 中的任意两点 A 和 B,直线段 AB 一定整个地被包含在 S 中.(*)的证明见[4].它的证明思路是很简单的,即,如果 R 不是凸的,则存在一个区域,其面积更大但周长比 R 的短(图 1).这条定理不断地被用于去简化遇到的各种问题,但是没有一种方法能自始至终地被用于去解决这各种问题.对于我们现有的大多数问题,几何方法是有奇效的.本文的目的是说明,定理(*)不仅有用于简化问题,而且能用于解决许多问题.一个非常简单的处理手法,但其威力远远超过人们的预料,这便是一例.



图 1

① A simple approach to isoperimetric problems in the plane. Math. Magazine, 1975, 48: 1 - 12.

我们是这样将定理(*)用于解题的.如果我们希望证明,满足某些给定条件且具有最大面积的区域具备某些性质,那么就去考虑满足这些给定条件但不具备这些性质的区域 R.如果我们能构造出一个区域 R',它不是凸的但和 R 有相同的面积和周长并满足那些给定条件,则 R 就不可能具有最大的面积,否则 R' 将是一个非凸的解[①]这一方法曾被 Adler(参见[1])在很狭窄的形式中用于处理一个很特殊的问题,但并没有意识到它有着广泛的应用.

现在用一个非常简单的例子来解释这一方法,我们它去证明在周长为 p 的所有平面区域中,具有最大面积的区域不是正方形.如果 R 是周长为 p 的正方形 $ABCD$,则它的边长是 $p/4$.选取 AB 上的点 E 及 BC 上的点 F,使 EF 的长度小于 $p/4$.构造 $\triangle E'F'B' \cong \triangle EFB$,其中的 F' 和 E' 是边 DC 上的内点.则多边形 $AEFCE'B'F'D$ 不是凸的,但它的面积和周长与 R 相同,因而在周长为 p 的所有区域中 R 不可能有最大的面积(图 2).

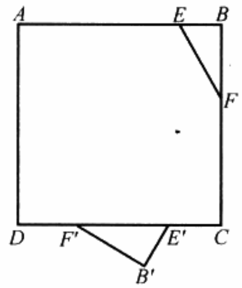


图 2

为了证明这一方法的有用性,我们将用它及它的一些稍加变化的形式去解下面的 3 个问题:设 p 是给定的正数.

ⅰ)设 n 是给定的正整数.在周长等于 p 的所有 n 边形中,求出具有最大面积的一个.

ⅱ)在具有周长 p 的所有平面区域中,求出具有最大面积的区域.

ⅲ)给定一个周长大于 p 的三角形,在被包含在此三角形中的周长为 p 的所有区域中,求面积最大者.

这 3 个问题中的前 2 个是经典的,它们的解很早就知晓,第一个问题的解是正 n 边形,第 2 个问题的解是圆.但我们这里给出的证明是新的.Alfred Garvin 教授提出了第 3 个问题,并猜测了这一问题的正确解,这是他根据物理实验得到的,作者在此表示感谢.Garvin 教授和我都曾认为这一问题是新的.但是,当这一工作做完并且写完这篇文章之后,作者发现 Steiner 在 1842 年已经发表了这一问题及其解([6],p.149).在研究初等剖时有许多这种“撞车”现象.但这儿给出的证明与 Steiner 的不一样,而且我们相信它是新的.

迄今为止,我们一直在用区域这个词,但并没有定义它.所谓**区域**,我们指的是有界连通开集的闭包,它的边界是一条简单的增长可求长曲线[②].本文中用 $l(AB)$ 表示线段 AB 的长度,用 $m(\angle ABC)$ 表示角 ABC 的角度.

文中要用到一些大家熟知的凸集边界的性质.设 R 是一个凸集,其边界为 γ,γ 是一

① 这实际上是一种特殊形式的反证法.—— 译者注

② 这里及下文中,不熟悉这些数学术语的读者们可以按自己原有的直观认识去理解文中的概念及结论,这对于理解本文不会产生影响.—— 译者注

几何天地

条简单的闭连续曲线.设 A 是γ上的一个点.设想自己站在 A 点上且面向集合R.则从 A 出发绕 γ 行走有一个右手方向也有一个左手方向.所谓在 A 点的右手方向切线,是指在 A 点与γ按右手方向相切的射线,类似地定义左手方向切线.凸集边界的性质之一就是在它的每一点既有右手方向切线,也有左手方向切线[3].这两条射线的夹角,按包含在 R 中的那部分度量,称为 A 点的内角.因为 R 是凸的,所以每一点上的内角最多是 $180°$.设 S 是任意一块区域,它的边界在每一点上既有右手方向切线又有左手方向切线.如果其边界上有一点的内角大于 $180°$,则 S 一定不是凸的.如果边界上每一点的内角都等于 $180°$,则称 γ 有切线.凸集边界的另一条性质是,它包含一个稠密点集,其中的每一点上都有切线.γ 的子集β称为是**稠密**的,如果 γ 的任意两点之间有无数个β的点.

第 1 个问题的解 在周长等于 p 的所有 n 边形中,正 n 边形的面积最大.

证明 我们先证明解必定是等边的,然后证明它必定是等角的.设 $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等边的 n 边形.则 P_n 至少有两条相邻边的长度不相等.不失一般性,假定 $l(A_1A_2) > l(A_2A_3)$(图 3).在 A_1A_2 上选取点 C 使$l(A_2A_3) < l(A_2C) < l(A_2A_1)$,连接 A_3C.则 $m(\angle A_2A_3C) > m(\angle A_2CA_3)$.依 A_3C 的垂直平分线反射 $\triangle A_2A_3C$.并设 A'_2 是 A_2 在此反射下的像,从而 $\triangle A'_2A_3C$ 是 $\triangle A_2CA_3$ 的像.因为

$$m(\angle A'_2CA_3) = m(\angle A_2A_3C) > m(\angle A_2CA_3)$$

及

$$m(\angle A_2CA_3) + m(\angle A_1CA_3) = 180°$$

所以

$$m(\angle A'_2CA_3) + m(\angle A_1CA_3) > 180°$$

因此,多边形 $P' = A_1CA'_2A_3\cdots A_n$ 不是凸的.又因为$\triangle A_2A_3C \cong \triangle A'_2CA_3$,所以多边形 P' 与P有相同的周长和面积.然而 P' 有$n+1$条边.为了证明 P_n不可能是问题的解,我们连接 $A_1A'_2$.所得多边形 $A_1A'_2A_3\cdots A_n$ 是 n 边形,其周长小于 P' 的周长从而也小于P_n 的周长,但它的面积却大于 P',从而也大于 P_n 的面积.因此 P_n不可能是问题的解.解必定是等边多边形.

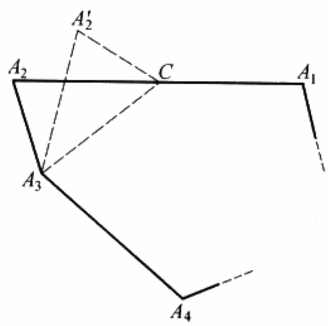


图 3

具有最大面积的多边形必定是等解的结论也可以类似地推得.设 $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等角的n边形;比如说 $m(\angle A_nA_1A_2) > m(\angle A_2)$(见图 4).则存在数 a 使 $0 < \alpha < \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)]$.在 A_2A_3 上选取点 D 使$m(\angle A_2A_1D) = \alpha$.则有

$m(\angle A_3DA_1) = m(\angle A_2) + m(\angle A_2A_1D) = m(\angle A_2) + \alpha < m(\angle A_2) + \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)] =$

$\frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2)+m(\angle A_2)]=$

$m(\angle A_nA_1A_2)-\frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2)-$

$m(\angle A_2)]<m(\angle A_nA_1A_2)-m(\angle A_2A_1D)=$

$m(\angle A_nA_1D)$

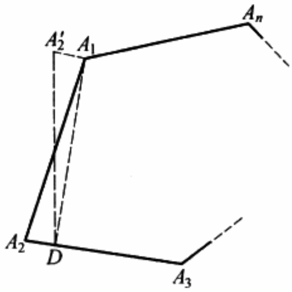


图 4

依 A_1D 的垂直平分线反射 $\triangle A_2A_1D$. 设 A_2A_1D. 设 A_2 是 A_2 的像. 则 $m(\angle A'_2A_1D)=m(\angle A_2DA_1)$. 于是

$$m(\angle A_nA_1D)+m(\angle A'_2A_1D)=m(\angle A_nA_1D)+m(\angle A_2DA_1)>$$
$$m(\angle A_3DA_1)+m(\angle A_2DA_1)=$$
$$180°$$

因此多边形 $P'=A_1A'_2DA_3\cdots A_n$ 不是凸的. 但是由于 $\triangle A_2A_1D\cong\triangle A'_2A_1D$, 所以多边形 P_n 和 P 有相同的周长和面积. 但是 P' 又有 $n+1$ 条边. 所以我们连接 $A_nA'_2$, 得多边形 $P''=A'_2DA_3\cdots A_n$ 有 n 条边, 其面积比 P' 大但周长比 P' 小, 从而面积比 P_n 大但周长比 P_n 小. 因此, P_n 不可能是问题的解. 从而, 一个 n 边形是问题的解的话, 它必定也是等解的. 证毕.

第 2 个问题的解 在具有周长 p 的所有平面区域中, 圆的面积最大.

证明 设 R 是周长为 p 的所有区域中具有最大面积的区域. γ 是 R 的边界. 因为 R 必定是凸的, 所以存在 γ 的一个稠密点集, 在其每一点上 γ 都有切线. 设 A 和 B 是此稠密集中的任意两点, 并使得在 A 点的切线和在 B 点的切线不平行[①]. 两条切线的交点记点 C(图 5). 我们说一定有

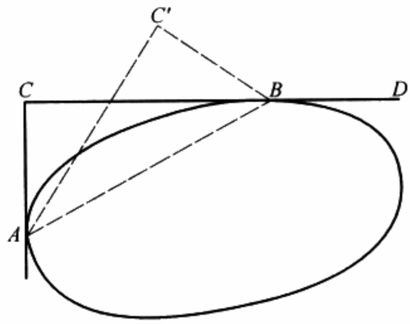


图 5

$$m(\angle CAB)=m(\angle CBA)$$

如果这不成立, 不妨设 $m(\angle CAB)>m(\angle CBA)$. 记 $\overset{\frown}{AB}$ 为 γ 在 $\triangle ABC$ 内部的部分. 依 AB

① 请读者考虑为什么一定存在这样的两点. —— 译者注

的垂直平分线反射 $\triangle ABC$ 有$\widehat{AB}$.设 C' 是 C 在该反射下的像.则 $\triangle ABC'$ $\triangle BAC$ 在此反射下的像.在 γ 上代替$\widehat{AB}$以它在此反射下的像,所得曲线记为 γ'.又设 R' 是以γ' 为边界的区域.因为反射保持面积和长度不变,所以 R 和 R' 有相同的面积和周长.又因为

$$m(\angle CBA)+m(\angle ABD)=180°0$$

及

$$m(\angle C'BA)=m(\angle CAB)>m(\angle CBA)$$

所以

$$m(\angle C'BA)+m(\angle ABD)>180°$$

但是 BD 和 BC' 分别是γ' 在 B 点的左手方向切线及右手方向切线,因此 R' 不是凸的.这和 R 在所有周长为 p 的区域中面积最大这一事实相矛盾.因而 $m(\angle CAB)>m(\angle CBA)$ 的假设是错的.即

$$m(\angle CAB)=m(\angle CBA)$$

如果我们分别作 γ 在 A 点及 B 点的切线的垂线,并记这两条垂线的交点为 F,则角 FAB 和角 FBA 分别是两个相等角的余角,从而也相等,于是有 $l(FA)=l(FB)$.现在我们在 γ 上选取第3点 E,使 γ 在 E 点处有切线,并作出该切线的垂线,记垂线与 AF 及 BF 的交点分别为 G 和 H,并连接 EA 和 EB,则得到等腰三角形 EAG 和 EBH(图 6).因为

$$l(AF)+l(FG)=l(AG)$$

所以由替换得

$$l(BF)+l(FG)=l(EG)$$

另外还有

$$l(BF)+l(FH)=l(EG)+l(GH)$$

由第 2 个等式减去第 1 个等式得

$$l(FH)-l(FG)=l(GH)$$

或者

$$l(FH)=l(FG)+l(GH)$$

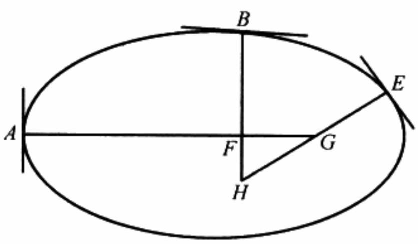


图 6

因此 $\triangle FGH$ 是退化的三角形,又因为 AG,BH 和 EH 是 3 条不同的直线,所以这意味着 $F=G=H$.记这公共点为 G.这样,点 A,B 及 G 的距离都相等,因为 A,B,E 是任意的,

所以 γ 上使 γ 有切线的任意一点离开 G 的距离都等于 $l(AG)$. 因为 γ 是一条连续曲线，所以这就意味着，对于 γ 上的任意一点 X，都有 $l(XG) = l(AG)$. 也就是说，γ 是一个圆.

注 这个证明和现有的某些性质相比，优点在于它只依赖于 γ 的局部性质而不是整体性质. 它实质上是证明了 γ 的每一点的曲率都相等. 因此它所证明的东西超过了定理的结论.

考虑这样一类等周问题，其中，区域边界的一部分被限制为某种形状，而其余部分是自由的，问何种形状的区域面积最大?由前面的证明可知，如果区域具有最大的面积，则其边界的每一个自由部分都应是圆弧. 例如，给定线段 AB，考虑以 AB 为一部分边界且周长等于给定数 $p(p > 2(AB))$ 的所有区域，从中找出面积最大的区域 R，则 R 的边界一定是由 AB 及圆弧 $\widehat{AB}$ 组成，其中 $\widehat{AB}$ 的长度等于 $p - l(AB)$.

在给出第 3 个问题的解之前，让我们先排除已被考虑过的这一问题的一些特殊情形. 给出一个三角形区域 T 及数 p，p 小于 T 的周长，我们要在包含在 T 中且周长为 p 的所有区域中找出面积最大的区域 R. 设 T 的内接圆的周长为 c，如果 $p \leqslant c$，则问题 3 与我们已经解出的问题 2 是一样的. 因此在问题 3 中，我们假定 $p > c$.

第 3 个问题的解 设 T 是给定的三角形区域，周长为 P，内接圆的周长等于 c. 设 p 是一个定数，$c < p < P$. 则在所有包含在 T 中且周长为 p 的区域中，具有最大面积的区域 R 的边界 γ 由 3 条圆弧及连接这些圆弧的端点的 3 条在 T 的边上的线段组成，其中 3 条圆弧的半径都相等，而且每一条圆弧都与 T 的两条相邻的边相切(图 7).

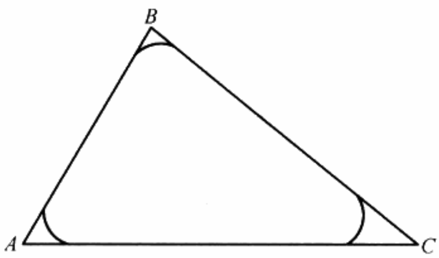


图 7

证明 设 R 是问题的解，γ 是其边界. 则由上一个问题解后的注知道，γ 的任意一部分，如果不在 T 的边界上，则必定是圆弧. 因为 $p < P$，所以 R 的边界不可能与 T 的边界完全重合；从而 γ 至少包含一条圆弧.

我们首先证明 T 的所有顶点都不在 γ 上. 设 T 是 $\triangle ABC$，并假定顶点 C 在 γ 上. 因为 R 是凸的，所以如果 3 个顶点，A，B 及 C 都在 γ 上，则 γ 必定和 T 的边界重合，我们已经说过，这是不可能的. 因此至少有一个顶点，譬如说 B，不在 γ 上. 则存在圆弧 β，其端点 K 及 M 分别在 $\triangle ABC$ 的两边上，不妨设在 BC 及 AB 上(图 8). 在 BC 上选取点 E，在 AC 上选取点 F，使它们"紧靠"着 C. "紧靠"这个词的意义我们以后详细说明. 构造圆弧 连接 E 和 F，此圆弧的半径与 β 的半径相同，圆心位于 EF 的不包含 C 的一侧. 现在 β 上选取 G

和 H,它们都不是 β 的端点,使得 $\overset{\frown}{GH} \subseteq \overset{\frown}{EF}$. 设 C' 是不在 R 上的点并使得 $l(C'G) = l(CE)$ 且 $l(C'H) = l(CF)$. 这里,有一点必须得到保证,即 C' 一定要在 T 的内部,只要 E 及 F 充分接近 C,这总是可以做到的,这也就是我们前面所说的"紧靠"的含意. 总起来说,点 E 及 F 要选取得使下列条件都成立:

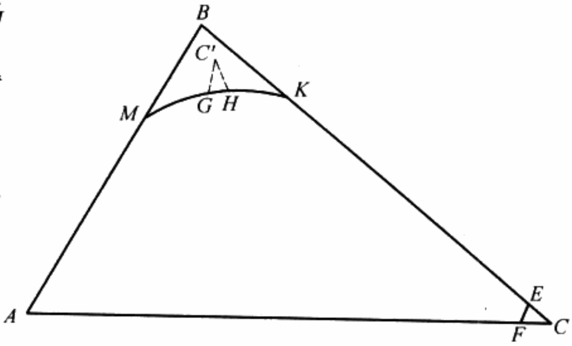


图 8

ⅰ) E 在 KC 上;

ⅱ) $l(\overset{\frown}{EF}) < l(\overset{\frown}{MK})$;

ⅲ) $\overset{\frown}{EF}$ 与 BC 不相切;

ⅳ) C' 在 T 的内部.

在 γ 上,用 $\overset{\frown}{EF}$ 代替 $FC \cup CE \cup \overset{\frown}{EF}$ 为边界的图形是全等的,所以 R 和 R' 具有相同的面积及周长. 但因为 EC 不是 $\overset{\frown}{EF}$ 的切线,所以 $C'G$ 不是 $\overset{\frown}{GH}$ 的切线,从而它也不是 β 的切线. 于是 γ' 在 G 的内角大于 180°,这说明 R' 不是凸的,与 R 是问题的解相矛盾. 从而证明了 T 的任意一个顶点都不在 γ 上.

其次我们证明包含在 γ 中的圆弧都有相同的半径. 如不然,设 γ 包含 2 条半径不相等的弧 β_1 和 β_2,设 β_1 的半径是 r_1,β_2 的半径是 r_2,$r_1 < r_2$(图 9). 在 β_1 上选取点 D 和 E,在 β_2 上选取点 F 和 G,使得弦 DE 和 FG 满足等式 $l(DE) = l(FG)$. 构造半径为 r_1 的弧 σ_1 连接 F 和 G,半径为 r_2 的弧 σ_2 连接 D 和 E,由点 D,E,F 和 G 的适当选取,我们总能使 σ_1 及 σ_2 都在 T 中. 在 γ 中用 σ_1 替换包含在 β_2 中的 $\overset{\frown}{FG}$,用 σ_2 替换包含在 β_1 中的 $\overset{\frown}{DE}$,所得曲线记为 γ'. 设 R' 是以 γ' 为边界的区域,则 R 和 R' 有相等的面积和周长. 但是 γ' 在 F 点的内角大于 180°(在 G 点的内角同样),所以 R' 不是凸的. 这又和 R 是问题的解相矛盾. 从而,包含在 γ 中的每一条圆弧都有相等的半径.

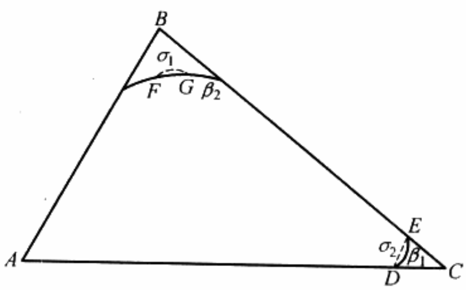


图 9

最后,我们证明,包含在 γ 中的每一条圆弧都与它们相交的 T 的每一条边相切. 同样我们设 R 是问题的解,γ 是其边界. 设 β 是包含在 γ 中的一条圆弧,它和 T 的一条边 AB 交于点 X,并假定 β 与 AB 在 X 点不相切(图 10). 在 β 上取一点 D(充分接近于 X),并通过 D

点作β的切线EY交AB于E.因为β与AB在X点不相切,所以$l(EX) < l(ED)$.在EA上选取点G使得$l(EX) < l(EG) < l(ED)$.则在$\triangle BDG$中,$m(\angle EGD) > m(\angle EDG)$.如果我们沿着$\beta$从$D$移动到$X$,然后再沿着$\gamma$继续移动,则有两种可能的情形:如果线段$XG$是边界$\gamma$的一部分,则我们沿着$XG$移动;否则我们到达$XG$上的某一点,它是$\gamma$中另一条圆弧的端点.但无论哪一种情形,$\gamma$和$DG$都相交于一个不是$D$的点,记这个交点为$H$($H$可能就是$G$,也可能不是,图11).设$HK$是$\gamma$在$H$点的左手方向切线.由$m(\angle DHK) \geqslant m(\angle DGE) > m(\angle EDG)$.依$HD$的垂直平分线,反射$(DH)_\gamma$,即$\gamma$在$\triangle EDG$内部及边界上的部分以及$\gamma$在$H$点的左手方向切线$HK$.设$K'$表示$K$的像.在$\gamma$中用$(DH)_\gamma$在

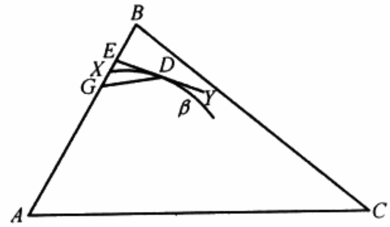


图10

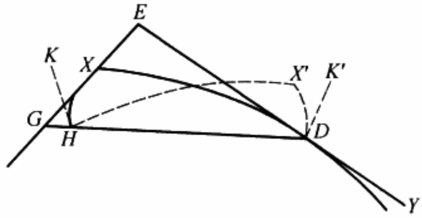


图11

此反射下的像代替$(DH)_\gamma$,所得曲线记为γ',以γ'为边界的区域记为R'①.因为反射保持距离不变,所以R和R'的面积为周长都相等.又因为DK'是γ'在D点的右手方向切线;DY是γ'在D点的左手方向切线;DY是γ'在D点的左手方向切线;

$$m(\angle K'DG) = m(\angle KHD) > m(\angle EDH);$$
$$m(\angle EDH) + m(\angle HDY) = 180°$$

所以

$$m(\angle K'DH) + m(\angle HDY) > 180°$$

于是γ'在D点的内角大于180°,从而R'不是凸的.但是这与R是问题的解的假定相矛盾.因此β与AB在X点相切.结论是:包含在γ中的每一条圆弧和与其相交的T的每一条边相切.

至此,我们已经清楚地证明了,除了以下2点外,问题的解R的边界γ必定满足所说的所有条件:(1)γ和T的每一条边相交的部分是直线段;(2)包含在γ中的圆弧恰好是3条.现在我们来说明,从已经证得的结论可以推得这2点性质.因为R是凸的,所以γ和T的边相交的部分必定或者是空集,或者只是一个点,或者是一条直线段.假设γ和T的某一条边,设为AB,相交是空集或者只是一个点.因为A和B不在γ上,又因为包含在γ中的一条圆弧β,与AC及BC相切,β的圆心与点A及B不在β的同一侧,并使得β与AB边不相交或者相切.因为C不在γ上,所以存在γ的另一条圆弧ω与AC和BC相切,其圆心

① 因D取得充分接近x,所以一定可使R'被包含在三角形中.——译者注

与 C 不在 ω 的同一侧①由于这两条(不同的——译者注)弧 β 及 ω 必定有相等的半径且都和 AC 及 BC 相切,所以它们的切点相同,因此 $\beta \cup \omega$ 是一个圆.然而这个圆的周长至多是 c,这与 γ 的长度是 $p > c$ 相矛盾.这就证明了,γ 和 T 的每一条边相交的部分一定是直线段.又因为 T 的3个顶点都不在 γ 上,所以 γ 恰好包含了3条圆弧.证毕.

注1 指出下面这一性质也许是很有意义的,即包含在 γ 中的 T 上的3条线段的长度之比是 $l(AB):l(BC):l(CA)$.如果我们以包含在 γ 中的圆弧的相同半径,作出与 AB 及 AC 相切的圆 β,并作 β 的平行于 BC 的切线 DE,再作 EF 平行于 AB,则由 AD,DE 及 EA 和 β 相切的点确定的 β 的3条圆弧与包含在 γ 中的3条圆弧相等,而且线段 EF,FC 及 CE 分别与 AB,BC 及 CA 上包含在 γ 中的线段相等(图12).解 R 的面积正好等于圆 β,平行四边形 $DEFB$ 及 $\triangle EFC$ 的面积之和.

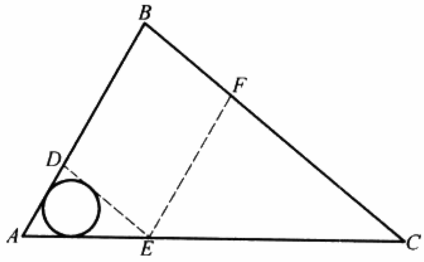


图 12

注2 如果问题3中的三角形 T 用任意一个凸多边形代替,则显而易见的是,除了 γ 与多边形的给定边的相交部分可能只是一个点或空集以外,有关 γ 的其余性质的证明在这里依然成立.因此,γ 一定是由几段相同半径的圆弧及包含在给定多边形的边上的线段一起组成的,其中的每一条圆弧相切于之相交的每一条边.

参考文献

[1] Adler C F. An isoperimetric problem with an inequality[J]. Amer. Math. Monthly, 1945,52:59-69.

[2] Coolidge J L. A History of Geometrical Methods[M]. Oxford: Oxford University Press, 1940.

[3] Krasnoselskii M A, Rutickli Ya B. Convex Functions and Orlicz Spaces[M]. Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.

[4] Lyusternik L A. Convex Figures and Polyhedra. New York: Dover, 1963.

[5] Newman J R. The World of Mathematics[M]. Simon and Schuster, New York, 1956.

① 请读者自己证明,圆弧 β 和 ω 必定存在且不相同.——译者注

分点圆①—— 一个预赛题背景

弗兰克·斯韦茨

在一个平面上给定 $2n+3$ 个点，其中，任何 3 个点均不在同一直线上，任何 4 个点均不在同一个圆周上．试证明，总可以找到一个圆，它恰好通过 3 个点，并把其余的点平分，即圆内含有 n 个点，其余 n 个点在圆外．

证明 ［滑铁卢大学(University of Waterloo) 默里·克兰金(Murray Klamkin)］：

设 A 和 B 是给定点集 T 的凸壳 H 的两个相邻的顶点(图 1)．因为 T 上的点，任何三个点均不在一条直线上，所以，A 与 B 的连线上没有 T 中的点(A，B 除外)．令 C' 为通过 A 与 B 的一个比较大的圆，其圆心 O 位于 H 之外．圆 C' 位于 H 内的扇形 AXB(画阴影的部分)，可能包含 T 的点．但是，把圆 C' 放大，使弓形 AXB 任意接近线段 AB．这样，将使扇形 AXB 越来越多(最后大量) 地失去 T 的点．因此，存在任何多个通过 A 与 B 的圆，它们均不包括 T 的其他的点．假设 C' 就是这样的圆，O 为其圆心．

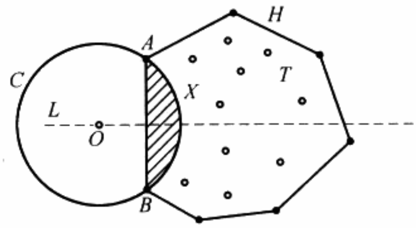


图 1

因此，我们得到了一个圆，它刚好通过 T 的两个点 A 和 B，且内部不包含 T 的点．现在，我们改变圆 C，使其圆心 O 沿线段 AB 的垂直平分线 L 向线段 AB 方向运动，同时使其半径总是保证圆 C 通过 A，B 两点．此时，扇形 AXB 不断扩大，覆盖 H 的部分越来越多．如果 O 点越过了线段 AB，则扇形 AXB 将成为圆 C 通过 A，B 两点确定的两部分中的大者，并且，在这一过程，总有一次要覆盖整个凸壳 H，从而也覆盖整个 T．由于 T 中的任何 4 个点均不位于同一个圆上，所以扇形 AXB 一个一个地吞食 T 的点．如果第 $n+1$ 个点 K 位于这个圆周上，那么，圆 C 内部恰好包含 n 个点，A，B，K 三个点位于该圆周上，T 的其余 n 个点，仍然在圆 C 的外部，从而得证．

证明 ［滑铁卢大学(University of Waterrloo)L. J. 迪基(L. J. Dickey)］：

① 此题是 1962 年在中国举行的一次数学竞赛预赛的试题之一．参见《美国数学月刊》(AMM)，1972 年，898 页，宾夕法尼亚州学院弗兰克·斯韦茨(Frank Swetz)《中国数学竞赛》一文．

假设 O 是给定点的任一点，R 是圆心为 O 的任一圆．我们在 R 上作圆的映射(关于圆的映射，参见本题后给出的参考文献或译者注)．此时，圆心 O 映射为无穷远点，从而，我们在有限的区域内得到了 $2n+2$ 个像点构成的集合 S(图2)．假设 t 是一条直线，它使 S 中的所有点位于 t 的一侧．现在，向 S 方向移动 t，直到它在点 A' 第一次与集合 S 相交．(换句话说：A' 是 S 的凸壳的一个顶点，t 是一条通过 A' 的直线，它与该凸壳只有一个公共点，即 A'．)一条通过 A' 点确定的 t 的射线，在绕 A' 点旋转时，扫过了集合 S．后面，我们将证明，此时，这条旋转的射线只能一个一个地与 S 中的点接触．因此，在旋转过程中，这条射线会有这样的位置，在这个位置上，有一个像点 B' 在这条射线上，而在射线 $A'B'$ 的左右两侧，恰好有 n 个点．

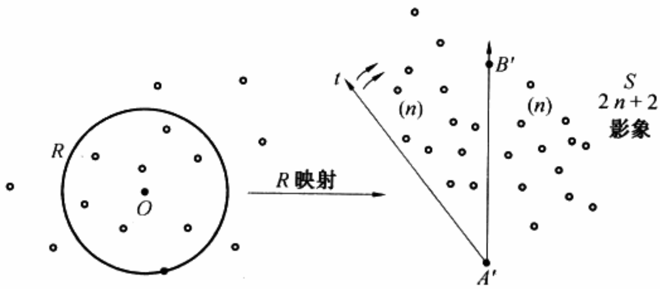


图 2

如果初始集合(die Ausgangsmenge)中的 A，B 两点是 A' 和 B' 的原像，则 $A'B'$ 不可能通过映射圆(das Spiegelkreis)的圆心 O，否则，A，B，O 三点位于一条直线上(这与题设矛盾)．因此，直线 $A'B'$ 的原像是通过 O 点的一个圆 K(图3)．所以，圆 K 通过初始集合的三个点 A，B，O．由于在把集合 S 的点返回到初始位置的逆变换中，位于 $A'B'$ 一侧的合部像点，将被绘在圆 K 的内部，而在 $A'B'$ 另一侧的全部像点，则出现在圆 K 的外部，因此，圆 K 具有所要求的性质(通过 O 点的圆 K 的切线平行于 $A'B'$)．

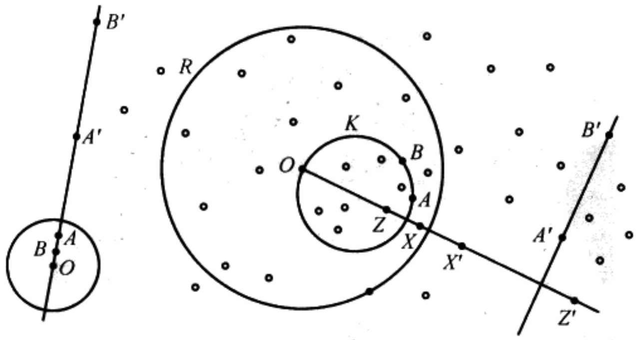


图 3

这样，我们不仅解答了这个问题，而且还得知，对给定集合中的每个点 O 而言，都有一个圆，这个圆就是这个问题的解(原文误为 der Lösung der Aufgabe ist，应为 der die

Lösung Aufgabe ist，译者）.在这$2n+3$个圆中，最多有$(2n+3)/3$个互相不同的圆，因为通过 O,A,B 的圆，计入3次（由于这个集合中的任何4个点均不在同一个圆上，所以，在这$(2n+3)$个解圆中，任何一个都不可能入计3次以上）.但是，多个解圆通过一个点，这是非常可能的.

最后，我们得出了上面提出的结论：在扫过集合 S 的过程中，t 的射线只能一个一个地接触S 中的像点.因为如上所证，如果有一个像点 C' 位于该射线上，则该射线不可能通过 O 点（否则，O 点与原像C,A 位于同一条直线上）.如果有两个（或多个）像点，比如 C' 和D'，同时位于该射线上，则直线 $A'C'D'$ 的原像将是一个通过O 点的圆（因为 $A'C'D'$ 不通过 O 点），它通过 O,A,C,D 四个给定点，这与题设矛盾.

参 考 文 献

Coxeter und Greitzer, Geometry Revisited, Vol. 19, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, S. 108ff.

［译者注］　这里所说的圆的映射，实际上是复变函数中分式线性映射的一种.它具有性质：把给定圆的圆心映为无穷远点，把圆内的点映成圆外的点，把圆外的点映成圆内的点，把圆周上的点仍然映射到圆周上.经过这种映射，通过圆心的任一圆被映成直线，通过圆心的任一直线仍被映成通过圆心的直线，不通过圆心的任一圆仍被映成圆，不通过圆心的直线被映成圆.有关分式线性映射的知识，读者可参考有关复变函数的教科书.例如：余家荣，《复变函数》，第六章 §2.（见附录）



附录　分式线性函数

现在要来考查特殊的有理函数,即两个不恒等于零的线性函数的商.这样的函数称为分式线性的,其形状为

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

以符号 $w=Sz$ 表之.同时,a,b,c,d 都是复常数,并假定

$$ad-bc\neq 0 \qquad ①$$

若 $c=0$,则由①知,因 $d\neq 0,a\neq 0$ 而函数 $w=Sz$ 的形状是

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d} \qquad ②$$

于是任一个复数 z 皆对应一个复数 w.②的等号右端是 z 的一个多项式.因此,$z=\infty$ 是函数②的一个极点(一阶的).所以,在 $z=\infty$ 处令 $w=\infty$.总之:

任一个复数 z(包括 $z=\infty$)皆通过②而对应于一个复数 w(相应地 $w=\infty$).

这个对应关系还是可逆的,因为由②解出 z 即得

$$z=\frac{d}{a}w-\frac{b}{a} \qquad ③$$

以符号 $z=S^{-1}w$ 表示之.于是每一个复数 w 恰是一个复数 z 的象 $w=Sz$.因此 $w=\infty$ 是函数③$z=S^{-1}w$ 的一个极点(一阶的),即在 $w=\infty$ 处令 $z=\infty$,于是,在映射②之下只有 $z=\infty$ 变为 $w=\infty$.

当 $c\neq 0$ 时

$$w=\frac{1}{c}\cdot\frac{az+b}{z+\frac{d}{c}}=\frac{1}{c}\,\frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)+\left(b+\frac{ab}{c}\right)}{z+\frac{d}{c}}$$

故

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \qquad ④$$

每个 $z\neq-\frac{d}{c}$ 恰对应于一个复数 w.函数④$w=Sz$ 当 $z\neq-\frac{d}{c}$ 时是正则的.④的等号右端的式子可以看成是 $w=Sz$ 的 Laurent 展开式.于此,$z=-\frac{d}{c}$ 为极点.故点 $z=-\frac{d}{c}$ 对应于 $w=\infty$.$\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$ 在 $z=\infty$ 是正则的,且在那里的值为0.于是④的等号右端 $\frac{a}{c}+\frac{ab-bc}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$ 在 $z=\infty$ 也是正则的且在 $z=\infty$ 的值为 $\frac{a}{c}$.

由 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 解出,得到 $z=S^{-1}w=\frac{-dw+b}{cw-a}$,仿④,可将此结果变形为

$$z=\frac{-d}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{w-\frac{a}{c}}$$

于是,每个 $w\neq\frac{a}{c}$ 恰对应于一个复数 z,它通过 $w=Sz$ 而变为 w.当 $w=\infty$ 时得到 $z=-\frac{d}{c}$,即只有

$z=-\frac{d}{c}$ 在映射 $w=Sz$ 之下变为 $w=\infty$. 因为 $w=\frac{a}{c}$ 是函数 $z=S^{-1}w$ 的极点,故必有 $z=\infty$, $w=Sz$ 在那里取得值 $w=\frac{a}{c}$. 总之,函数 $w=Sz$ 是单值也可逆的. 综上所述:

当 z 为异于 $-\frac{d}{c}$ 的复数时, $w=Sz$ 是一个异于 $\frac{a}{c}$ 的复数;

当 $z=-\frac{d}{c}$ 时, $w=\infty$;

当 $z=\infty$ 时, $w=\frac{a}{c}$.

两种情况($c=0$ 与 $c\neq 0$)共同说明:

分式线性函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$,将由 $z=\infty$ 扩充了的 z 平面(z 球)一对一地映射到由 $w=\infty$ 扩充了的 w 平面(w 球)上.

分式线性函数的特性:

首先证明:

Ⅰ. 若 $w=Sz$ 为一分式线性函数,则 z 平面上的直线和圆通过函数 $w=Sz$ 被映射为 w 平面上的直线或圆①.

为了证明这个论断,先要证明两个引理.

引理 1. z 平面上的直线与圆都是、也只有它们是适合形状为

$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$($A$ 与 C 为实数, $AC<|B|^2$)的方程的点集. 于此,当点集为直线时 $A=0$,当点集为圆时 $A\neq 0$.

证明

ⅰ)设 $Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C'=0$, A 与 C 皆为实数, $AC<|B|^2$ 且 $A\neq 0$. 用 A 遍除方程各项得

$$Az\bar{z}+\frac{B}{A}z+\frac{\bar{B}}{A}\bar{z}+\frac{C}{A}=0$$

由此得到

$$\left(z+\frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right)\left(\frac{C}{A}-\frac{B\bar{B}}{A^2}\right)=0$$

亦即

$$\left|z+\frac{\bar{B}}{A}\right|^2=\frac{1}{A^2}(|B|^2-AC)>0$$

这是中心在 $z_0=-\frac{\bar{B}}{A}$ 且半径为 $r=\frac{1}{A}\sqrt{|B|^2-AC}$ 的圆的方程.

ⅱ)反之,若给定了一个中心在 z_0 而半径为 r 的圆,则此圆的表示式为 $|z-z_0|=r$. 由此得到

$$|z-z_0|^2=(z-z_0)(\overline{zz_0})=z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}+|z_0|^2=r^2$$

令 $A=1$, $B=-\bar{z}_0$,且 $C=|z_0|^2-r^2$,即可看到,这是属于上述形状的一个方程. 于是 $\bar{B}=z_0$, $|B|^2=|z_0|^2$,故确实 $AC<|B|^2$.

ⅲ)设 $Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$, C 为实数. 这是引理 1 中所说的当 $A=0$ 时那种形状的一个方程. 令 $z=$

① 这即是说,z 平面上一切直线与圆的总体被变换为 w 平面上的一切直线与圆的总体. 将直线看成是通过 ∞ 点的圆,则可简述为:通过 w = Sz, z 平面上的圆变换为 w 平面上的圆. 因此,性质 Ⅰ 又称为保圆性.

$x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.代入后得到

$$x(B+\bar{B})+y\mathrm{i}=(B-\bar{B})+C=0$$

故

$$2\mathrm{Re}[B]\cdot x-2\mathrm{Im}[B]\cdot y+C=0$$

这是一个直线方程.

ⅳ)xy 平面上一条直线上的动点的坐标(x,y)适合一个线性方程 $a_1x+a_2y+a_3=0$,a_i 为实数.令 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,从而 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,$y=-\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\bar{z})$.代入则得

$$\frac{1}{2}a_1(z+\bar{z})-\frac{i}{2}(z-\bar{z})+a_3=\frac{1}{2}(a_1-\mathrm{i}a_2)z+\frac{1}{2}(a_1+\mathrm{i}a_2)\bar{z}+a_3=0$$

这是符合所要求的形式的一个方程,其中 $A=0$,$B=\frac{1}{2}(a_1-\mathrm{i}a_2)$ 且 $C=a_3$(实数).证毕.

引理 2 若 $w=S_2=\frac{az+b}{cz+d}$,$ad-bd\neq 0$(即 $w=Sz$ 为一分式线性函数),则可用(至多三个)特殊形状的分式线性函数

$$w=az+b\qquad(a\neq 0)\tag{⑤}$$

$$w=\frac{1}{z}\tag{⑥}$$

的复合去表示 Sz.

证明 $w=Sz$ 只有一个一阶极点.

ⅰ)若极点在 $z=\infty$,则据 6.2 之定理 2 知 Sz 的部分分式是

$$Sz=\mathrm{const}+b_{-1}z,\qquad b_{-1}\neq 0$$

即 Sz 本身就符合 ⑤ 的形状.

ⅱ)若 Sz 的极点在 z_0,z_0 为一(有限的)复数,Sz 的部分分式是

$$Sz=\mathrm{const}+\frac{a_{-1}}{z-z_0},\qquad a_{-1}\neq 0$$

令 $z-z_0=z'$,$\frac{1}{z'}=z''$,则 $w=Sz=\mathrm{const}+a_{-1}z''$.于是 Sz 被表示为形状为 ⑤ 或 ⑥ 的三个函数的复合.证毕.

由引理 2 可知,只需对于特殊开头的分式线性函数 ⑤ 与 ⑥ 去证明 Ⅰ.

情况 ⑤ 的证明.由引理 1 知,直线或圆上的点 z 适合

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0,\qquad(A,C\text{ 为实数},AC<|B|^2)\tag{⑦}$$

若 $w=az+b$,$a\neq 0$,则 $z=\frac{w-b}{a}$,代入后得

$$A\frac{w-b}{a}\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}+B\frac{w-b}{a}+\bar{B}\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}+C=0$$

令

$$\frac{A}{|a|^2}=A',\quad\frac{B}{a}-\frac{A}{|a|^2}\bar{b}=B'$$

及

$$C-\frac{Bb}{a}-\frac{\bar{B}\bar{b}}{\bar{a}}+A\frac{|b|^2}{|a|^2}=C'$$

则得

$$A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C' = 0$$

这一点集仍是一个直线或一个圆；于是，因$\frac{Bb}{a} + \frac{\bar{B}\bar{b}}{\bar{a}} = 2\text{Re}\left[\frac{Bb}{a}\right]$，故 C' 也是实数，还有

$$|B'|^2 = B'\bar{B}' = \frac{|B|^2}{|a|^2} - \frac{ABb}{a|a|^2} = \frac{A\bar{B}\bar{b}}{\bar{a}|a|^2} + \frac{A^2|b|^2}{|a|^4}$$

$$A'C' = \frac{AC}{|a|^2} - \frac{ABb}{a|a|^2} - \frac{A\bar{B}\bar{b}}{\bar{a}|a|^2} + \frac{A^2|b|^2}{|a|^4}$$

因而 $A'C' < |B'|^2$.

情况 ⑥ 的证明. 这里，将 $w = \frac{1}{z}$ 代入 ⑦，得到

$$A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + B\frac{1}{w} + \bar{B}\frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

以 $w\bar{w}$ 乘之，结果是

$$Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0$$

这仍旧是一条直线或一个圆的方程；与 ⑦ 不同的只不过是 A 与 C、B 与 $\bar{B}$ 分别交换了位置①. 证毕.

为了陈述分式线性函数的一个更深刻的性质，兹先定义四个点的交比的概念. 设 z_1、z_2、z_3、z_4 为复平面上的四个不同的点，则此四个点的交比指

$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

固定 z_1, z_2, z_3 而令 $z_4 = z$ 在复平面上变动，则其交比为一分式线性函数：

$$Tz = \text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

显然 $Tz_2 = 0, Tz_3 = 1$. 而且 $z = z_1$ 是 Tz 的一个极点，故 $Tz_1 = \infty$. 最后，当化 Tz 至形状 ④ 时可以看到 $T\infty = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$. 因此令②

$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_1) = \infty,$$
$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_2) = 0,$$
$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_3) = 1,$$

且

$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \qquad ⑧$$

于是下列命题 Ⅱ 成立：

Ⅱ. 在分式线性函数 $w = Sz$ 的映射下，Riemann 数球上四个(互不相同的)点的交比不变，也就是

$$\text{DV}(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4) = \text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

---

① 若 $A = 0$ 且 $C = 0$，则 ⑦ 表示一条直线，它被 $w = \frac{1}{w}$ 映射为又一条直线. 若 $A = 0, C \neq 0$，则 ⑦ 表示一条直线，可是它被 $w = \frac{1}{z}$ 映射为一个圆.

② 在此指出，当令 $z_3 = z$ 变动而考查分式线性函数 $\text{DV}(z_1, z_2, \infty, z_4)$ 以及类似的极限情况. 特别地，$\text{DV}(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$. 以此，特别地对于 Riemann 数球上四个任意的互异的点定义了交比.

由引理 2 知，只需对特殊形状的分式线性函数 ⑤ 与 ⑥ 证明这个命题.

对于 ⑤：若所有的 z_i 皆异于 $z=\infty$，则 $w_i = az_i + b$ 也异于 $w=\infty$，且

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,w_4)=\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\cdot\frac{w_4-w_2}{w_4-w_1}=\frac{a(z_3-z_1)}{a(z_3-z_2)}\cdot\frac{a(z_4-z_2)}{a(z_4-z_1)}=$$

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

此外，若 $z_4=\infty$，则亦有 $w_4=\infty$，且由 ⑧ 知

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,w_4)=\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{a(z_3-z_1)}{a(z_3-z_2)}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,\infty)$$

对于 ⑥：先设一切 w_i 皆异于 $z=0$ 和 $z=\infty$，于是 $w_i=\dfrac{1}{z_i}$ 也异于 $w=0$ 和 $w=\infty$，且

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,w_4)=\frac{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}\cdot\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_4}-\dfrac{1}{z_1}}=\frac{z_2(z_1-z_3)}{z_1(z_2-z_3)}\cdot\frac{z_1(z_2-z_4)}{z_2(z_1-z_4)}=$$

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

此外，若 $z_4=0$，则 $w_4=\infty$，且

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,\infty)=\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=\frac{z_2(z_1-z_3)}{z_1(z_2-z_3)}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{0-z_2}{0-z_1}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,0)$$

若 $z_4=\infty$，则 $w_4=0$，且

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,0)=\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\cdot\frac{0-w_2}{0-w_1}=\frac{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}\cdot\frac{-\dfrac{1}{z_2}}{-\dfrac{1}{z_1}}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,\infty)$$

若 $z_3=\infty$ 且 $z_4=0$，则 $w_3=0$，$w_4=\infty$，故

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,0,\infty)=\frac{-w_1}{-w_2}=\frac{-\dfrac{1}{z}}{-\dfrac{1}{z_2}}=\frac{-z_2}{-z_1}$$

可知这个结果等于 $\mathrm{DV}(z_1,z_2,\infty,0)$. 证毕.

最后要从 Ⅱ 引出一个推论：

当且仅当复平面上的四个（互异）点位于一条直线或一个圆上时，此四点的交比为实数①.

考查函数

---

① 当四个点之中有一个是 $z=\infty$ 时，这个命题也仍然成立. 这时自然只须考查直线的情况. 不妨设 $z_4=\infty$，于是当 $\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,\infty)=\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ 为实数时，z_1,z_2,z_3 恰在一条直线上. 这是可以由视 z_3-z_1 为由 z_1 至 z_3 的向量（参看 1.2.）等而得知的，因为当交比为实数时

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\equiv\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)\equiv 0(\mathrm{mod}\ \pi).$$

$$Tz = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

则可直接得以证明：

a) 设四点的交比为实数．函数 $w = Tz$ 将 z_1, z_2, z_3 映射为 $\infty, 0, 1$．所以 Tz_1, Tz_2, Tz_3 都在实轴上．由于 $Tz_4 = DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是实数，所以 Tz_4 也在实轴上．按 Ⅰ，反函数 $z = T^{-1}w$ 将实轴变为一条直线或一个圆．所以 $T^{-1}(Tz_i) = z_i$ 在此直线或圆上．

b) 反之，假定 z_1、z_2、z_3、z_4 在一条直线或一个圆上．将 Ⅱ 应用于 Tz，则见，Tz_1, Tz_2, Tz_3 及 Tz_4 必在一条直线或圆上．这个像曲线只能是实轴：因为 $Tz_1 = \infty$，故像曲线必为直线，又因为 $Tz_2 = 0, Tz_3 = 1$，故此直线只能是实轴．于是 Tz_4 也必在实轴上，即，$Tz_4 = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 为实数．证毕．

作为一个分式线性函数的例子，考查

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \qquad |z_0| < 1. \tag{⑨}$$

$z = z_0$ 时 $w = 0$．极点位于 $z = \dfrac{1}{\bar{z}_0}$，故在 $|z| > 1$ 上．据 Ⅰ 知⑨将单位圆 $|z| = 1$ 射为一个圆或一条直线．令 $z = 1$，则 $w = \dfrac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0}$，故 $|w| = \dfrac{|1 - z_0|}{|1 - \bar{z}_0|} = 1$，因为 z_0 与 $\bar{z}_0$ 是关于实轴成对称的点，且 $|1 - z_0|$ 与 $|1 - \bar{z}_0|$ 分别是点 $z = 1$ 与 $z = z_0$ 之间和点 $z = 1$ 与 $z = \bar{z}_0$ 之间的距离．当 $z = -1$ 时，$w = \dfrac{1 + z_0}{1 + \bar{z}_0}$，故又得到 $|w| = \dfrac{|1 + z_0|}{|1 + \bar{z}_0|} = 1$，因为 $|1 + z_0|$ 与 $|1 + \bar{z}_0|$ 分别是由 $z = 1$ 至 $z = -z_0$ 与至 $z = -\bar{z}_0$ 的距离．最后令 $z = \mathrm{i}$，则 $w = \dfrac{\mathrm{i} - z_0}{1 - \mathrm{i}\bar{z}_0} = \mathrm{i}\dfrac{1 + \mathrm{i}z_0}{1 - \mathrm{i}\bar{z}_0}$，故

$$|w| = 1 \cdot \frac{|1 + \mathrm{i}z_0|}{|1 - \mathrm{i}\bar{z}_0|}$$

因为 $(\overline{\mathrm{i}z_0} = -\mathrm{i}\bar{z}_0)$，所以 $\mathrm{i}z_0$ 与 $-\mathrm{i}\bar{z}_0$ 也是对称于实轴的点，故又有 $|w| = 1$．这就说明了 $z = +1$、-1、i 的像是圆 $|w| = 1$ 上的三个点．所以 $|z| = 1$ 的像是 $|w| = 1$．因此对于 $|z| = 1$ 上任一点皆有 $|w| = 1$．又因为 $z = z_0$ 时 $w = 0$，所以此函数不可能是常数，据极大模原理(4.5，推论 5)知在 $|z| < 1$ 上 $|w| < 1$．这说明函数⑨将单位圆映射为单位圆，而且这时 $|w| < 1$ 上的每一个 w 在 $|z| < 1$ 的一个点上被取得，因为由⑨解出 z 得 $z = \dfrac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0 w}$，即反函数的形状仍是⑨(不过，用 $-z_0$ 代替了 z_0)．所以对于 $|w| < 1$ 上的 w 也有 $|z| < 1$．由此是到下述结论：

函数 $w = \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$，$|z_0| < 1$，将圆 $|z| < 1$ 一对一地映射到 $|w| < 1$ 上．

平 面 凸 区 域[①]

H·赫尔芬斯坦

试题 试证明,平面上面积为 π(或大于 π)的每个闭凸区域包含两个距离为2的点(图1).

证明 引入极坐标.选择坐标轴,使这个凸区域在坐标与该轴相切.假设区域边界的方程为 $r=f(\theta)$,则由众所周知的面积公式得知

$$A=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

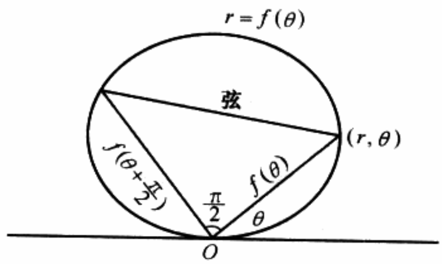


图1

如果在最后这个表达式的第二个积分中,以 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 代替 θ,则它等于积分

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

对这个凸区域而言

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(\theta)+f^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta$$

可见,被积函数是所研究区域的一条弦长之平方.

如果该区域中任何两个点之间的距离小于2,则这些弦长均小于2.由此可知

$$A<\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\pi$$

这与题设矛盾,故得证.

从这个证明也可推知,如果所有的弦均不大于2,则面积 π 不可能再增加.因此,如果

① 《π,μ,ε》(Pi Mu Epsilon),1956年,185页,问题74.此题由阿尔伯塔大学(University of Alberta)H·赫尔芬斯坦(H. Helfenstein)提出并解答.

面积大于 π,则存在一条大于 2 的弦.证毕.

这一工作对组合几何这一现代领域引出了一些有益的结果,在赫尔曼·明克夫斯基(Herman Minkowski) 去世后,于 1911 年发表了他的工作,引出了关于平面闭凸集的一系列惊人的结果.这一工作提出了非常著名的定理:

如果将一个面积大于 4 的中心对称的闭凸区域的中心点置于某个格点上,那么,这个区域至少要包含两个格点.(一个图形是中心的,如果它包括一个点 O,使之绕此点旋转半周时,图形又变成原样.)

在罗斯·洪斯伯格(Ross Honsberger) 所著的《数学宝石》(Mathematische Edelsteine) 一书的第 48 页曾提到这一定理,因此,在这里我不想再次论述其证明.但是,我们可以研究下述由西德尼大学(Sidney University) 的约瑟夫·哈默(Joseph Hammer) 提出的定理[《美国数学月刊》(AMM),1968 年,157 页,数学简报]:

如果把一个面积大于 π 的中心对称的闭凸区域 R 的中心置于某一格点上,则可把这个区域绕其中心旋转,使其在旋转之后,至少包含另外两个格点.

证明 由于 O 是 R 的中心点,所以,这一点是 R 的通过该点的每条弦的中点.因此,如果某条通过 O 点的弦 AB 的长至少为 2,则 O 点两侧的弦长至少为 1.绕 O 点进行适当的旋转,这条弦就变成了一条通过 O 点的格点线,其上有两个与 O 点相邻属于 R 的格点(C 和 D,或 E 和 F)(图 2).

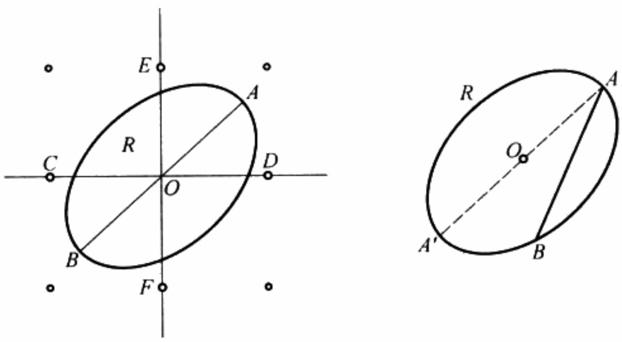


图 2

因为 R 的面积大于 π,所以,正如我们已知的那样,R 的某弦 AB 必大于 2.如果 AB 通过 O 点,则如上述证明的那样.如果 AB 不通过 O 点,则 O 点离弦的一个端点(例如 A)大于 $AB/2$.由于 R 中心对称,因此,在这种情形下,弦 AOA' 必定大于 AB,从而得证.

以同样的方法,可以证明哈默(Hammer) 文章中的另一条定理:

如果把一个面积大于 $\pi/2$ 的闭凸区域 R 围绕该区域的任一点 P 旋转,则存在一个位置,在这个位置上,被旋转的区域至少含有一个格点.

证明 如果使 R 经受拉伸 $P(\sqrt{2})$(即以 P 为中心点,拉伸系数为 $\sqrt{2}$ 的拉伸),则 R 的线性尺寸增大到原来的 $\sqrt{2}$ 倍,其面积扩大 1 倍,因此新区域的面积大于 π.所以,这个新区

域内含有一条弦，其长大于2. R 中与之相应的弦则大于 $2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 如前所述，P 或者是这条弦的中点，或者从 P 到 A 和从 P 到 B 这两个距离中有一个大于 $AB/2$. 总之，PA 或 PB 大于 $\sqrt{2}/2$. 假设 PA 大于 $\sqrt{2}/2$. 该平面上的每个点距离某个格点至多为 $\sqrt{2}/2$（以四个格点为角点的正方形点阵的中心 C 距离每个角点恰好是 $\sqrt{2}/2$）（图3）. 所以，绕 P 点进行适当的旋转，可使 PA 位于这样的位置上，在这个位置，线段 PA 包含 D 点，且 D 点位于最近的格点上.

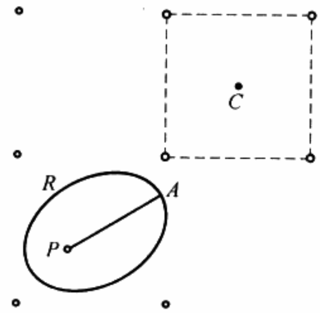


图3

明克夫斯基(Minkowski)定理和哈默(Hammer)第一个定理中的区域，必须是中心对称的. 在中心对称图形上，对称中心与重心重合. 因此，对重心位于格点上的区域也可以提出这些定理. 现在，如果放弃中心对称这一假设，则这些定理是错误的. 可以采用特殊的方式，对此加以补救，这就是把给定的面积增加1/8.

一个重心在格点上、面积大于 $4\frac{1}{2}\left(=4+\frac{1}{8}\cdot 4\right)$ 的闭凸区域，至少包含另外两个格点[E·埃哈德(E·Ehrhart)].

可以使一个重心在格点上、面积大于 $9\pi/8$ 的闭凸区域，绕其重心旋转，使其在旋转后的位置上，至少含有另外两个格点[见前面提到的哈默(Hammer)的文章(AMM, 1968)].

P·R·斯考特(P. R. Scott)的非常简短的文章，或许会引起读者的兴趣.

参考文献

[1] Ehrart E. Une generlisation du theoreme de Minkowski[J]. Computes Rendus, 1955, 240: 483-485.

[2] Scott P R. Lattice Points in Convex Sets[J]. Math. Mag., Mai, 1976, 143-146.

[编者注] Minkowski 定理是数的几何中一个中心定理，对此定理的任何微小改进与新证明、新应用都是有价值的，本文集第一辑发表了一篇介绍文章，本文算作其续篇.

P. R. Halmos 说：有一种把数学创造分类的方法，它可以是对旧事实的一个新的证明，可以是一个新的事实，或者可以是同时针对几个事实的一个新方法.

椭圆中的格点

H.S.Zuckerman[①]

圆内的整点过于简单而一般凸形又过于复杂,椭圆介于两者之间是一个很好的研究素材,美国俄勒冈大学的 Ivan Nieven 和华盛顿大学的 H.S.Zuckerman 在 1967 年《美国数学月刊》(AMM)(p353 ~ 362)上以"平面图形覆盖的格点"为题彻底解决了这个问题,他们证明了如下定理:

Nieven-Zuckerman 定理 只有当椭圆在标准位置(der Normallage)(即中心位于坐标原点,两轴平行于坐标轴)包含点(1/2,1/2)时,它在任何位置上总包含一个格点.

试证明这一定理:

证明 设给定椭圆的方程为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.这个椭圆包含点(1/2,1/2)的条件是

$$\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2\leqslant a^2b^2$$

或

$$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$$

因而,这个定理则是说,只要满足关系式

$$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$$

这个椭圆就一定至少包含一个格点.

(a) 充分性

假设 $a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$ 成立.我们通过格点(u,v)来研究点阵 L(由单位正方形构成的).格点(u,v)由给定的 u 轴和 v 轴坐标确定.现在,我们的椭圆 E 可以任意地位于这个点阵 L 内(图 1).我们针对椭圆的两轴 x 轴和 y 轴的坐标系,来分析这个事实.相对于这个 xy 坐标系而言,E 位于标准位置,并有方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 成立.点阵 L 的点阵线(die Gitterlinien)可以任何倾角通过 xy 平面.因为互相垂直的轴 u 和 v 指向四个方向,所以,这两个轴之一在 xy 坐标系中必定有一个斜率 m,满足 $-1<m\leqslant 1$.我们假设,u 轴的斜率为 m,L 中的点线 $v=n$(n 为整数)在 xy 坐标系内组成了一系列斜率为 m 的平行直线,它们之间距离相等.这些点阵线交 y 轴于点 B_n,而且点 B_n 之间的距离相等.首先,我

① 美国华盛顿大学数学系教授

们来确定点阵线与 y 轴的两个相邻交点之间的距离 B_nB_{n+1}.

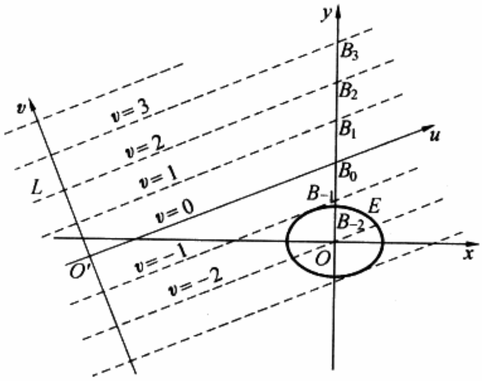


图 1

在通过坐标原点 O 的直线 OT(斜率为 m)上,确定一点 P,其 x 轴坐标为 1(图 2).点 P 的纵坐标为 PN.斜率 m 由 PN/ON 给出.这表明,$PN = m$,$OP = \sqrt{1+m^2}$.现在,我们来研究直线 $v = n$ 上的垂线 $B_{n+1}S$.因为同位角 $\angle B_{n+1}B_nS = \angle B_nOP$,因此,相应的余角 $\angle SB_{n+1}B_n$ 和 $\angle PON$ 相等.这就是说,三角形 $B_{n+1}B_nS$ 和 PON 全等($B_{n+1}S = ON = 1$).从而

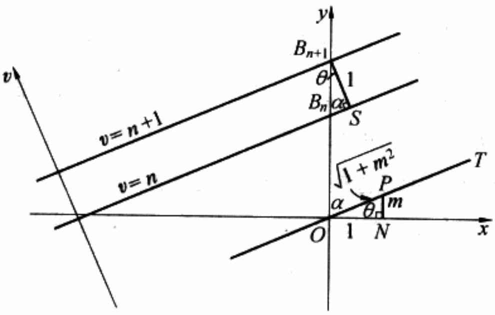


图 2

$$B_{n+1}B_n = OP = \sqrt{1+m^2}$$

因此,点 B_n 在 y 轴上排成一列,步幅为 $\sqrt{1+m^2}$.所以存在一点 $B_n(0,y)$,$-\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2} < y \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$.从原点开始,上下截取半个步幅,就得到了这个点所在的区间(这个区间很大,必定包含点 B_n)(图 3).如果 B_n 的坐标为 $(0,k)$,那么,对通过 B_n 点的线 L_n 而言,其方程为

$$y = mx + k,\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2} < k \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$$

(L_n 是 L 中 $v = n$ 的那条点阵线)

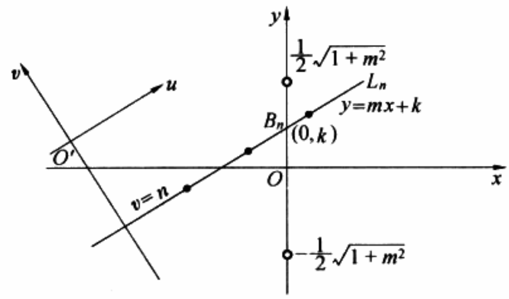


图 3

现在,我们还不能说 L_n 与椭圆 E 相交,但是,通过确定 L_n 与 E 之交点,可以看出

$$y = mx + k, \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

从而

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2$$

由此得出

$$x = \frac{-mka^2 \pm ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2}$$

由于点(1/2,1/2)位于 E 内,因而 $a^2 + b^2 \leqslant 4a^2b^2$,从而 $(1/b^2) + (1/a^2) \leqslant 4$. 这又说明 $1/b^2 < 4, 1/a^2 < 1/4$,而且

$$k^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + m^2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} < b^2 + a^2m^2$$

所以,根号下的表达式 $b^2 + a^2m^2 - k^2$ 是正的,因此,L_n 确与椭圆 E 相交.

现在,我们来研究 L_n 在 E 内的部分的长度 d. 可以证明,d 不小于 1,从而,位于 L_n 上的格点中有一个位于 E 内,因此这些格点相互之间距离为 1.

以 x_1 和 x_2 表示 E 与 L_n 的交点的 x 坐标. 因为 L_n 在 xy 坐标系内的方程为 $y = mx + k$,所以,该交点由 $(z_1, mx_1 + k)$ 和 $(x_2, mx_2 + k)$ 确定. 这表明

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2 = (x_2 - x_1)^2(1 + m^2)$$

如同前面已经计算出的那样,x_1 和 x_2 的值为

$$\frac{-mka^2 \pm ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2}$$

从而得到这两个值的差的平方的表达式

$$\left(\frac{2ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2}\right)^2 = \frac{4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)}{(b^2 + a^2m^2)^2}$$

d 的表达式为

$$d^2 = \frac{4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)(1 + m^2)}{(b^2 + a^2m^2)^2}$$

因此

$$d^2(b^2+a^2m^2)^2=4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)$$

两边减去$(b^2+a^2m^2)^2$得

$$(d^2-1)(b^2+a^2m^2)^2=4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)-(b^2+a^2m^2)^2$$

可以证明,上式右边非负.这就表明,$d^2-1\geqslant 0,d\geqslant 1$.这正如所预料的那样.

由$0\leqslant(a-b)^2$得$2ab\leqslant a^2+b^2$.因此,由条件$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$,得知$2ab\leqslant 4a^2b^2$,从而$1\leqslant 2ab$.这就表明,$1\leqslant 2ab\leqslant a^2+b^2$,从而有

$$a^2+b^2-1\geqslant 0$$

此外,由于$k^2\leqslant(1+m^2)/4$,有

$$4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)-(b^2+a^2m^2)^2\geqslant$$

$$4a^2b^2\left(b^2+a^2m^2-\frac{1+m^2}{4}\right)(1+m^2)-(b^2+a^2m^2)^2=$$

$$(m^4a^2+b^2)(4a^2b^2-a^2-b^2)+4m^2a^2b^2(a^2+b^2-1)$$

[原文误为$=(m^4a^2+b^2)(4a^2m^2-b^2)+4m^2a^2b^2(a^2+b^2-1)$,译者]得出最后这个等式是有益的,为得到这个公式可把两边的括号全去掉.

上面得出的等式说明

$$4a^2b^2-a^2-b^2\geqslant 0$$

$$a^2+b^2-1\geqslant 0$$

因此,结果非负,从而充分性得证.

(b)必要性

现在,我们从另一方面假设E在任何位置上都至少包含一个格点,则很容易证明,在标准位置上的E包含点(1/2,1/2).

假设事情正好相反.把轴向外移,从而把坐标原点移到点(1/2,1/2)上.此时,格点被移动到点阵中的正方形的中心点上(图4).如果某个区域包含了格点(x,y),那么,它在移动之后覆盖了一个中心点.反之亦然.如果E没有包含中心点(1/2,1/2),则根据对称原理,这个椭圆也不可能包含其他的中心点.所以,E在移动之后,不包含格点,这与E在

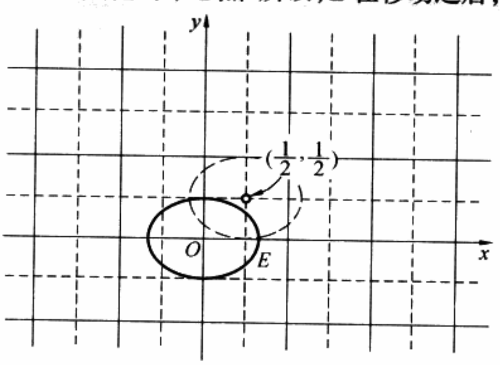


图4

任何位置上均包含一个格点(由正方形组成的点阵之一点)的假设矛盾(在我们现在的情形下,点阵是正方形中点点阵).故 E 包含点(1/2,1/2).从而定理得证.

(注:此节参考了王瑞金、阎光杰、王双英的译文.)



Rouché 定理的两个应用

文集编辑部

试题1 设$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$是个复系数多项式,证明:存在$z\in\mathbf{C}$,使得$|z|=1$且$f(z)\geqslant 1$.

(1992年罗马尼亚数学奥林匹克试题)

证法1 设$g(z)=z^n$,假如$\forall z\in\mathbf{C}$,$|z|=1$,均有$|f(z)|<1$,则在$|z|=1$上,恒有$|g(z)|>|f(z)|$,由Rouché定理,$f(z)-g(z)$与$g(z)$在$|z|<1$上有相同的零点个数.

因为$g(z)$有n个零点.故$f(z)-g(z)$也有n个零点,但$f(z)-g(z)$是一个$n-1$次多项式.它在$|z|<1$上至多只有$n-1$个零点矛盾,因此至少存在一点$z\in\mathbf{C}$,$|z|=1$,使得$|f(z)|\geqslant 1$.

证法2 考虑多项式

$$f(z)=z^{n+1}+a_{n-1}z^n+a_{n-2}z^{n-1}+\cdots+a_1z^2+a_0z$$

令

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

则

$$\begin{aligned}
|f(1)|&=1+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0\\
\varepsilon f(\varepsilon)&=1+a_{n-1}\varepsilon^n+a_{n-2}\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_1\varepsilon^2+a_0\varepsilon\\
\varepsilon^2 f(\varepsilon)&=1+a_{n-1}\varepsilon^{2n}+a_{n-2}\varepsilon^{2(n-1)}+\cdots+a_1\varepsilon^{2\times 2}+a_0\varepsilon^2\\
&\vdots\\
\varepsilon^n f(\varepsilon)&=1+a_{n-1}\varepsilon^{nn}+a_{n-2}\varepsilon^{n(n-1)}+\cdots+a_1\varepsilon^{n\times 2}+a_0\varepsilon^n
\end{aligned}$$

把上述$n+1$个等式相加便得

$$f(1)+\varepsilon f(\varepsilon)+\cdots+\varepsilon^n f(\varepsilon^n)=n+1+a_{n-1}\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon^n)^k+$$

$$a_{n-2}\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon^{n-1})^k+\cdots+a_0\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k=n+1$$

从而

$$|f(1)|+|f(\varepsilon)|+|f(\varepsilon^2)|+\cdots+|f(\varepsilon^n)|=$$
$$|1\cdot f(1)|+|\varepsilon f(\varepsilon)|+|\varepsilon^2 f(\varepsilon^2)|+\cdots+|\varepsilon^n f(\varepsilon^n)|\geqslant$$
$$|f(1)+\varepsilon f(\varepsilon)+\cdots+\varepsilon^n f(\varepsilon^n)|=n+1$$

于是存在 $z=\varepsilon^k(0\leqslant k\leqslant n)$，使得

$$|f(z)|\geqslant 1$$

显然，上述的 z 满足条件 $|z|=1$.

试题 2 若 $11z^{10}+10\mathrm{i}z^9+10\mathrm{i}z-11=0$，求证：$|z|=1$（其中 z 为复数，而 $\mathrm{i}^2=-1$）.（第 50 届普特南数学竞赛题）

证法 1 我们有

$$z^9=\frac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}$$

若 $z=a+b\mathrm{i}$，则

$$|z^9|=\left|\frac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}\right|=\sqrt{\frac{|11^2+220b+10^2(a^2+b^2)|}{|11^2(a^2+b^2)+220b+10^2|}}\equiv\frac{f(a,b)}{g(a,b)}$$

若 $a^2+b^2>1$，则 $g(a,b)>f(a,b)$，从而 $|z^9|<1$，这就引出矛盾，若 $a^2+b^2<1$，则 $f(a,b)>g(a,b)$. 从而 $|z^9|>1$，又导致矛盾，所以，$|z|=1$.

证法 2 由 Rouche 定理：若 z 在 $|z|=\alpha$ 上时，有 $|g(z)-f(z)|<|f(z)|$，则 g 和 f 在 $|z|=\alpha$ 的内部的零点相同. 设 $g(z)=11z^{10}+10\mathrm{i}z^9+10\mathrm{i}z-11$，$f(z)=10\mathrm{i}z-11$，则当 $|z|<1$ 时，$|g(z)-f(z)|=|11z^{10}+10\mathrm{i}z^9|=|z|^9|11z+10\mathrm{i}|<|10\mathrm{i}z-11|$，而 $f(z)$ 只在 $11/10\mathrm{i}$ 有一个根，所以，$g(z)$ 在 $|z|<1$ 内没有零点. 若 z 是 g 的一个零点，且 $|z|>1$，则 $-(1/z)$ 也是 g 的一个零点（我们已经看到这种情形不可能发生），所以，g 只在圆周 $|z|=1$ 上才有零点.

［**编者的话**］ 法国大数学家阿达玛曾说："两个实域真理之间的最短距离是通过复域." 复分析以其理论的优美，应用的广泛而为数学爱好者所推崇. 本文算是一个小注解.

附录　临界线上的 Zeta 零点[①]

H. L. Montgomery

著名的 Riemann Zeta 函数与素数的研究密切相关. 对实部大于 1 的复数 s 定义 $\zeta(s)$ 是容易的: 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 收敛, 它的和就定义为 $\zeta(s)$. 对于其他的 s 值则用解析开拓来得到 $\zeta(s)$. 结果, 存在唯一一个解析函数, 定义域是整个复平面(点 1 除外), $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时与上述级数给出的值一致. 点 1 是这个函数的简单极点. 事实上, Riemann 曾经证明, 差 $[\zeta(s) - 1]/(s - 1)$ 定义了一个整函数.

Riemann 也证明了 ζ 满足一个有用的函数方程. 为了叙述这个结果, 先写

$$\zeta(s) = \zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{\frac{-s}{2}}$$

(其中 Γ 表示 gamma 函数, 即是阶乘的推广, 满足对正整数 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$) 在这种记号下, 所说的函数方程就是

$$\zeta(s) = \zeta(1 - s)$$

由此并据 gamma 函数的已知性质推出, 负偶数都是 ζ 的零点, 即 Zeta 函数的所谓**平凡零点**.

整数的唯一素因子分解给出 ζ 与素数之间的第一个联系, 即 Euler **乘积公式**

$$\zeta(s) = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots)$$

这里乘积取遍所有的素数. 这个方程在 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 定义的半平面上成立. 在这个半平面上, 上述乘积绝对收敛, 从而 $\zeta(s) \neq 0$. 由函数方程知, 在 $\mathrm{Re}(s) < 0$ 定义的半平面上, ζ 除了平凡零点外, 再没有别的零点了. 然而 Zeta 函数在这两个半平面之间的临界带上(即 $0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ 定义的带状区域) 却是无限多个零点.

Zeta 函数与素数的内在联系与 ζ 的零点位置有关. 对每一正实数 x, 令 $\pi(x)$ 为不大于 x 的素数个数. 如果一个数论专家说, 他要了解素数的分布, 他的意思是说, 他要知道函数 π 的全部情况. 通过相对简单的"试验" 计算, 不难验证, 在某种意义下, π 近似于所谓对数积分, 定义为

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

有多接近呢? 例如, 对每一实数 θ, $\pi(x)$ 与 $\mathrm{li}(x)$ 之间的差(对于充分大的 x) 会不会囿于 x^θ 的一个常数倍数呢? 用标准记号, 会不会有

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^\theta)?$$

已知: 若这式成立, 则 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 定义的半平面上无零点. 注意: 关于素数分布的一个假设会给出 Zeta 零点的信息. 反过来, 已知: $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 时, 如果 $\zeta(s) \neq 0$, 则

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^\theta(\log x)^2)$$

---

① 原题: Zeta Zeros on the Critical Line. 译自 Amer. Math. Monthly, 86(1979), 43 ~ 45.

要对 π 有更多的了解,就要对 ζ 的零点有更多的了解. Riemann 证明了 Zeta 的头几个零点的实部都等于 1/2. 他猜测所有非平凡零点都落在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的临界线上. 这断言就是著名的 Riemann 假设.

我们今天有关非平凡零点的知识,说来说去都有助于说明 Riemann 假设成立. 经验的迹象是令人鼓舞的:最近,Richard Brent 的计算表明,开头的 70 000 000 个零点全都落在临界线上. 我们知道,零点不能太接近临界带的边缘,即是说,若 $\zeta(\beta+\mathrm{i}\gamma)=0$,则 $|\gamma|>14$,而且 $1/\log|\gamma|<\beta<1-(1/\log|\gamma|)$. 我们也知道,大部分的零点就算不落在临界线上,也会非常靠近它. 例如,若 $\delta>0$,则存在 $\theta=\theta(\delta)<1$,使得形如 $\beta+\mathrm{i}\gamma$ 的零点个数小于 T^{θ},其中 $0<\gamma\leqslant T$ 而 $|\beta-\frac{1}{2}|>\delta$. 这个估值远远小于所有形如 $\beta+\mathrm{i}\gamma$ 的零点总数 $N(T)$,其中 $0<\gamma\leqslant T$;因为已知当 T 趋于无限时

$$N(T)\sim\frac{T}{2\pi}\log T$$

(即比率趋于 1). 还有另一种处理 Riemann 假设的方法,是 G. H. Hardy 于 1914 年引进的,当时他宣布说,他证明了临界线上有无限多个零点. 若令 $N_0(T)$ 代表形如 $\frac{1}{2}+\mathrm{i}\gamma$ 的零点个数,其中 $0<\gamma\leqslant T$,则 Hardy 定理断言:当 $T\to\infty$ 时,$N_0(T)\to\infty$. 随后,Hardy 和 Littlewood 把它变为更精确的数量形式 $N_0(T)>cT$. 更后,A. Selberg 引入新的想法证明了 $N_0(T)>cT\log T$. 结论:相当大一部分零点落在临界线上,Selberg 并未说明他的不等式中常数 c 的值,不过显然是相当小的.

Norman Levinson 证明了:对所有充分大的 T

$$N_0(T)>\frac{1}{3}N(T)$$

因此至少有 1/3 的零点落在临界线上.

Levinson 的处理用到 Selberg 的某些技巧,但用来检查临界线上的零点的基本手法是完全不同的. 这种区别尤其明显地表现在:Selberg 的论证不需要计算常数就成功了,而 Levinson 的方法却不能预先看出是否会成功;只是在经过许多细致的计算之后,才能发现那些常数是行得通的. Levinson 的处理是很冒险的,因为需要进行大量的工作(充满 50 印张)才能看出所得到的 $N_0(T)$ 的下界是否为正. Selberg 和 Levinson 方法的另一个区别在于他们对重零点的算法. Selberg 的办法是考察 $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\gamma)$ 的变号,从而可以断定相当大一部分零点具有奇数重数且落在临界线上. Levinson 对重零点的讨论是无效的,但 Selberg 和 D. R. Heath-Brown 分别独立地发现原方法稍加变化,得到的只是简单零点的个数. 因此至少有 1/3 的零点是简单的且落在临界线上.

还要考查的是 Levinson 的想法还可以推进到什么地步. 这需要作多方面的尝试,但繁重的技巧细节使进展困难. Levinson 虽然患不不治之症,还是干劲十足地研究他的工作中一些进一步的结果. 他的工作将来肯定是需要详细加以研究的.

(张耀成译　江嘉禾校)

参 考 文 献

[1] Normon Levinson. More than one-third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma=\frac{1}{2}$[J]. Advances in Math., 1974(13), 383-436.

[2] A Simplification of the Proof that $N_0(T)>(\frac{1}{3})N(T)$ for Riemann's zeta-function[J]. Advances in Math., 1975(13), 239-242.

复 分 析[①]

L·Bers

最早为人们研究的纯数学问题之一是二次方程求解,解这些方程的技巧是在古时的巴比伦被发现的.那时所发现的技巧基本上与今天在中学里所教的方法相同.要找一个数适合$x^2-2x-15=0$,将这个方程写成$x^2-2x+1-16$的形式,也就是$(x-1)^2-16=0$,即得到$(x-1)^2=16$,所以$x-1=4$或$x-1=-4$.因此$x=5$或$x=-3$.但是对有些二次方程,这个"配方"法是失灵的.例如,我们要解方程$x^2-2x+17=0$,这导致我们要找数x适合$(x-1)=-16$,这似乎是不可能的.因为一个数的平方永远不是负的.事实上,无需去研究什么被精心挑选的例子.简单的二次方程$x^2=-1$显然无法用此方法解出.

在文艺复兴时期,有一个意大利数学家,他有一个光辉和有点狂妄的想法,他想象如果有一个数它的平方是-1,这将会发生什么情况呢?这个数今天用i来表示并称之为"虚"单位.源于文艺复兴时期和今天仍在应用的约定是我们计算i时,如同普通的数,但是当有$i^2=i\times i$出现时,就用-1代替之.

前面考虑过的方程($x^2-2x+17=0$)现在变成有解,$x=1+4i$和$x=1-4i$.要验证它,我们计算

$$(1+4i)^2-2(1+4i)+17=(1+4i)(1+4i)-2(1+4i)+17=$$
$$1+4i+4i+16i^2-2-8i+17=1-16-2+17=0$$

但是一个二次方程有一个$x=1+4i$的解究竟有什么好处呢?归根结底i是一个虚数,仅仅是数学家想象中的一个玩物.

然而意大利数学家Cardano(可视作虚数之父)注意到在解三次方程时(例如方程$x^3-12x+16=0$),可以发生这样的情况,虽然用了虚数来计算而求出的根都是普通的"实"数.这个观察说明对-1的平方根,不管你称它虚数与否,它不单是一个玩物.

直到19世纪数学家才解开复数的奥秘.他们将形如$2+3i$或$\frac{1}{2}-2i$的数解释为点.更精确地讲,我们在平面上画两条互相垂直的线,一条是水平的,一条是垂直的,此外选取单位长.我们用水平线上的点来表示像2或$-\frac{3}{2}$的实数:3是从O向右移三个单位长的

① 原题:Complex analybis,译自 The mathematical Sciences. The M.I.T.Press, 1969,F-30.

点，这里 O 是两条线的交点. 虚数单位是用垂直轴上在 O 上方一个单位长的点表示. 复数 $3+2i$ 是平面上由 O 点出发向右移三个单位长和向上移两个单位长所达到的点来表示(图1). 因此平面上每个点表示一个复数. 反之每个复数可由平面上的点表示.

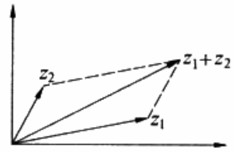


图 1

如果单是由点来表示数，而不能在它们上面作加法和乘法，那么我们将什么也得不到. 两个点的加法是由图 2 所显示的"力的平行四边形"法则完成的. 这是相应于早先的加法的算术定义. 两个点的乘积的几何定义包含更多一些东西. 为了要成图 3 中的两个点 z_1 与 z_2，我们量度从 O 点到它们的距离 r_1 与 r_2，以及 O 点到 z_1 与 z_2 的连接直线与正实轴之间的夹角 θ_1 与 θ_2. 然后标出与 O 点之距为 $r=r_1\cdot r_2$，"极角"为 $\theta_1+\theta_2$ 的点 z. 这个点，或是这点所对应的复数就称之为这两个点或复数 z_1 与 z_2 之积. 这个定义也是和算术定义一致的. 让我们对虚数单位 i 来验证这个定义. 点 i 到 O 的距离是 1，它的极角是 90°. 所以 $i^2=i\cdot i$ 到 O 的距离应为 $1\times1=1$ 和极角 $90°+90°=180°$. 这就是点 -1. 这样我们有 $i^2=-1$ 的一个几何证明. 在这里，我们提及从 O 到一个复数 $z=x+iy$ 的距离称为 z 的模，用 $|z|$ 表示. 由 Pythagoras 定理，$|z|^2=x^2+y^2$.

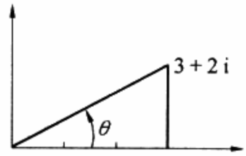


图 2

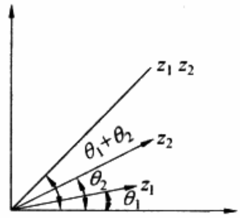


图 3

复数是为了解二次方程而引进的. 人们也许会期望为了解三次方程，我们将一定要定义较广的数类，而对解四次方程将甚至需要对数的概念作更进一步的扩充等等. 幸而没有这个必要. 对我们所引进的复数，能解每一个代数方程，而不论其次数是什么. 这个原则甚至对像 $x^{100}-2x^{73}+10x^5-16=0$ 这样高次古怪的方程亦成立.

在数学上，一个函数是将一个数对应另一个数的一个规则. 最简单的情况下，这个规则由像 $f(x)=2x^3-6$ 这样的代数公式给出. 详言之，这个规则是"将每个数 x 对应为首先将 x 自乘三次，然后再将其乘上 2 倍，再减去 6 所得的数". 这样称之为多项式的函数自然也对 x 的复值有定义. 例如 $x=1+i$，则

$$f(x)=2(1+i)(1+i)(1+i)-6=-10+4i$$

但是有些函数是用完全不同的方法定义的. 重要的例子是三角函数 sine 和 cos. 假设一个点从 A 点开始(图 4)沿反时针方向沿单位圆周移动. 如这个点沿着圆周移动距离 x 而达到 B 点，则 $\sin x$ 就是 B 到水平轴的距离(如果 B 在水平轴的下面，算为负的)，而 $\cos x$ 是从 B 到垂直轴的距离(如果 B 在垂直轴的左边，算为负的). 整个圆周的长度为 2π. 因此点 A 沿着圆周移动 2π 距离之后，仍在 A 点. 这表明 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是周期函数 —— 即是每当点围绕圆周移动一周时，它们的值是重复的.

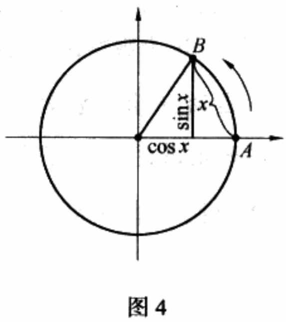


图 4

复域漫步

故有 $\sin(z+2\pi)=\sin x$ 和 $\cos(x+2\pi)=\cos x$. 三角函数原来是为了天文和航海的计算而引进和编成表,它们在测量上有广泛的应用. 更重要的是,三角函数出现在我们要描写诸如弹簧的振动、潮汐、行星运动、交流电或原子光衍射的周期过程. 正弦函数和余弦函数的图象见图 5.

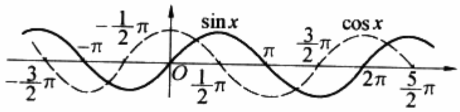


图 5

另一个重要的函数是幂函数 e^x. 数 e(它近似等于2.718) 可以定义为一个数量,它等于将 1 元钱存入一个怪诞的银行 1 年后所获得的本利总和. 这个怪诞的银行是给 100% 的年息和连续的给以复利①. e^x 是存 x 年后所得的本息总量,当 x 是一整数或普通分数时,符号 e^x 有通常的意义. 例如, $e^2=e\cdot e, e^{1/2}=\sqrt{e}, e^{-2}=1/e^2$. 幂函数用于描写那些类似于复利的过程,例如衰变或人口的增长. e^x 的图象见于图 6.

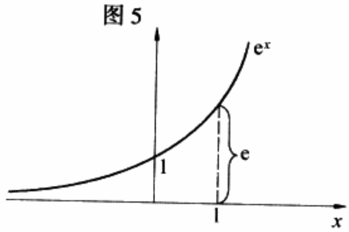


图 6

18 世纪的一个重要发现,这发现也是微积分的最早应用之一,是将幂函数和三角函数表示为无穷次多项式的可能性,或者,用现在的语言来讲是表示为"无穷级数" 的可能性. 这些公式是简单的. 首先有

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

式的意义是,为了计算 e^x,我们要选取所有的 N 和计算多项式

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^N}{1\cdot 2\cdots N}$$

值. 这就是先前的那个无穷级数的前 $N+1$ 项之和. 当 N 大时,这个值接近于 e^x 的值,所以我们选取充分大的 N,能计算 e^x 到任意所要的精确度. 类似地给出

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$$

和

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

这些公式有一个未曾预期的结果. 利用它们,对 x 是复数时,也可以计算 e^x, $\sin x$ 和 $\cos x$. 例如,什么是 e^i?它是 e 自乘 $\sqrt{-1}$ 次吗?显然这是没有任何意义的,但是我们能用已写出

---

① 将 1 元钱存入一个给 100% 年息的银行,一年后本利和应为 2 元. 如此银行一个月算一次复利,则一年后的本应为 $(1+1/12)^{12}$,如果 $1/n$ 年算一次复利,则一年后的本利和为 $(1+1/n)^n$. 连续的给以复利,则表示取 n 充分,则一年后本利总和为 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

的无穷级数来计算 e^i. 结果是 e^i 为一确定的复数，它近似为 $e^i = 0.540\,30 + 0.841\,47i$.

当幂函数和三角函数用这个方法考虑作为复值函数时. 它们之间存在着联系，这个联系反映了先前的三个无穷级数之间的相似性. 特别是对 e^{iy} 借助于 $\cos y$ 和 $\sin y$ 表示的公式

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{y^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

$$i\sin y = \frac{iy}{1} - \frac{iy^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{iy^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1} + \frac{i^2y^2}{1\cdot 2} + \frac{i^3y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{i^4y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{i^5y^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

记住 $i^2 = -1$ 和 $i^4 = 1$，我们见到第三个级数是前两个级数之和. 故有

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

特别是，当 $y = \pi$ 时，我们有 $\cos y = -1$ 和 $\sin y = 0$. 对此值，上述公式变成

$$e^{iy} = -1$$

这是数学上四个重要的数：e，π，i 和 1 之间的美妙关系. 因此复数的引入揭露了数学中表面上看来无关的部分的和谐以及它们之间未曾预期的联系.

一个能表示为“无穷次多项式”或“幂级数”的函数称为“解析”‘函数. 每个这样的函数能对复值进行计算. 幸运的是大多数在纯数学和数学应用于自然科学上有兴趣的函数都是解析的. 所以复分析，即解析函数的研究，是数学的中心部分.

一个著名的函数：

设 z 是一个大正数，则无穷级数(不是幂级数)

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$$

能求和. 这是说有一个数，我们称之为 $S(z)$，使得对较大的 N 计算有限和

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots + \frac{1}{N^z}$$

所得的值十分接近 $S(z)$. 如此地对每个 z 指定一个值 $S(z)$ 的规则是一个函数，称为 Riemann 的“zeta 函数”.

有另一个计算这个函数的方法. 为此，我们回忆什么叫素数，素数是不为 1 的正整数，除了 1 和它自己之外不能被其他任何数整除. 例如 2，3，5，7，11，13，17，19，23 等等都是素数，而 4 不是素数，它被 2 整除. 另一个计算 $S(z)$ 的方法是用历经所有素数 2，3，5，⋯ 的无穷乘积，即

$$S(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^z}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^z}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^z}} \cdot \cdots$$

这里的无穷和与无穷乘积取值相同，这个事实是基于一个称之为算术基本定理的结果. 这个基本定理是每个整数能分解为一些素数的积，除了这些因子的次序外，这个分解是

唯一的.(例如 $12 = 2\times2\times3, 162 = 2\times3\times3\times3\times3$.)

一个不是数学家的读者而他能使自己信服算术基本定理蕴含上面给出的无穷级数与无穷乘积取值相同,那他是选错了职业,他应当成为一个数学家.

由上面所写的公式,zeta 函数是对大的正数定义的.19 世纪的一个最伟大的数学家 Riemann 指出有一个切实的方法使 zeta 函数可以对所有的实值和复值 z 定义,但值 $z=1$ 例外.zeta 函数自然是一个解析函数.Riemann 也完全认识到对 z 为复值的 zeta 函数的研究是一个获得关于素数的信息的方法. 在 Riemann 之后很多年, 直到 19 世纪末, Hadamard(法国)和 Valee-Poussin(比利时)运用 zeta 函数和整个复函数论的结果,其中部分结果就是他们发展的,证明了素数定理.这个定理断言对已给定的 x,所有小于 x 的素数的个数是近似等于 $x/\log x$,或是近似等于

$$\frac{x}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(1/x)}$$

"近似等于"这个词有一个精确的含义.设用符号 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数.素数定理断言

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1+\varepsilon(x)$$

当 x 充分大时,这里的 $\varepsilon(x)$ 可以任意小,这个定理首先是 Gauss 观察数素表而猜测的.

这确实是令人惊奇与令人感到神秘的:一个关于素数的定理最先是用复分析的方法证明.寻找一个不用复分析的证明是由 A.Selberg(现在在 Princeton)和 P.Erdus(一个当时居住在美国的匈牙利人)解决,纵然如此,复分析仍是得到关于素数信息的最强有力的工具.

所有数学家都悉知 Riemann 的 zeta 函数离终卷还远着哩.大量的研究集中于探讨它的根的性质.一个函数的根是使得函数值为 0 的那些数.例如函数 $\sin x$ 的根是所有整数乘上 π.即是当 $x=0,-\pi,2\pi,-2\pi,\cdots$ 时,$\sin x=0$.关于 zeta 函数,已知(1)每个负偶数是它的根,(2)还有无穷多个其他的根,(3)所有其他的根都是复数,具有形式 $s+ti$,这里 s,t 都是实数且 s 是在 0 和 1 之间.Riemann 自己猜测所有复根都有 $s=\frac{1}{2}$.

证明或否定这个 Riemann 假设被公认为是对今天的数学家最最富有挑战性和最困难的问题.Riemann 假设的证明将给出素数定理中误差 $\varepsilon(x)$ 的准确信息,并且将立刻在数论上建立一大批其他结果.但是所有数学家都敬畏 Riemann 假设的真正原因是他们知道自 Riemann 以来的最伟大数学家都试图解决此问题,而从未获得成功.

我们能否用计算机来研究这个问题?可以的,但只能在任意的精确度中计算有限 zeta 函数的零点.还没有什么计算结果与 Riemann 的假设相矛盾.如果能找到一个与 Riemann 假设矛盾,这个假设因而就会被否定.但是这个假设的真实性却不是计算所能确立的.如果这个假设最后被证实,除非我们全都极端弄错了,否则一定是人类最高质量

的思维的力量.

保角映照:

在数论上的应用只是复函数与其他领域之间的众多的内在联系之一.复变函数论有几何方面的理论.这首先为 Gauss 发现,当时他正计划对德国的一个小公园作地理测量.由于地球不是平坦的,另一方面,对航海来讲,本质上地球应按他们所说是"保角的".保角意味着每个角,如一条铁路和一条高速公路或河道间的夹角在地图上和实际上是一样的.最早的地图制作者,像 Mercator 和其他人曾学习过如何描绘地球表面上一个地区的保角地图.Gauss 作为一个数学家,他向自己提出一个一般的问题:是否有可能作任何弯曲曲面的保角地图?他证明对曲面一小块是可能的.他也认识到有了一个曲面小块地区的保角地图后,所有同一地区的其他保角地图都可以用复函数论得到.

让我们用一个例子来更详细的解释这一点.考虑平面的一个区域 R.从这个区域到另一个区域 R' 内的映照是一个将 R 的点对应到 R' 内的点的规则(图 7).我们感兴趣的是如下的情况:R' 内的每个点是从 R 内的某个点对应来的,但没有 R 内的二个点对应为 R' 内的同一个点.我们也假定 R 内任二个相近的点对应为 R' 内二个相近点,反之亦然.考虑 R 内二条相交的曲线 A 和 B(图 8).我们的映照将它们变为 R' 内二条曲线 A' 和 B',这映照称为是保角的,如对任意的二条曲线 A 和 B,曲线和 B' 相交成的角同于 A 和 B 相交的角.

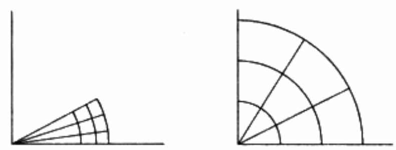


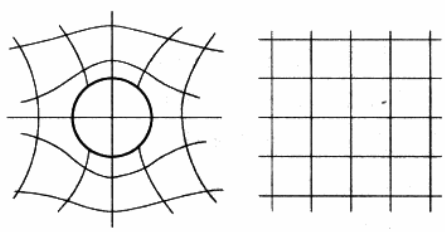
图 7



图 8

现在我们注意到先前平面内的点表示为复数,所以我们的映照是一个规则,它把 R 内由点所表示的每个复数对应为 R' 内另一个点所表示的复数.映照是用一个复变元函数来描写.同时说一个映照是保角的亦转为说描写这个映照的函数是解析的(更精确的讲,一个导数永不为零的解析函数).简单解析函数给出的保角变换的一些例子见之于图 9 和图 10.


图 9


图 10

保角变换理论是复函数论中发展最快的一部分.中心的结果是 Riemann 的映照定理,它说每个由简单曲线围成的区域能被保角地变为任一这样的区域.例如,一个正方形能保角地映成一个圆盘(图 11).Riemann 所

给的映照定理的证明是出奇的简单,但是它含有一个基本的错误.

在数学上这几乎是件前所未闻的事情.多年来,给映照定理一个严格的证明是对数学一个挑战性的问题,几个旺盛的数学分支是源于这个问题.今天已有很多有效的方法.令人惊奇的是这些结果证实了 Rie-In 原来的思路能行得通.

为了让读者对近代数学研究的品味有点了解,让我们转向一个与保角变换有关联的问题.如果我们考虑一个以原点 O 为中心,半径为 1 的圆盘到某个其他区的保角变换,则这个变换是用一个解析函数 $f(z)$ 来描写的,它能表示为一无穷幂级数

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots$$

众所周知,常用 Bieberbach 命名的猜想说 $|a_n|$ 是不大于 $n|a_1|$.注意这里包含多个命题,对每个 $n = 2,3,4,\cdots$ 都是一个命题.$n = 2$ 时,命题是容易的,已知

$$f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

Bieberbach 证明了,$n = 3$ 的情况较之 $n = 2$ 有不能相比的困难,这是由 Loewner 在 Stanford 证明的.下一步在 30 年后才解决,Schiffer 和 Gara-bedian(当时二人均在 Stanford)在 1953 年证明了 Bieberbach 猜测中 $n = 4$ 的情况.当 n 是任意整数的一般情况,虽然有很多部分结果指明猜测是真的,但仍是一个未解决问题①,例如现已知,当函数将单位圆盘映成一个凸区域或一个对称域时,Bieberbach 猜测是成立的.同样也知道对每个给定的函数,Bieberbach 猜测至多只能对有限个系数不成立(Haymann,英国,1954).虽然 Bieberbach 猜测不具有 Riemann 猜测那样的地位,但是许多杰出的数学家热烈迎接它的挑战.这个问题的解将难以对其他问题产生有趣的结果,但是似乎由此发展的方法将对其他纯数学和应用数学十分有用.特别是应用于将计算机作为启发性手段的企图(Garabedian).这意味着计算机不能用来证明定理,但它可以向数学家指出很多构思的想法中哪一种是有可能成功的.

保角映照的应用:

保角映照在数学物理上有广泛的应用.我们只提及一个在流体力学上的应用.例如考虑一个如图 12 所示的从一个带形到沟状区域的保角映照.水平线的像是一个流体的可能流的流线,垂直线的像称为等势线.小的立方体的像的大小,可用来计算流体作用在壁上的压力.

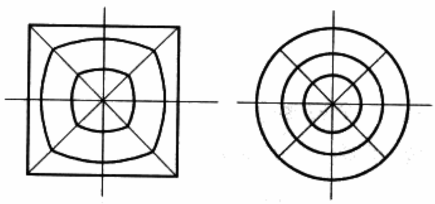


图 11

然而要用这个办法描写流体流动只有在让受限制的假定下才是可能的,这必须是一个不可压缩的、无摩擦、无重量的流体的稳定、二维、无旋流.自然界并不存在这样的流,

① 已由美国数学家德布兰吉斯证明(译者注).

虽然如此,有很多情况在复函数论基础上的计算,会给出一个现实物理过程的有用的精确描绘.

这应用于(当然在一定的限制下)围绕着机翼的空气流上.从本世纪初 Kutta 和 Joukowiski 的开拓性工作一直到第二次世界大战末期,机翼的设计是基于一个理论,这个理论包括有从机翼截面,称之为"侧像",到一个圆盘上的保角映照.

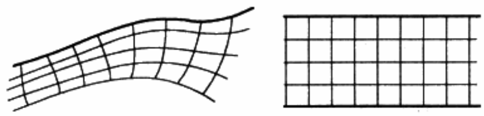


图 12

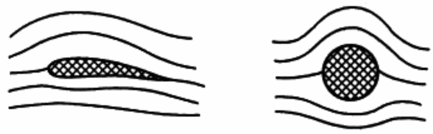


图 13

用保角映照计算理论上对机翼的压力分布,其作用不过是为实验工作和实际设计提供一些指标线.现在发展基本上是完善的,一个有极大兴趣深入探讨的问题是通过怎样的机制,使数学家、理论流体力学家、实验流体力学家和飞机设计师之间切实的交流和如何相互影响他们的工作.今天面临着大量的资料,一个具有科学训练和历史素养的研究者能够作出有用的贡献.

虽然实际的飞机设计师不再作出保角变换,但是计算一个给定的侧像的保角变换的题仍然引起注意.十分切实的方法在近代计算机出现以前已发展起来,有了计算机之后,对实际的问题而言,计算的困难已解决了.

或许有这样重写历史的诱惑:声称函数论中的基本定理,诸如 Riemann 定理,是因流体力学的需要而推动起来.然而,事实并非如此. Riemann 关于复函数的想法或受了物理思维的影响,但是,他证明映照定理是正当他从事代数函数论及其积分工作的时候,而后者迄今为止仅有纯数学上的意义.映照定理在应用上的有用性是多年后才现的.

推广这个理论到高速亚音速流上的企图导致复函数论的某种推广.但事实证明这些推广在应用上没有价值,因为单凭经验来做的方法已能满足实际的需要.然而,在纯数学上,这个推广确实是有价值的.

某些最近的发展:

在现在研究的复函数的许多方面中间,没有一个比多复变函数更有吸引力.骤眼看来,考虑二个或多个变元的幂级数来代替一个变元的函数的研究,似乎不会碰到本质的新现象.的确,分析学的最简单函数亦会导致多变元函数.例如函数 $\sin(ax)$ 可以看做两个数 a 和 x 的函数,a 和 x 都可以取复值,得到的函数是解析的.

一个变元的解析函数可以视作定义在平面上的一部分,因为复数可以表示为平面的.在古典函数论的某些较深的篇章,也考虑定义在其他二维曲面上的函数.然而多个变元的函数常常是定义在多维空间(至少是四维)的一个区域上.这不仅超出了我们的能力而且也导致全新的现象.除了多项式之外,最简单的函数称为有理函数,它是个多项式之商.一个复变元的有理函数能表示为

$$r(z) = p(z)/q(z)$$

这里 p 和 q 是两个多项式,我们假定它们不具有公共根. 在 q 的根的那些点,分母将等于 0. 这些点称之为有理函数的极点. 当 z 接近极点时,这函数取大值. 我们说函数在极点变成无穷. 多变数的有理函数的情况是完全不同的. 例如函数

$$r(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$$

$z_1 \neq 0$ 和 $z_2 = 0$ 的每个点(z_1, z_2)都是极点. 在这些点上 r 变成无穷. 但是当点(z_1, z_2)趋近于点(0,0)时,r 不趋近于任何固定极限. 这点就称之为函数的不定点. 对多于两个变元的函数,不定点不仅出现在个别点上,而且出现在称为高维的曲面.

多复变元的函数的另一个特殊点是由 Poitncarĕ 观察到的. 在一个变元时,定义在圆盘,或定义在任一个由简单曲线围成的区域上的函数是没有本质区别的. 这是 Rimann 映照定理的结果. 然而,对多个变元来说在几何观点看来是十分相像的,区域在解析函数观点来看可能是完全不同的,这里的解析函数是指"居于"这些区域上的数. 由于这个原因,多变元的解析函数理论有较强的几何品味,它的方法和结果与诸拓扑、微分几何和代数几何这些数学领域有密切的联系. 这个理论的一些最吸引人和深入的结果,是在近几十年为当代日本数学家 K. Oka 得到的,他把他的科学生涯献身于这个分支. 但是用近代数学语言重新整理与推广 Oka 的思想的工作却是首先由国数学家完成的,这件事在这个理论的发展中起了重大的作用.

古典的函数论一方面与微分几何相交织,另一方面与偏微分方程理论相交织,多变函数的理论与数学的其他分支有更多的联系. 对那些相信数学和自然科学之间的和性是注定的人,得知多复变函数理论已被用于理论物理时将不会感到惊奇.

参考文献

[1] Nehari Z. Introduction to Complex Analysis[M]. Boston: Allyn and Bacor, 1961.
[2] Nehari Z. Conformal Mapping[M]. New York: McGraw-Hill, 1952.
[3] Ahlfors L V. Complex Analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1966.

关于在复平面上三角形重心的复数表示及其在数学竞赛中的应用

刘培杰　　郭艳萍[①]

1　定理及证明

定理　$\triangle z_1z_2z_3$ 在复平面上的三顶点用 z_1,z_2,z_3 表示，则其重心为 $z_1+z_2+z_3$.

这个定理结论简洁、优美，但证明并不容易．先给出一个复数证法：

证法一　如图1所示，以外心为坐标原点，建立坐标系，设三角形的三顶点用复数 z_1,z_2,z_3 表示，不失一般性可设此三角形内接于单位圆，则有

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

于是

$$\bar{z}_1=\frac{1}{z_1},\quad \bar{z}_2=\frac{1}{z_2},\quad \bar{z}_3=\frac{1}{z_3}$$

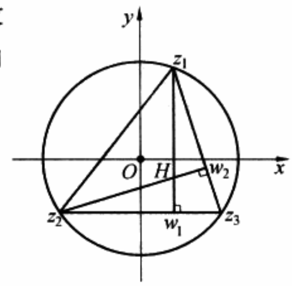


图 1

从顶点 z_1 向对边作垂线，垂足用 w_1 表示，由于 z_2,z_3,w_1 共线，故有

$$\frac{w_1-z_2}{z_3-z_2}\in\mathbf{R}\Rightarrow\overline{\left(\frac{w_1-z_2}{z_3-z_2}\right)}=\frac{w_1-z_2}{z_3-z_2}\Rightarrow$$

$$(w_1-z_2)(\bar{z}_3-\bar{z}_2)-(\bar{w}_1-\bar{z}_2)(z_3-z_2)=0\Rightarrow$$

$$(w_1-z_2)(\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2})-(\frac{1}{w_1}-\frac{1}{z_2})(z_3-z_2)=0\Rightarrow$$

$$\frac{w_1-z_2}{z_2z_3}+(\bar{w}_1-\frac{1}{z_2})=0\Rightarrow w_1+z_2z_3\bar{w}_1=z_2+z_3 \qquad ①$$

又由于 $z_1w_1\perp z_3z_2$，所以 $\mathrm{Re}[(w_1-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_3)]=0$，即

$$(w_1-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_3)+(\bar{w}_1-\bar{z}_1)(z_2-z_3)=0$$

---

①　哈尔滨市剑桥3中

化简,得

$$w_1 - z_2z_3\bar{w}_1 = z_1 - \frac{z_2z_3}{z_1} \quad ②$$

再设由 z_2 与 z_3 到对边所作垂线的垂足分别是 w_2, w_3,把线段 z_1w_1 和 z_2w_2 的交点用 H 表示,由 ② 式,可知

$$H - z_2z_3\bar{H} = z_1 - \frac{z_2z_3}{z_1} \quad ③$$

$$H - z_3z_1\bar{H} = z_2 - \frac{z_3z_1}{z_2} \quad ④$$

同时成立,从 ③、④ 两式中消去 $\bar{H}$ 得,$H = z_1 + z_2 + z_3$,由于 H 是关于z_1, z_2, z_3 的对称式,所以 z_3w_3 也通过 H,故 H 为 $\triangle z_1z_2z_3$ 的垂心.

证法 2 先证一个平面几何中的引理.

引理 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,垂心为 H,从 O 向 BC 边引垂线,设其垂足为 L,则

$$AH = 2 \cdot OL$$

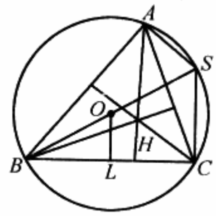


图 2

引理证明 如图 2 所示,设 BO 的延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 S,因为 BS 是直径,所以 $\angle BAS = \angle BCS = 90°$. 因为 $SA \perp AB, CH \perp AB$,所以 $SA \parallel CH$. 又因为 $AH \perp BC, SC \perp BC$,所以 $AH \parallel SC$. 从而四边形 $AHCS$ 是平行四边形,因此

$$AH = SC \quad ⑤$$

另一方面,在 $\triangle SBC$ 中,O 是 SB 的中点,$OL \parallel SC$. 所以

$$SC = 2OL \quad ⑥$$

由 ⑤、⑥ 可得 $AH = 2OL$,利用它可证开始提出的定理.

如图 3 所示,设 BC 中点为 L,则 $L: \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. 由引理得,$AH \parallel OL$,且 $AH = 2OL$. 因此 $\vec{AH}: z_2 + z_3, \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = z_1 + z_2 + z_3$.

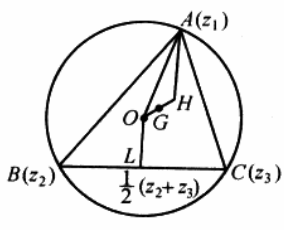


图 3

2 定理的应用

在涉及 △ 的垂心问题都可以考虑用此定理.

例 1 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形,H_1, H_2, H_3, H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心,求证:H_1, H_2, H_3, H_4 四点共圆,并确定该圆的圆心.

(1992 年全国高中数学竞赛试题)

解 以圆心为原点建立复平面直角坐标系,四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 在复平面内所对应的

复数分别为 z_1,z_2,z_3,z_4,则

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=R$$

由 H_1,H_2,H_3,H_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_4A_1,\triangle A_4A_1A_2,\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心,得

$$z_{H_k}=z-z_k\quad(k=1,2,3,4)$$

所以 $|z_{H_k}-z|=|z_k|=R(k=1,2,3,4)$.这说明 $H_k(k=1,2,3,4)$ 在复数 z 对应的点为圆心,半径为 R 的圆上.

例2 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边的长,R 为外接圆半径,O,H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心,求证:$OH^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$.

证明 以外心 O 为原点建立复坐标系,$\triangle ABC$ 的三顶点坐标为 z_1,z_2,z_3,则

$$a=|z_3-z_2|,\quad b=|z_1-z_3|,\quad c=|z_2-z_1|$$

由定理

$$OH=|(z_1+z_2+z_3)-0|=|z_1+z_2+z_3|$$

且

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=R$$

则

$$OH^2=|z_1+z_2+z_3|^2=(z_1+z_2+z_3)(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)=$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+(z_2\bar{z}_3+z_3\bar{z}_2)+(z_3\bar{z}_1+z_1\bar{z}_3)\quad ⑦$$

而

$$|z_2-z_1|^2=|z_2|^2+|z_1|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$$
$$|z_3-z_2|^2=|z_3|^2+|z_2|^2-(z_3\bar{z}_2+z_2\bar{z}_3)$$
$$|z_1-z_3|^2=|z_1|^2+|z_3|^2-(z_1\bar{z}_3+z_3\bar{z}_1)$$

所以

$$9R^2-a^2-b^2-c^2=3R^2+(z_1\bar{z}_2+z_1z_2)+(z_3\bar{z}_2+z_2\bar{z}_3)+(z_1\bar{z}_3+z_3\bar{z}_1)\quad ⑧$$

比较⑦、⑧可知

$$OH^2=9R^2-a_2-b^2-c^2$$

复数三角形面积公式的应用

刘培杰　　张丽敏[①]

我们首先推导出复数三角形的面积公式,然后再利用它证明一些问题.

定理　$\triangle z_1z_2z_3$ 的有向面积公式为

$$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$$

证明　$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}|z_2 - z_1||z_3 - z_1|\sin\theta$,而 $\sin\theta = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. θ 是由向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$.转到向量 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 所扫过的有向转角,则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)\Big/\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \frac{|z_2 - z_1|(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|(z_2 - z_1)}$$

于是

$$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}|z_2 - z_1||z_3 - z_1|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}|z_2 - z_1||z_3 - z_1|\mathrm{Im}\left[\frac{|z_2 - z_1|(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|(z_2 - z_1)}\right]$$

在以下的推导中我们要用到 $\mathrm{Im}(z)$ 的如下性质:

i) 对于任意实数 α,有 $\mathrm{Im}(\alpha) = 0, \alpha\mathrm{Im}(z) = m(\alpha z)$;

ii) $\mathrm{Im}(-z) = \mathrm{Im}(\bar{z})$.

于是

$$\begin{aligned}S_{\triangle z_1z_2z_3} &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[|z_2 - z_1||z_3 - z_1|\cdot\frac{|z_2 - z_1|(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|(z_2 - z_1)}\right] = \\ &\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[|z_2 - z_1|^2\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right] = \\ &\frac{1}{2}\mathrm{Im}[(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1)] = \frac{1}{2}\mathrm{Im}[\bar{z}_2z_3 - \bar{z}_2z_1 - \bar{z}_1z_3 + |z_1|^2] = \\ &\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{z}_2z_3) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{\bar{z}_2z_1 + z_1z_3}) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}(|z_1|^2) =\end{aligned}$$

① 哈尔滨市第 113 中学

$$\frac{1}{2}\text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1)$$ （证毕）

推论 1 若 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 有一个顶点在原点(不妨设 $z_3 = 0$),则

$$S_{\triangle z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{2}\text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{4\text{i}}(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)$$

推论 2 三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) = 0$$

下面我们介绍几个应用:

例 1 设复平面内 $\triangle OAB$ 的顶点 A、B 分别对应复数 α、β(O 为坐标原点),且它们满足以下关系

$$\begin{cases} \beta - (1 + \text{i})\alpha = 0 & ① \\ |\alpha - 2| = 1 & ② \end{cases}$$

试求:$\triangle OAB$ 面积 S 的最大值和最小值.

(1988 年福建省重点高中毕业考试题)

解 由推论 1

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\text{Im}(\bar{\alpha}\beta) = \frac{1}{2}\text{Im}[\bar{\alpha}(1 + \text{i})\alpha] =$$

$$\frac{1}{2}\text{Im}[|\alpha|^2 + \text{i}|\alpha|^2] = \frac{1}{2}|\alpha|^2$$

由

$$|\alpha - 2| = 1 \Rightarrow \alpha - 2 = \cos\theta + \text{i}\sin\theta \Rightarrow \alpha = (2 + \cos\theta) + \text{i}\sin\theta \Rightarrow$$

$$|\alpha|^2 = (2 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 5 + 4\cos\theta$$

所以

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(5 + 4\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant S_{\triangle OAB} \leqslant \frac{9}{2}$$

例 2 设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\bar{z}_2 + \bar{A}z_1 + A\bar{z}_2 = 0$,其中 A 为不等于零的复数.证明:

(1) $|z_1 + A||z_2 + A| = |A|^2$;

(2) $\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A} = \left|\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A}\right|$.

(1987 年全国高考理工类第 6 题)

证明 先证明 $z_1, z_2, -A$ 三点共线,由推论 2

$$\text{Im}[\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2(-A) + \overline{(-A)}z_1] = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \overline{\bar{z}_2 A} + \overline{\bar{A} z_1})\text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{A}z_2 + A\bar{z}_1) =$$

$$-\text{Im}(\overline{\bar{z}_1 z_2 + \bar{A}z_2 + A\bar{z}_1}) = -\text{Im}(z_1\bar{z}_2 + \bar{A}z_1 + A\bar{z}_2) = 0$$

故 $z_1, z_2, -A$ 三点共线,从而 $z_1 - (-A)$ 和 $z_2 - (-A)$ 即 $z_1 + A$ 和 $z_2 + A$ 也共线.故

$$\frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \frac{|z_1 + A|}{|z_2 + A|}(\cos\theta + \text{i}\sin\theta), \quad \theta = \arg\frac{z_1 + A}{z_2 + A} = 0 = \left|\frac{z_1 + A}{z_2 + A}\right|$$

于是 ② 得证.

至于 ① 可以看做是平面几何中的切割线定理.

如图 1 所示,因 $z_1, z_2, -A$ 三点共线,所以过 z_1, z_2 作一圆,并从 $-A$ 向该圆作切线,切点为 O,将复坐标系的原点定在 O 点,则由切割线定理有:$|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$.

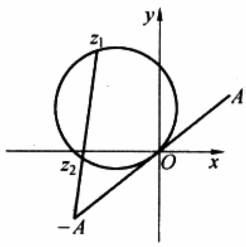


图 1

例 3 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的有向面积.给定两三角形 ABC 及 $A'B'C'$,满足 $AA' \mathbin{/\!/} BB' \mathbin{/\!/} CC'$.求证:$3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}) = S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle C'AB}$.

(1977 年第六届美国数学奥林匹克试题)

证明 先证 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C'}$.

$$左-右=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a+\bar{a}'b'+\bar{b}'c'+\bar{c}'a'-\bar{a}b'-\bar{b}'c'-\bar{c}'a-\bar{a}'b-\bar{b}c-\bar{c}a')=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}[(a-a')(\bar{c}-\bar{c}')+(\bar{a}-\bar{a}')(b-b')]$$

因为 $AA' \mathbin{/\!/} BB' \mathbin{/\!/} CC'$,所以$\dfrac{a-a'}{c-c'}=\alpha\in\mathbf{R}$,所以

$$(\bar{c}-\bar{c}')(a-a')=\alpha|c-c'|^2\in\mathbf{R}\Rightarrow\mathrm{Im}[(\bar{a}-\bar{a}')(b-b')]=0$$

同理

$$\mathrm{Im}[(\bar{a}-\bar{a}')(b-b')]=0$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C'}$$

同理

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle BC'A'}$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle C'AB}+S_{\triangle CA'B'}$$

相加即得

$$3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'})=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}+S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}$$

例 4 凸六边形 $A:A_1A_2A_3A_4A_5A_6$,设 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 分别是线段 $A_6A_2,A_1A_3,A_2A_4,A_3A_5,A_4A_6,A_5A_1$ 中点,凸六边形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 记作 B.求证:$S_B=\dfrac{1}{4}S_A$(S_A,S_B 分别表示 A 与 B 的面积).

(1974 年第九届全苏数学竞赛)

证明 取 B 的一个内点作为复平面的原点 O.显然 O 也是 A 的内点.因此

$$S_A=\sum_{j=1}^{6}S_{\triangle OA_jA_{j+1}}\quad(其中\ A_7=A_1)$$

$$S_B=\sum_{j=1}^{6}S_{\triangle OB_jB_{j+1}}\quad(其中\ B_7=B_1)$$

由推论 1

$$S_{\triangle OB_1B_2}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{B}_1B_2)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\left(\overline{\frac{A_6+A_2}{2}}\right)\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{8}\mathrm{Im}(\bar{A}_6A_1+\bar{A}_6A_3+\bar{A}_2A_1+\bar{A}_2A_3)$$

再对 $\triangle OB_2B_3,\cdots,\triangle OB_6B_1$ 写出类似的等式，然后求和，注意到 $\mathrm{Im}(\bar{A}_iA_j+A_i\bar{A}_j)=0$，则

$$S_B=\sum_{j=1}^{6}S_{\triangle OB_jB_{j+1}}=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{6}\bar{A}_jA_{j+1}\right)=\frac{1}{4}S_A$$

（证毕）

例5 设有边长为1的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中，找出一个面积最大和面积最小的，并求出这两个面积值.

解 如图2所示，以正方形的中心为坐标原点建立复坐标系，则四个顶点为 $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则其内接正三角形的三个顶点可依次记为 $\lambda+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}+u\mathrm{i},\frac{1}{2}+v\mathrm{i}$.

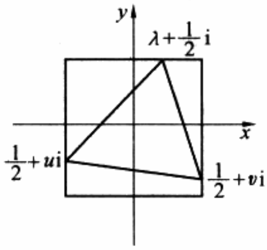


图2

不失一般性，设 $\lambda\geqslant0$，则由这三点组成的正三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}+u\mathrm{i}\right)+\left(-\frac{1}{2}-u\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+v\mathrm{i}\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}-v\mathrm{i}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1}(u+v)+\lambda(u-v)\right] \quad ③$$

由于此三角形为正三角形，故有

$$\left[\left(\frac{1}{2}+v\mathrm{i}\right)-\left(-\frac{1}{2}+u\mathrm{i}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\left(\lambda+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\left(-\frac{1}{2}+u\mathrm{i}\right)$$

即

$$[1+(u-v)\mathrm{i}]\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\lambda+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-u\right)\mathrm{i}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}(u-v)=2\lambda\\ \sqrt{3}+v=1-u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v=1-\sqrt{3}\\ u-v=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\lambda\end{cases} \quad ④$$

将其代入 ③ 中得

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\lambda^2+\frac{3}{4}\right)$$

这是一个关于 λ 的增函数，因此，当 $\lambda=0$ 时，$S_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，其三顶点坐标为 $\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\frac{1}{2}+\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. 由图可见，当 $v=-\frac{1}{2}$ 时，对应的值才能最大，由 ④ 得

$$-2v=\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda+\sqrt{3}-1$$

故 λ 最大值为：$\lambda=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-3)$. 此时 $S_{\max}=2\sqrt{3}-3$.

例 6 （Pedoe不等式）设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别为 α,β,γ 和 α',β',γ'，它们的面积记为 $\triangle$ 和 $\triangle'$，则有以下不等式

$$\alpha'^2(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\beta'^2(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)+\gamma'^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\geqslant 16\triangle\triangle'$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似时成立.

证明 如图 3 所示，将 $\triangle ABC$ 的顶点 C 和 $\triangle A'B'C'$ 的顶点 C' 放在原点，其余顶点分别用 z_1,z_2 和 z'_1,z'_2 表示，故有

$$\alpha=|z_1|,\quad \beta=|z_2|,\quad \gamma=|z_1-z_2|$$

$$\alpha'=|z'_1|,\quad \beta=|z'_2|,\quad \gamma'=|z'_1-z'_2|$$

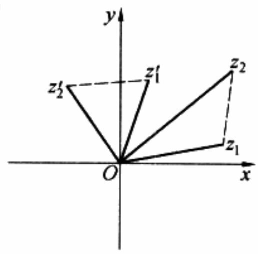


图 3

于是

$$\alpha'^2(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=z'_1\overline{z'_1}[-z_1\bar z_1+z_2\bar z_2+(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)]=$$
$$z'_1\bar z'_1[2z_2\bar z_2-(z_1\bar z_2+\bar z_1z_2)] \quad ⑤$$

同理

$$\beta'^2(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)=z'_2\bar z'_2[2z_1\bar z'_1-(z_1\bar z_2+\bar z_1z_2)] \quad ⑥$$

$$\gamma'^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)=(z'_1-z'_2)(\bar z'_1-\bar z'_2)[z_1\bar z_1+z_2\bar z_2-(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)]=$$
$$[z'_1\bar z'_1+z'_2\bar z'_2-(z'_1\bar z'_2+\bar z'_1z'_2)](z_1\bar z_2+\bar z_1z_2) \quad ⑦$$

⑤ + ⑦ 得

$$F=\alpha'^2(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\beta'^2(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)+\gamma'^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)=$$
$$2(|z'_1|^2|z_2|^2+|z_1|^2|z'_2|^2)-(z_1\bar z_2+\bar z_1z_2)(z'_1\bar z'_2+\bar z'_1z'_2)$$

由推论 1 得

$$\triangle=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar z_1z_2)=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\bar z_1z_2-z_1\bar z_2)$$

$$\triangle'=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar z'_1z'_2)=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\bar z'_1z'_2-z'_1\bar z'_2)\Rightarrow$$
$$16\triangle\triangle'=-(\bar z_1z_2-z_1\bar z_2)(\bar z'_1z'_2-z'_1\bar z'_2)\Rightarrow$$
$$F-16\triangle\triangle'=2(|z'_1|^2|z_2|^2+|z_1|^2|z'_2|^2)+$$
$$(z_1\bar z_2-z_1\bar z_2)(\bar z'_1z'_2-z'_1\bar z'_2)-(z_1\bar z_2+\bar z_1z_2)(z'_1\bar z'_2+\bar z'_1z'_2)=$$
$$2[|z'_1|^2|z_2|^2+|z_1|^2|z'_2|^2-(z_1\bar z'_1\bar z_2z'_2+\bar z_1z'_1z_2\bar z'_2)]=$$
$$2(z_1z'_2-z'_1z_2)(\overline{z_1z'_2-z'_1z_2})=$$
$$2|z_1z'_2-z'_1z_2|^2\geqslant 0\Rightarrow F\geqslant 16\triangle\triangle'$$

等号当且仅当 $z_1z'_2=z'_1z_2$ 时，即 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z'_2}{z'_1}$ 时成立. 此时 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.（证毕）

注：此方法最先由常庚哲教授给出.

例 7 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，E,F 在 CA,BC 边上，求证：

$$S_{\triangle DEF} \leqslant S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$$

(前苏联竞赛题)

证明　如图 4,取 C 为原点,并令 $E = \lambda A, F = \mu B(\lambda, \mu \in [0,1])$,而 $D = \dfrac{A+B}{2}$,由定理注意应用 $\mathrm{Im}(\bar{A}B) = -\mathrm{Im}(A)$ 计算得

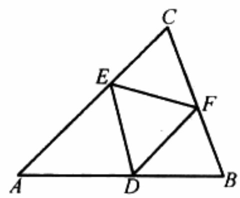


图 4

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{D}F + \bar{F}E + \bar{E}D) = \frac{1}{4}(\lambda + \mu - 2\lambda\mu)\mathrm{Im}(\bar{A}B)$$

$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{A}D + \bar{D}E + \bar{E}A + \bar{B}F + \bar{F}D + \bar{D}B) = \frac{1}{4}(2 - \lambda - \mu)\mathrm{Im}(\bar{A}B)$$

所以

$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF} - S_{\triangle DEF} = (1-\lambda)(1-\mu)S_{\triangle CAB} \geqslant 0$$ (证毕)

例 8　设 $ABCD$ 为梯形,$AB /\!/ CD$,E 是线段 AB 上一点,F 是线段 CD 上一点,线段 CE 与 BF 交于点 H,线段 ED 与 AF 交于点 G,求证:$S_{EHFG} \leqslant \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$.如果 $ABCD$ 是一个任意四边形,同样的结论是否成立?请说明理由.

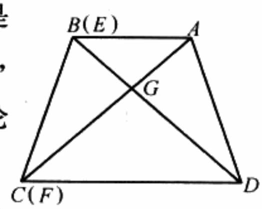


图 5

解　如图 5,当 $E = B, F = C$ 时,取 G 为原点,并令 $C = -\lambda A, D = -\mu B(\lambda、\mu > 0)$,则

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S_{ABCD} - S_{EHFG} &= \frac{1}{4}S_{ABCD} - S_{\triangle GBC} = \\ &\frac{1}{8}\mathrm{Im}(\bar{A}B + \bar{B}C + \bar{C}D + \bar{D}A) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{B}C) = \\ &\frac{1}{8}\mathrm{Im}(\bar{A}B - \lambda\bar{B}A + \lambda\mu\bar{A}B - \mu\bar{B}A) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\lambda\bar{A}B) = \\ &\frac{1}{4}(1 - 3\lambda + \mu + \lambda\mu)S_{\triangle GBC} \qquad ⑧\end{aligned}$$

当 $ABCD$ 为梯形,且 $AB /\!/ CD$ 时,有 $\lambda = \mu > 0$,从而⑧式可化为

$$\frac{1}{4}S_{ABCD} - S_{\triangle GBC} = \frac{1}{4}(1-\lambda)^2 S_{\triangle GAB} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{4}S_{ABCD} \geqslant S_{\triangle GBC}$$

$ABCD$ 是任意四边形的情形,请读者自己推导.

Position vectors; vector and complex-number methods in geometry

Patrick D. Barry[1]

1 EQUIPOLLENCE

Definition. An ordered pair (Z_1, Z_2) of points in Π is said to be equipollent to the pair (Z_3, Z_4), written symbolically $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$, if mp (Z_1, Z_4) = mp(Z_2, Z_3). Thus $\uparrow$ is a binary relation in $\Pi \times \Pi$.

Equipollence has the properties:

(i) If $Z_1 \equiv (x_1, y_1)$, $Z_2 \equiv (x_2, y_2)$, $Z_3 \equiv (x_3, y_3)$, $Z_4 \equiv (x_4, y_4)$, then $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$. if and only if $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, $y_4 + y_4 = y_2 + y_3$, or equivalently $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

(ii) Given any points $Z_1, Z_2, Z_3 \in \Pi$, there is a unique point Z_4 such that $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$.

(iii) For all $Z_1, Z_2 \in \Pi$, $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_1, Z_2)$.

(iv) If $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$, then $(Z_3, Z_4) \uparrow (Z_1, Z_2)$.

(v) If $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$ and $(Z_3, Z_4) \uparrow (Z_5, Z_6)$, then $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_5, Z_6)$.

(vi) If $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$, then $(Z_1, Z_3) \uparrow (Z_2, Z_4)$.

(vii) If $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$, then $|Z_1, Z_2| = |Z_3, Z_4|$.

(viii) For all $Z_1 \in \Pi$, $(Z_1, Z_1) \uparrow (Z_3, Z_4)$, if and only if $Z_3 = Z_4$.

(ix) If $Z_1 \neq Z_2$ and $Z_3 \in l = Z_1Z_2$, then $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$. if and only if $Z_4 \in l$, $|Z_1, Z_2| = |Z_3, Z_4|$, and if $\leqslant_l$ is the natural order for which $Z_1 \leqslant_l Z_2$, then $Z_3 \leqslant_l Z_4$.

(x) If $Z_1 \neq Z_2$ and $Z_3 \notin Z_1Z_2$, then $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$, if and only if $[Z_1, Z_2, Z_4, Z_3]$ is a parallelogram.

Proof.

(i) By the mid-point formula

---

[1] Professor of Mathematics National University of Ireland Cork

$$\text{mp}\,(Z_1,\ Z_4) \equiv \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2}\right), \quad \text{mp}\,(Z_2,\ Z_3) \equiv \frac{x_2 + x_3}{2},\ \frac{y_2 + y_3}{2}$$

and the result follows immediately from this.

(ii) By part (i) it is necessary and sufficient that we choose Z_4 so that $x_4 = x_2 + x_3 - x_1$, $y_4 = y_2 + y_3 - y_1$.

(iii) This is immediate as $x_1 + x_2 = x_1 + x_2$, $y_1 + y_2 = y_1 + y_2$.

(iv) This is immediate as $x_2 + x_3 = x_1 + x_4$, $y_2 + y_3 = y_1 + y_4$.

(v) We are given that

$$x_1 + x_4 = x_2 + x_3, \quad y_1 + y_4 = y_2 + y_3$$

$$x_3 + x_6 = x_4 + x_5, \quad y_3 + y_6 = y_4 + y_5$$

By addition $(x_1 + x_6) + (x_3 + x_4) = (x_2 + x_5) + (x_3 + x_4)$, so by cancellation of $x_3 + x_4$ we have $x_1 + x_6 = x_2 + x_5$. Similarly $y_1 + y_6 = y_2 + y_5$ and so the result follows.

(vi) For by (i) above we have $x_1 + x_4 = x_3 + x_2, y_1 + y_4 = y_3 + y_2$.

(vii) For by (i) above

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

and now we apply the distance formula.

(viii) For if $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, then (i) above is satisfied if and only if $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$.

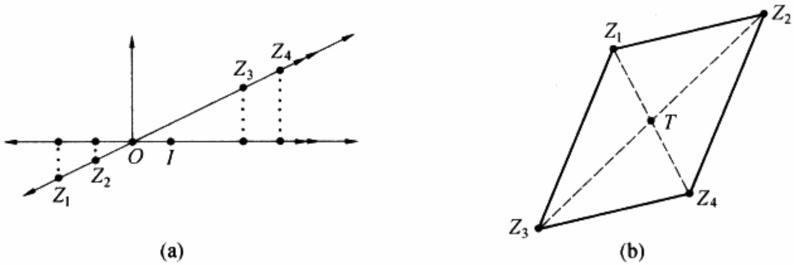


Figure 1

(ix) For suppose first that $(Z_1,\ Z_2) \uparrow (Z_3,\ Z_4)$. Then $Z_3 \in l$ and $\text{mp}\,(Z_3,\ Z_4) \in l$, so $Z_4 \in l$. By (vii) above we have $|Z_1,\ Z_2| = |Z_3,\ Z_4|$. Suppose first that l is not perpendicular to OI, the correspondence between $\leqslant_l$ and the natural order $\leqslant_{OI}$, under which $O \leqslant_{OI} I$, is direct. Then $\pi_{OI}(Z_1) \leqslant_{OI} \pi_{OI}(Z_2)$, so $x_1 \leqslant x_2$. Then by (i) above $x_3 \leqslant x_4$, and so by this argument traced in reverse we have $Z_3 \leqslant_l Z_4$. If the correspondence is indirect, we have $x_2 \leqslant x_1$, $x_4 \leqslant x_3$ instead. When l is perpendicular to OI, we project to OJ instead and make use of the y-coordinates.

Conversely suppose that $Z_4 \in l$, $|Z_1,\ Z2| = |Z_3,\ Z_4|$ and $Z_3 \leqslant_l Z_4$. Now l has parametric equations $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ $(t \in \mathbf{R})$. Suppose that Z_3 and Z_4 have parameters t_3, t_4, respectively, so that

$$x_3 = x_1 + t_3(x_2 - x_1), \quad y_3 = y_1 + t_3(y_2 - y_1)$$
$$x_4 = x_1 + t_4(x_2 - x_1), \quad y_4 = y_1 + t_4(y_2 - y_1)$$

Recall that Z_1, Z_2 have parameters 0 and 1 and $0 < 1$. As in the last paragraph above, if l is not perpendicular to OI and the correspondence between $\leqslant_l$ and $\leqslant_{OI}$ is direct, then $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$; hence $t_3 < t_4$ and we obtain this same conclusion when the correspondence is inverse. When l is perpendicular to OI we project to OJ instead, and use the y-coordinates. Moreover

$$|Z_3, Z_4|^2 = [(t_4 - t_3)(x_2 - x_1)]^2 + [(t_4 - t_3)(y_2 - y_1)]^2 = (t_4 - t_3)^2 |Z_1, Z_2|^2$$

Hence $|t_4 - t_3| = 1$, and so as $t_3 < t_4$ we have $t_4 = 1 + t_3$. Then

$$x_1 + x_4 = 2x_1 + (1 + t_3)(x_2 - x_1), \; x_2 + x_3 = x_2 + x_1 + t_3(x_2 - x_1)$$

and these are equal. Similarly

$$y_1 + y_4 = 2y_1 + (1 + t_3)(y_2 - y_1), \; y_2 + y_3 = y_2 + y_1 + t_3(y_2 - y_1)$$

and these are equal. By (i) above we now have $(Z_1, Z_2) \uparrow (Z_3, Z_4)$.

(x) If $[Z_1, Z_2, Z_4, Z_3]$ is a parallelogram, then $\text{mp}(Z_1, Z_4) = \text{mp}(Z_2, Z_3)$. Conversely suppose that $Z_1 \neq Z_2$, $Z_3 \notin Z_1Z_2$ and $\text{mp}(Z_1, Z_4) = \text{mp}(Z_2, Z_3)$. Then $Z_1 Z_2$, $Z_3 Z_4$ have equations

$$-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$
$$-(y_4 - y_3)(x - x_3) + (x_4 - x_3)(y - y_3) = 0$$

By (i) above, $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$, so these lines are parallel. Similarly $Z_1 Z_3$, $Z_2 Z_4$ have equations

$$-(y_3 - y_1)(x - x_1) + (x_3 - x_1)(y - y_1) = 0$$
$$-(y_4 - y_2)(x - x_2) + (x_4 - x_2)(y - y_2) = 0$$

and by (i) above $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$, $y_3 - y_1 = y_4 - y_2$, so that these lines are parallel. Thus $[Z_1, Z_2, Z_4, Z_3]$ is a parallelogram.

2 SUM OF COUPLES, MULTIPLICATION OF A COUPLE BY A SCALAR

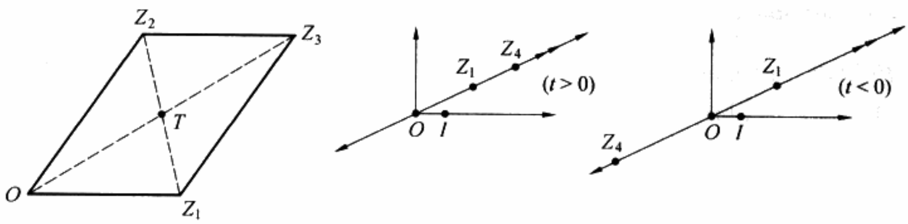


Figure 2

2.1

Definition. For $O \in \Pi$, let $\upsilon(\Pi;\ O)$ be the set of all couples $(O,\ Z)$ for $Z \in \Pi$. We define the sum $(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2)$ of two couples to be $(O,\ Z_3)$ where $\mathrm{mp}(O,\ Z_3) = \mathrm{mp}(Z_1,\ Z_2)$, so that $(O,\ Z_1) \uparrow (Z_2,\ Z_3)$. Thus + is a binary operation in $\upsilon(\Pi;\ O)$. We define the product by a number or scalar $t.\ (O,\ Z_1)$, of a number $t \in \mathbf{R}$ and a couple, to be a couple $(O,\ Z_4)$ as follows. When $Z_1 = O$ we take $Z_4 = O$ for all $t \in \mathbf{R}$. When $Z_1 \neq O$ we take Z_4 to be in the line $l = OZ_1$ and with $|O,\ Z_4| = |t|\,|O,\ Z_1|$; furthermore if $\leqslant_l$ is the natural order for which $O \leqslant_l Z_1$, we take $O \leqslant_l Z_4$ when $t \geqslant 0$, and $Z_4 \leqslant_l O$ when $t < 0$. Thus product by a number is a function on $\mathrm{R} \times \upsilon(\Pi;\ O)$ into $\upsilon(\Pi;\ O)$.

COMMENT. To prove by synthetic means the basic properties of couples, would be very laborious in covering all the cases. We establish instead initial algebraic characterizations which allow an effective algebraic approach.

If O is the origin and $Z_1 \equiv (x_1,\ y_1)$, $Z_2 \equiv (x_2,\ y_2)$, then

(i) $(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2) = (O,\ Z_3)$ where $Z_3 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$.

(ii) $t.\ (O,\ Z_1) = (O,\ Z_4)$ where $Z_4 \equiv (tx_1,\ ty_1)$.

Proof.

(i) For this we have $0 + x_3 = x_1 + x_2$, $0 + y_3 = y_1 + y_2$.

(ii) We verify this as follows. Let $(x_4,\ y_4) = (tx_1,\ ty_1)$. When $(x_1,\ y_1) = (0,\ 0)$ clearly we have $(x_4,\ y_4) = (x_1,\ y_1)$. When $(x_1,\ y_1) \neq (0,\ 0)$, clearly $Z_4 \in OZ_1$ while

$$|O,\ Z_4|^2 = (tx_1)^2 + (ty_1)^2 = t^2\,|O,\ Z_1|^2.$$

Now if l is not perpendicular to OI and the correspondence between the natural order $\leqslant_l$ and the natural order $\leqslant_{OI}$ on OI, under which $O \leqslant_{OI} I$, is direct then $x_1 < x_2$. Thus when $t > 0$, we have $tx_1 > 0$ and so $O \leqslant_l Z_4$; when $t < 0$, we have $tx_1 < 0$ and so $Z_4 \leqslant_l O$. When the correspondence between the natural orders is inverse, we reach the same conclusion. When l is perpendicular to OI we project to OJ instead.

2.2 Vector space over R

Definition. A triple $(\upsilon,\ +,\ .)$ is said to be a vector space over R if the following hold:

(i) First, + is a binary operation in υ.

(ii) For all $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} \in \upsilon$, $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$.

(iii) There is an $\underline{o} \in \upsilon$ such that for all $\underline{a} \in \upsilon$,

$$\underline{a} + \underline{o} = \underline{a},\quad \underline{o} + \underline{a} = a$$

(iv) Corresponding to each $\underline{a} \in \upsilon$, there is some $-\underline{a} \in \upsilon$ such that

$$(-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{o},\quad \underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{o}.$$

(v) For all $\underline{a}$, $\underline{b} \in \upsilon$, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$.

(vi) Next, . : $\mathbf{R} \times \upsilon \rightarrow \upsilon$ is a function.

(vii) For all $\underline{a} \in \upsilon$ and all t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$, $t_2.(t_1.\underline{a}) = (t_2 t_1).\underline{a}$.

(viii) For all $\underline{a}$, $\underline{b} \in \upsilon$ and all $t \in \mathbf{R}$, $t.(\underline{a} + \underline{b}) = t.\underline{a} + t.\underline{b}$.

(ix) For all $\underline{a} \in \upsilon$ and all t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$, $(t_1 + t_2).\ \underline{a} = t_1.\ \underline{a} + t_2.\ \underline{a}$.

(x) For all $\underline{a} \in \upsilon$, $1.\underline{a} = \underline{a}$.

We then have the following result.

$(\upsilon(\Pi;\ O),\ +,.)$ is a vector space over $\mathbf{R}$.

Proof.

(i) This has been covered already before.

(ii) Now $(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2) = (O,\ Z_4)$ where $(x_4,\ y_4) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$. Then

$$[(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2)] + (O,\ Z_3) = (O,\ Z_4) + (O,\ Z_3) = (O,\ Z_5)$$

where

$$(x_5,\ y_5) = (x_4 + x_3,\ y_4 + y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3,\ (y_1 + y_2) + y_3)$$

Similarly $(O,\ Z_2) + (O,\ Z_3) = (O,\ Z_6)$ where $(x_6,\ y_6) = (x_2 + x_3,\ y_2 + y_3)$, and so

$$(O,\ Z_1) + [(O,\ Z_2) + (O,\ Z_3)] = (O,\ Z_1) + (O,\ Z_6) = (O,\ Z_7)$$

where $(x_7,\ y_7) = (x_1 + x_6,\ y_1 + y_6) = (x_1 + (x_2 + x_3),\ y_1 + (y_2 + y_3))$. Clearly $Z_5 = Z_7$.

(iii) For any $Z_1 \in \Pi$, $(O,\ Z_1) + (O,\ O) = (O,\ Z_2)$ where $(x_2,\ y_2) = (x_1 + 0,\ y_1 + 0) = (x_1,\ y_1)$, so that $Z_2 = Z_1$. Similarly $(O,\ O) + (O,\ Z_1) = (O,\ Z_3)$ where $(x_3,\ y_3) = (0 + x_1,\ 0 + y_1) = (x_1,\ y_1)$, so that $Z_3 = Z_1$.

(iv) Now $(O,\ Z_1) + (0,\ Z_2) = (O,\ Z_3)$, $(O,\ Z_2) + (O,\ Z_1) = (O,\ Z_4)$ where $(x_3,\ y_3) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ and $(x_4,\ y_4) = (x_2 + x_1,\ y_2 + y_1)$. Clearly $Z_3 = Z_4$.

(v) If $(x_2,\ y_2) = (-x_1,\ -y_1)$, then $(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2) = (O,\ Z_3)$ where $(x_3,\ y_3) = (x_1 - x_1,\ y_1 - y_1) = (0,\ 0)$; hence $Z_3 = O$. Similarly $(O,\ Z_2) + (O,\ Z_1) = (O,\ Z_4)$ where $(x_4,\ y_4) = (-x_1 + x_1,\ -y_1 + y_1) = (0,\ 0)$; hence $Z_4 = O$.

(vi) This was covered before.

(vii) For $t_1.\ (O,\ Z_1) = (O,\ Z_2)$ where $(-x_2,\ y_2) = (t_1 x_1,\ t_1 y_1)$. Then $t_2.\ (t_1.(O,\ Z_1)) = t_2.(O,\ Z_2) = (O,\ Z_3)$ where $(x_3,\ y_3) = (t_2(t_1 x_1),\ t_2(t_1 y_1))$. Also $(t_2 t_1).(O,\ Z_1) = (O,\ Z_4)$ where $(x_4,\ y_4) = ((t_2 t_1)x_1,\ (t_2 t_1)y_1)$. Thus $Z_3 = Z_4$.

(viii) For $(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2) = (O,\ Z_3)$ and $t.\ [(O,\ Z_1) + (O,\ Z_2)] = t.(O,\ Z_3) = (O,\ Z_4)$ where $(x_3,\ y_3) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$, $(x_4,\ y_4) = (t(x_1 + x_2),\ t(y_1 + y_2))$. Also $t.(O,\ Z_1) = (O,\ Z_5)$, $t.(O,\ Z_2) = (O,\ Z_6)$ where $(x_5,\ y_5) = (tx_1,\ ty_1)$, $(x_6,\ y_6) = (tx_2,\ ty_2)$. Moreover $(O,\ Z_5) + (O,\ Z_6) = (O,\ Z_7)$ where $(x_7,\ y_7) = (x_5 + x_6,\ y_5 + y_6) = (tx_1 + tx_2,\ ty_1 + ty_2)$. Hence $Z_4 = Z_7$.

(ix) For $t_1 \cdot (O,\ Z_1) = (O,\ Z_2)$, $t_2 \cdot (O,\ Z_1) = (O,\ Z_3)$, $(t_1 + t_2).(O,\ Z_1) =$

(O, Z_4) and $(O, Z_2) + (O, Z_3) = (O, Z_5)$ where $(x_2, y_2) = (t_1x_1, t_1y_1)$, $(x_3, y_3) = (t_2x_1, t_2y_1)$ and $(x_4, y_4) = ((t_1 + t_2)x_1, (t_1 + t_2)y_1)$. Moreover $(x_5, y_5) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (t_1x_1 + t_2x_1, t_1y_1 + t_2y_1)$. Clearly $Z_4 = Z_5$.

(x) For 1. $(O, Z_1) = (O, Z_2)$ where $(x_2, y_2) = (1.x_1, 1.y_1) = (x_1, y_1)$. Thus $Z_2 = Z_1$.

3 SCALAR OR DOT PRODUCTS

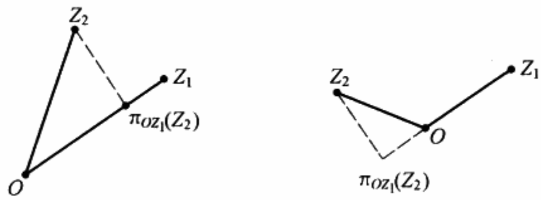


Figure 3

Definitions. We define a scalar product, or dot product, $(O, Z_1) \cdot (O, Z_2)$ as follows. If $Z_1 = O$ then $(O, Z_1) \cdot (O, Z_2) = 0$; otherwise $Z_1 \neq O$ and we set

$$(O, Z_1) \cdot (O, Z_2) = \begin{cases} |O, Z_1||O, \pi_{OZ_1}(Z_2)|, \text{ if } \pi_{OZ_1}(Z_2) \in [O, Z_1, \\ -|O, Z_1||O, \pi_{OZ_1}(Z_2)|, \text{ if } \pi_{OZ_1}(Z_2) \in OZ_1 \setminus [O, Z_1. \end{cases}$$

Clearly the scalar product is a function on $\upsilon(\Pi; O) \times \upsilon(\Pi; O)$ into $\mathbf{R}$.

The norm $\| \underline{a} \|$ of a vector $\underline{a} = (O, Z)$ is defined to be the distance $|O, Z|$.

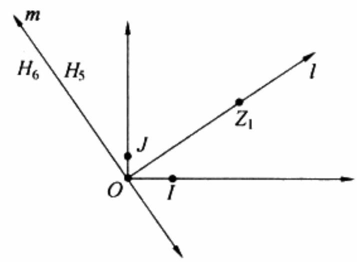


Figure 4

The scalar product has the following properties:

(i) If $Z_j \equiv (x_j, y_j)$ for $j = 1, 2$ then $\underline{a} \cdot \underline{b} = (O, Z_1) \cdot (O, Z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

(ii) For all $\underline{a}, \underline{b} \in \upsilon(\Pi; O)$, $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$.

(iii) For all $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \upsilon(\Pi; O)$, $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$.

(iv) For all $\underline{a}, \underline{b} \in \upsilon(\Pi; O)$ and all $t \in \mathbf{R}$, $t \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b}) = (t \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b}$.

(v) For all $\underline{a} \neq \underline{o}$, $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$, while $\underline{o} \cdot \underline{o} = 0$.

(vi) For all $\underline{a}$, $\| \underline{a} \| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$.

Proof.

(i) If $Z_1 = O$, then $x_1 = y_1 = 0$ so that $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ as required.

Suppose then that $Z_1 \neq O$. Write $l = OZ_1$ and let m be the line through the point O which is perpendicular to l. Define the closed half-plane $H_5 = \{X \mid \pi_l(X) \in [O, Z_1\}$ and

let H_6 be the other closed half-plane with edge m. Now $l \equiv -y_1x + x_1y = 0$ and $m \equiv x_1x + y_1y = 0$.

Then as $Z_1 \in H_5$,

$H_5 = \{Z \equiv (x, y) \mid x_1x + y_1y \geqslant 0\}$, $H_6 = \{Z \equiv (x, y) \mid x_1x + y_1y \leqslant 0\}$

But by

$$\pi_l(Z_2) \equiv \left(x_2 + \frac{y_1}{y_1^2 + x_1^2}(-y_1x_2 + x_1y_2),\ y_2 - \frac{x_1}{y_1^2 + x_1^2}(-y_1x_2 + x_1y_2)\right) = \left(x_1\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2},\ y_1\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

Thus

$$|O, Z_1|^2 |O, \pi_l(Z_2)|^2 = (x_1^2 + y_1^2)\left[x_1^2\frac{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + y_1^2\frac{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2}\right] = (x_1x_2 + y_1y_2)^2$$

so that $|O, Z_1||O, \pi_l(Z_2)| = |x_1x_2 + y_1y_2|$.

If $Z_2 \in H_5$ so that

$$(O, Z_1)\cdot(O, Z_2) = |O, Z_1||O, \pi_l(Z_2)|$$

and $x_1x_2 + y_1y_2 \geqslant 0$ so that $|x_1x_2 + y_1y_2| = x_1x_2 + y_1y_2$, clearly $(O, Z_1).(O, Z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

If $Z_2 \in H_6 \setminus m$ we have $\pi_l(Z_2) \in l \setminus [O, Z_1$. Then

$$(O, Z_1)\cdot(O, Z_2) = -|O, Z_1||O, \pi_l(Z_2)|$$

and $x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant 0$, so that $|x_1x_2 + y_1y_2| = -(x_1x_2 + y_1y_2)$. Clearly again $(O, Z_1).(O, Z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

(ii) Let $\underline{a} = (O, Z_1)$, $\underline{b} = (O, Z_2)$. Then by (i) of the present theorem, $\underline{a}\cdot\underline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, $\underline{b}\cdot\underline{a} = x_2x_1 + y_2y_1$, and clearly these are equal.

(iii) Let $\underline{a} = (O, Z_1)$, $\underline{b} = (O, Z_2)$, $\underline{c} = (O, Z_3)$. Then by (i) $\underline{b} + \underline{c} = (O, Z_4)$ where $Z_4 \equiv (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$. Then by (i) above $\underline{a}\cdot(\underline{b} + \underline{c}) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3)$, while $\underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c} = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3)$, and these are equal.

(iv) Let $\underline{a} = (O, Z_1)$, $\underline{b} = (O, Z_2)$. Then $t\cdot(\underline{a}\cdot\underline{b}) = t(x_1x_2 + y_1y_2)$. But by 2.1(ii), $t\cdot\underline{a} = (O, Z_4)$ where $Z_4 \equiv (tx_1, ty_1)$ and so $(t\cdot\underline{a})\cdot\underline{b} = (tx_1)x_2 + (ty_1)y_2$, which is equal to the earlier expression.

(v) If $\underline{a} = (O, Z)$ *then* $\underline{a}\cdot\underline{a} = x^2 + y^2$. This is positive when $(x, y) \neq (0, 0)$, and equal to 0 for $x = y = 0$.

(vi) This follows immediately.

NOTE. Note that 2.2(i) to (v) make $(\upsilon, +)$ a commutative group. In text-books on algebra it is proved that there is not a second element which has the property (iii); we shall refer to $\underline{o}$ as the null vector. It is also a standard result that for each $\underline{a} \in \upsilon$ there is not a

second element with the property (iv); we call $-\underline{a}$ the inverse of $\underline{a}$. Subtraction $-$ is defined by specifying the difference $\underline{b}-\underline{a}=\underline{b}+(-\underline{a})$; then $-$ is a binary operation on υ. If $\underline{a}=(O, Z_1)$, $\underline{b}=(O, Z_2)$, then $-\underline{a}=(O, Z_3)$ where $Z_3\equiv(-x_1, -y_1)$, and consequently $\underline{b}-\underline{a}=(O, Z_4)$ where $Z_4\equiv(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Thus $(O, Z_2)-(O, Z_1)=(O, Z_4)$ if and only if $(Z_1, Z_2)\uparrow(O, Z_4)$.

COMMENT. Now that we have set up our couples we call (O, Z) a position vector with respect to the point O, and we adopt the standard notation $\overrightarrow{OZ}$ for (O, Z).

Position vectors can be used for many geometrical purposes instead of Cartesian coordinates, or complex coordinates and complex-valued distances. We would note that $Z_0=\operatorname{mp}(Z_1, Z_2)$ if and only if $\overrightarrow{OZ_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2})$; $Z_1Z_2\parallel Z_3Z_4$ if and only if $\overrightarrow{OZ_4}-\overrightarrow{OZ_3}=t(\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1})$ for some $t\neq 0$ in $\mathbf{R}$, and that $Z_1Z_2\perp Z_3Z_4$ if and only if $(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}).(\overrightarrow{OZ_3}-\overrightarrow{OZ_4})=0$. Most importantly, from parametric equations of a line $x=x_1+t(x_2-x_1)$, $y=y_1+t(y_2-y_1)(t\in\mathbf{R})$, we have that $Z\in Z_1Z_2$ if and only if

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+t(\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1})=(1-t)\overrightarrow{OZ_1}+t\overrightarrow{OZ_2} \quad ①$$

for some $t\in\mathbf{R}$;

复域漫步

COMMENT. It is usual, in modern treatments, to define vectors to be the equivalence classes for equipollence. This defines free vectors. Position vectors are then defined by taking a specific point O in Π so that we have a pointed plane, and then concentrating on the representatives of the form (O, Z) for the vectors. But if our objective is to introduce position vectors, it is wasteful of effort to set up the free vectors, and in fact the use of free vectors and subsequent specialisation to position vectors can be a confusing route to position vectors.

4 COMPONENTS OF A VECTOR

4.1 Components

Given non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, we wish to obtain an expression

$$\overrightarrow{Z_1Z}=p\overrightarrow{Z_1Z_2}+q\overrightarrow{Z_1Z_3}$$

For this we need

$$(x_2-x_1)p+(x_3-x_1)q=x-x_1$$
$$(y_2-y_1)p+(y_3-y_1)q=y-y_1$$

We obtain the solutions

$$p=\frac{\delta_F(Z_1, Z, Z_3)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)},\quad q=\frac{\delta_F(Z_1, Z_2, Z)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}$$

and so have

$$\overrightarrow{Z_1Z}=\frac{\delta_F(Z_1, Z, Z_3)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}\overrightarrow{Z_1Z_2}+\frac{\delta_F(Z_1, Z_2, Z)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}\overrightarrow{Z_1Z_3}$$

4.2 Areal coordinates

Given non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, the position vector of any point Z of the plane can be expressed in the form $\overrightarrow{OZ} = p\,\overrightarrow{OZ_1} + q\,\overrightarrow{OZ_2} + r\,\overrightarrow{OZ_3}$, with $p + q + r = 1$. This is equivalent to having q, r such that

$$q(x_2 - x_1) + r(x_3 - x_1) = x - x_1$$
$$q(y_2 - y_1) + r(y_3 - y_1) = y - y_1$$

These equations have the unique solution

$$q = \frac{\delta_F(Z, Z_3, Z_1)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}, \quad r = \frac{\delta_F(Z, Z_1, Z_2)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}$$

and now we take $p = 1 - q - r$ so that

$$p = \frac{\delta_F(Z, Z_2, Z_3)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}$$

For non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, for any Z we write

$$\alpha = \delta_F(Z_1, Z_2, Z_3), \quad \beta = \delta_F(Z, Z_3, Z_1), \quad \gamma = \delta_F(Z, Z_1, Z_2)$$

and call (α, β, γ) areal point coordinates of Z with respect to (Z_1, Z_2, Z_3). Note that we have

$$p = \frac{\alpha}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}, \quad q = \frac{\beta}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}, \quad r = \frac{\gamma}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}$$

and $\alpha + \beta + \gamma = \delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)$. These were first used by Möbius in 1827.

4.3 Cartesian coordinates from areal coordinates

With the notation before, we have

$$(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y = 2\alpha - x_2y_3 + x_3y_2$$
$$(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y = 2\beta - x_3y_1 + x_1y_3$$

and if we solve these we obtain

$$x = \frac{x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}, \quad y = \frac{y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)}$$

4.4

The representation before is in fact independent of the origin O. For we have

$$x = px_1 + qx_2 + rx_3, \quad y = py_1 + qy_2 + ry_3$$

and so for any point $Z_0 \equiv F(x_0, y_0)$

$$x - x_0 = p(x_1 - x_0) + q(x_2 - x_0) + r(x_3 - x_0)$$
$$y - y_0 = p(y_1 - y_0) + q(y_2 - y_0) + r(y_3 - y_0)$$

But $Z \equiv F'(x - x_0, y - y_0)$, where $F' = t_{o,Z_0}(F)$. Hence $\overrightarrow{Z_0Z} = p\,\overrightarrow{Z_0Z_1} + q\,\overrightarrow{Z_0Z_2} + r$

Z_0Z_3, with $p + q + r = 1$.

NOTATION. Where a vector equation is independent of the origin, as in $\overrightarrow{OZ} = p\,\overrightarrow{OZ_1} + q\,\overrightarrow{OZ_2} + r\,\overrightarrow{OZ_3}$, with $p + q + r = 1$, it is convenient to write this as $Z = pZ_1 + qZ_2 + rZ_3$ with $p + q + r = 1$.

Figure 5 caters for when O and Z_1 the taken as origins, a similar diagram would cater for when Z_0 and Z_1 are origins, and then a combination of the two would give the stated result.

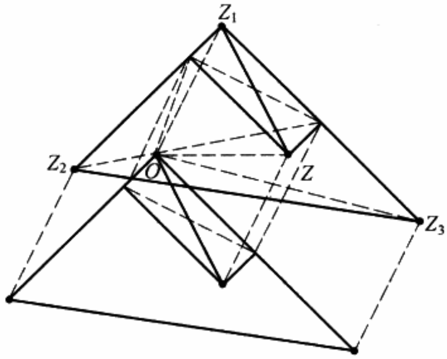


Figure 5

4.5

We also use the notation $\delta_F(Z_1, Z_2, pZ_4 + qZ_5 + rZ_6)$ for $\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)$ where $\overrightarrow{OZ_3} = p\,\overrightarrow{OZ_4} + q\,\overrightarrow{OZ_5} + r\,\overrightarrow{OZ_6}$ and $p + q + r = 1$. We can then write the conclusion before as

$$\delta_F(Z_1, Z_2, (1-s)Z_4 + sZ_5) = (1-s)\delta_F(Z_1, Z_2, Z_4) + s\delta_F(Z_1, Z_2, Z_5)$$

The more general result

$$\delta_F(Z_1, Z_2, pZ_4 + qZ_5 + rZ_6) = p\delta_F(Z_1, Z_2, Z_4) + q\delta_F(Z_1, Z_2, Z_5) + r\delta_F(Z_1, Z_2, Z_6).$$

where $p + q + r = 1$, can be deduced from this. For

$$\begin{aligned}\delta_F(Z_1, Z_2, pZ_4 + qZ_5 + rZ_6) &= \delta_F\left(Z_1, Z_2, pZ_4 + (1-p)\left(\frac{q}{1-p}Z_5 + \frac{r}{1-p}Z_6\right)\right) = \\ &\quad p\,\delta_F(Z_1, Z_2, Z_4) + (1-p)\cdot \\ &\quad \delta_F\left(Z_1, Z_2, \frac{q}{1-p}Z_5 + \frac{r}{1-p}Z_6\right) = \\ &\quad p\,\delta_F(Z_1, Z_2, Z_4) + (1-p)\cdot \\ &\quad \left[\frac{q}{1-p}\delta_F(Z_1, Z_2, Z_5) + \frac{r}{1-p}\delta_F(Z_1, Z_2, Z_6)\right]\end{aligned}$$

In this we have used the fact that

$$\frac{q}{1-p} + \frac{r}{1-p} = \frac{q+r}{1-p} = \frac{1-p}{1-p} = 1$$

5 VECTOR METHODS IN GEOMETRY

There is an informative account of many of the results of this chapter contained in Coxeter and Greitzer [5], dealt with by the methods of pure geometry.

Some results are very basic, involving just collinearities or concurrencies, or ratio results. We start by showing how vector notation can be used to prove such results in a very straightforward fashion.

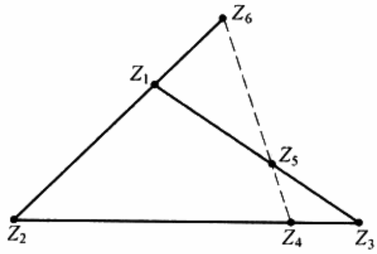


Figure 6

5.1 Menelaus' theorem, c.100A.D.

For non-collinear points Z_1, Z_2 and Z_3, let $Z_4 \in Z_2Z_3$, $Z_5 \in Z_3Z_1$ and $Z_6 \in Z_1Z_2$. Then Z_4, Z_5 and Z_6 are collinear if and only if

$$\frac{\overline{Z_2Z_4}}{\overline{Z_4Z_3}} \frac{\overline{Z_3Z_5}}{\overline{Z_5Z_1}} \frac{\overline{Z_1Z_6}}{\overline{Z_6Z_2}} = -1$$

Proof. Let $Z_4 = (1-r)Z_2 + rZ_3$, $Z_5 = (1-s)Z_3 + sZ_1$, $Z_6 = (1-t)Z_1 + tZ_2$.

Since Z_4, Z_5 and Z_6 are collinear, we have that $Z_6 = (1-u)Z_4 + uZ_5$, for some real number u. Then

$$(1-t)Z_1 + tZ_2 = (1-u)[(1-r)Z_2 + rZ_3] + u[(1-s)Z_3 + sZ_1]$$

As the coefficients on each side add to 1, by the uniqueness before we can equate coefficients and thus obtain

$$1 - t = su, \quad t = (1-u)(1-r), \quad r(1-u) = -u(1-s)$$

On eliminating u we obtain

$$\frac{r}{1-s}\frac{s}{1-t}\frac{t}{1-r} = -\frac{u}{1-u}\frac{1}{u}(1-u) = -1$$

and so

$$\frac{r}{1-r}\frac{s}{1-s}\frac{t}{1-t} = -1$$

This yields the stated result.

This is known as MENELAUS' THEOREM.

5.2 Ceva's theorem and converse, 1678

For non-collinear points Z_1, Z_2 and Z_3, let $Z_4 \in Z_2Z_3$, $Z_5 \in Z_3Z_1$ and $Z_6 \in Z_1Z_2$. If Z_1Z_4, Z_2Z_5 and Z_3Z_6 are concurrent, then

$$\frac{\overline{Z_2Z_4}}{\overline{Z_4Z_3}}\frac{\overline{Z_3Z_5}}{\overline{Z_5Z_1}}\frac{\overline{Z_1Z_6}}{\overline{Z_6Z_2}} = 1 \qquad ②$$

Proof. Denoting the point of concurrency by Z_0, we have

$$Z_4 = (1-u)Z_0 + uZ_1 = (1-r)Z_2 + rZ_3$$
$$Z_5 = (1-v)Z_0 + vZ_2 = (1-s)Z_3 + sZ_1$$
$$Z_6 = (1-w)Z_0 + wZ_3 = (1-t)Z_1 + tZ_2$$

for some $u, v, w, r, s, t \in \mathbf{R}$. Then

$$Z_0 = -\frac{u}{1-u}Z_1 + \frac{1-r}{1-u}Z_2 + \frac{r}{1-u}Z_3$$
$$Z_0 = \frac{s}{1-v}Z_1 - \frac{v}{1-v}Z_2 + \frac{1-s}{1-v}Z_3$$
$$Z_0 = \frac{1-t}{1-w}Z_1 + \frac{t}{1-w}Z_2 - \frac{w}{1-w}Z_3$$

On equating the coefficients of Z_1, Z_2 and Z_3, in turn, we obtain

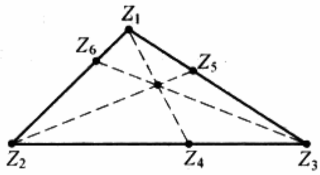


Figure 7

$$-\frac{u}{1-u} = \frac{s}{1-v} = \frac{1-t}{1-w}$$
$$\frac{1-r}{1-u} = -\frac{v}{1-v} = \frac{t}{1-w}$$
$$\frac{r}{1-u} = \frac{1-s}{1-v} = -\frac{w}{1-w}$$

From this

$$\frac{s}{1-t} = \frac{1-v}{1-w}, \quad \frac{t}{1-r} = \frac{1-w}{1-u}, \quad \frac{r}{1-s} = \frac{1-u}{1-v}$$

and so by multiplication

$$\frac{s}{1-t}\frac{t}{1-r}\frac{r}{1-s} = 1$$

Thus we obtain our conclusion. This is known as CEVA'S THEOREM.

In fact we also have that

$$\frac{u}{s} = -\frac{1-u}{1-v}, \quad \frac{v}{t} = -\frac{1-v}{1-w}, \quad \frac{w}{r} = -\frac{1-w}{1-u}$$

which gives $uvw = -rst$. This is

$$\frac{\overline{Z_0Z_4}}{\overline{Z_0Z_1}}\frac{\overline{Z_0Z_5}}{\overline{Z_0Z_2}}\frac{\overline{Z_0Z_6}}{\overline{Z_0Z_3}} = -\frac{\overline{Z_2Z_4}}{\overline{Z_2Z_3}}\frac{\overline{Z_3Z_5}}{\overline{Z_3Z_1}}\frac{\overline{Z_1Z_6}}{\overline{Z_1Z_2}}$$

CONVERSE Of CEVA'S THEOREM. Conversely, for non-collinear points Z_1, Z_2 and Z_3, let $Z_4 \in Z_2Z_3$, $Z_5 \in Z_3Z_1$ and $Z_6 \in Z_1Z_2$. If Z_2Z_5 and Z_3Z_8 meet at a point Z_0, then Z_1Z_4 also passes through Z_0.

To start our proof we note that we have

$$Z_5 = (1-v)Z_0 + vZ_2 = (1-s)Z_3 + sZ_1$$
$$Z_6 = (1-w)Z_0 + wZ_3 = (1-t)Z_3 + tZ_1$$

Hence

$$Z_0 = \frac{s}{1-v}Z_1 - \frac{v}{1-v}Z_2 + \frac{1-s}{1-v}Z_3, \quad Z_0 = \frac{1-t}{1-w}Z_1 + \frac{t}{1-w}Z_2 - \frac{w}{1-w}Z_3$$

It follows that

$$\frac{s}{1-v} = \frac{1-t}{1-w}, \quad -\frac{v}{1-v} = \frac{t}{1-w}, \quad \frac{1-s}{1-v} = -\frac{w}{1-w}$$

from which

$$\frac{s}{1-t} = \frac{1-v}{1-w}, \quad (1-s)t = vw$$

On eliminating s between these, we obtain $(1-v)t^2 + (v-w)t - vw(1-w) = 0$. We then obtain two pairs of solutions, $t = w, s = 1-v$, and

$$t = -v\frac{1-w}{1-v}, \quad s = \frac{1-vw}{1-w}$$

The first pair of solutions leads to $v = w = 0$ and so $Z_5 = Z_6 = Z_0 = Z_1$, which we regard as a degenerate case.

With $Z_4 = (1-r)Z_2 + rZ_3$, we are given that

$$\frac{1-r}{r} = \frac{st}{(1-s)(1-t)}$$

and so have

$$Z_4 = \frac{st}{st + (1-s)(1-t)}Z_2 + \frac{(1-s)(1-t)}{st + (1-s)(1-t)}Z_3$$

With the second pair of solutions above, we obtain that

$$Z_0 = \frac{1-vw}{(1-v)(1-w)}Z_1 - \frac{v(1-w)}{(1-v)(1-w)}Z_2 \frac{w(1-v)}{(1-v)(1-w)}Z_3$$

and also that

$$Z_4 = \frac{v(1-w)}{v+w-2vw}Z_2 + \frac{w(1-v)}{v+w-2vw}Z_3$$

so that

$$Z_0 = \frac{1-vw}{(1-v)(1-w)}Z_1 - \frac{v+w-2vw}{(1-v)(1-w)}Z_4$$

As the sum of the coefficients of Z_1 and Z_4 is equal to 1, Z_1Z_4 passes through Z_0. This proves the result.

To obtain a formula for Z_0 we note that on solving the second pair of solutions above for v and w, we obtain the pair of solutions

$$v = 1, \quad w = 1; \quad v = -\frac{st}{1-t}, \quad w = -\frac{(1-s)(1-t)}{s}$$

To see this, note that

$$1 - w = -\frac{1-v}{v}t, \quad w = 1 + \frac{1-v}{v}t$$

so that

$$\frac{1 - v(1 + \frac{1-v}{v}t)}{\frac{1-v}{v}t} = s, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1 - v - (1-v)t}{-\frac{1-v}{v}t} = s$$

Thus either $v = 1$ and consequently $w = 1$, or

$$\frac{1-t}{-\frac{t}{v}} = s, \quad \text{i.e.} \quad v = \frac{st}{1-t}$$

and hence

$$w = -\frac{(1-s)(1-t)}{s}$$

The first pair lead to $Z_5 = Z_2$, $Z_6 = Z_3$, another degenerate case, while the second pair lead to

$$Z_0 = \frac{s(1-t)}{1-t+st}Z_1 + \frac{st}{1-t+st}Z_2 + \frac{(1-s)(1-t)}{1-t+st}Z_3. \quad ③$$

5.3 Desargues' perspective theorem, 1648

Let (Z_1, Z_2, Z_3) and (Z_4, Z_5, Z_6) be two pairs of non-collinear points. Let Z_2Z_3 and Z_5Z_6 meet at W_1, Z_3Z_1 and Z_6Z_4 meet at W_2, and Z_1Z_2 and Z_4Z_5 meet at W_3. Then W_1, W_2, W_3 are collinear if and only if Z_1Z_4, Z_2Z_5, Z_3Z_6 are concurrent.

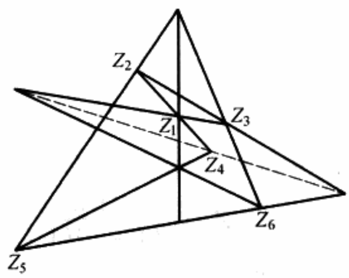


Figure 8

Proof. Suppose that Z_1Z_4, Z_2Z_5, Z_3Z_6 meet at a point Z_0.

Then

$$Z_4 = (1-u)Z_0 + uZ_1$$
$$Z_5 = (1-v)Z_0 + vZ_2$$
$$Z_6 = (1-w)Z_0 + wZ_3$$

for some $u, v, w \in \mathbf{R}$.

On eliminating Z_0 between the second and third of these, we obtain that

$$(1-w)Z_5-(1-v)Z_6=v(1-w)Z_2-w(1-v)Z_3$$

from which we obtain that

$$\frac{1-w}{v-w}Z_5-\frac{1-v}{v-w}Z_6=\frac{v(1-w)}{v-w}Z_2-\frac{w(1-v)}{v-w}Z_3$$

Now the sum of the coefficients of Z_5 and Z_6 is equal to 1, so the left-hand side represents a point on the line Z_5Z_6. Similarly, the sum of the coefficients of Z_2 and Z_3 is equal to 1, so the right-hand side represents a point on the line Z_2Z_3. Thus this must be the point W_1.

By a similar argument based on the third and first lines, we find that

$$\frac{1-u}{w-u}Z_6-\frac{1-w}{w-u}Z_4=\frac{w(1-u)}{w-u}Z_3-\frac{u(1-w)}{w-u}Z_1$$

must be the point W_2, and by a similar argument based on the first and second lines, we find that

$$\frac{1-v}{u-v}Z_4-\frac{1-u}{u-v}Z_5=\frac{u(1-v)}{u-v}Z_1-\frac{v(1-u)}{u-v}Z_2$$

must be the point W_3.

Then

$$\delta_F(W_1,\ W_2,\ W_3)=$$

$$\delta_F\left(\frac{v(1-w)}{v-w}Z_2-\frac{w(1-v)}{v-w}Z_3,\ -\frac{u(1-w)}{w-u}Z_1+\frac{w(1-u)}{w-u}Z_3,\ \frac{u(1-v)}{u-v}Z_1-\frac{v(1-u)}{u-v}Z_2\right)=$$

$$\left[\frac{v(1-w)}{v-w}\frac{w(1-u)}{w-u}\frac{u(1-v)}{u-v}-\frac{w(1-v)}{v-w}\frac{-u(1-w)}{w-u}\frac{-v(1-u)}{u-v}\right]\delta_F(Z_1,\ Z_2,\ Z_3)=0$$

This shows that W_1, W_2 and W_3 are collinear.

This is known as DESARGUES' PERSPECTIVE OR TWO-TRIANGLE THEOREM.

Conversely, let

$$W_1=(1-l)Z_2+lZ_3=(1-m)Z_5+mZ_6$$
$$W_2=(1-p)Z_3+pZ_1=(1-q)Z_6+qZ_4$$
$$W_3=(1-r)Z_1+rZ_2=(1-s)Z_4+sZ_5$$

From the third of these we deduce that $(1-r)Z_1-(1-s)Z_4=sZ_5-rZ_2$, and from this

$$\frac{1-r}{s-r}Z_1-\frac{1-s}{s-r}Z_4=\frac{s}{s-r}Z_5-\frac{r}{s-r}Z_2$$

so that this must be the point of intersection of Z_1Z_4 and Z_2Z_5.

By a similar argument, we deduce from the second equation that

$$\frac{1-l}{m-l}Z_2-\frac{1-m}{m-l}Z_5=\frac{m}{m-l}Z_6-\frac{l}{m-l}Z_3$$

and so this must be the point of intersection of Z_2Z_5 and Z_3Z_6. By a similar argument, we deduce from the first equation that

$$\frac{1-p}{q-p}Z_3-\frac{1-p}{q-p}Z_6=\frac{q}{q-p}Z_4-\frac{p}{q-p}Z_1$$

and so this must be the point of intersection of Z_3Z_6 and Z_1Z_4.

We are given now that W_1, W_2 and W_3 are collinear, so that $W_3 = (1-t)W_1 + tW_2$, for some $t \in \mathbf{R}$. Then

$$(1-t)[(1-l)Z_2 + lZ_3] + t[(1-p)Z_3 + pZ_1] = (1-r)Z_1 + rZ_2$$
$$(1-t)[(1-m)Z_5 + mZ_6] + t[(1-q)Z_6 + qZ_4] = (1-s)Z_4 + sZ_5$$

Since the points Z_1, Z_2, Z_3 are not collinear we can equate the coefficients in the first line here, and obtain that

$$pt = 1 - r, \quad (1-t)(1-l) = r, \quad (1-t)l + t(1-p) = 0$$

and since the points Z_4, Z_5, Z_6 are not collinear we can equate the coefficients in the second line, and obtain that

$$qt = 1 - s, \quad (1-t)(1-m) = s, \quad (1-t)m + t(1-q) = 0$$

Now for Z_2Z_5 and Z_3Z_6 to meet Z_1Z_4 in the same point, we need to have

$$\frac{1-r}{s-r} = -\frac{p}{q-p}$$

and from this

$$\frac{1-r}{p} = \frac{s-r}{q-p}$$

But we have from above

$$\frac{1-r}{p} = \frac{1-s}{q}$$

as a common value of t, and so need

$$\frac{1-s}{q} = -\frac{s-r}{q-p}$$

or equivalently $q(1-r) = p(1-s)$, and we have already noted that this is so.

It follows that Z_1Z_4, Z_2Z_5 and Z_3Z_6 are concurrent.

5.4 Pappus' theorem, c.300A.D.

Let the points Z_1, Z_2, Z_3 lie on one line, and the points Z_4, Z_5, Z_6 lie on a second line, these two lines intersecting at some point Z_0. Suppose that Z_2Z_6 and Z_5Z_3 meet at W_1, Z_3Z_4 and Z_6Z_1 meet at W_2, and Z_1Z_5 and Z_4Z_2 meet at W_3. Then the points W_1, W_2, W_3 are collinear.

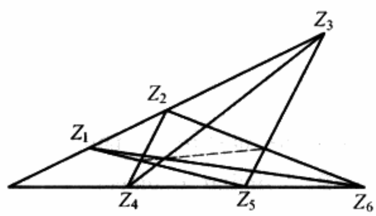


Figure 9

Proof. We have that

$$Z_2 = (1-p)Z_0 + pZ_1, \quad Z_3 = (1-q)Z_0 + qZ_1$$
$$Z_5 = (1-u)Z_0 + uZ_4, \quad Z_6 = (1-v)Z_0 + vZ_4$$

for some p, q, u, $v \in \mathbf{R}$. On eliminating Z_0 from the equations for Z_2 and Z_5, we find that

$$(1-u)Z_2-(1-p)Z_5=p(1-u)Z_1-u(1-p)Z_4$$

and so

$$\frac{1-u}{1-pu}Z_2+\frac{u(1-p)}{1-pu}Z_4=\frac{p(1-u)}{1-pu}Z_1+\frac{1-p}{1-pu}Z_5$$

This must be the point W_3 then. Similarly, on eliminating Z_0 from the equations for Z_3 and Z_6 we have that

$$(1-v)Z_3-(1-q)Z_6=q(1-v)Z_1-(1-q)vZ_4$$

and so

$$\frac{1-v}{1-qv}Z_3+\frac{(1-q)v}{1-qv}Z_4=\frac{q(1-v)}{1-qv}Z_1+\frac{1-q}{1-qv}Z_6$$

This must be the point W_2 then.

Now from the equations for Z_2 and Z_3 we have that $pZ_3-qZ_2=(p-q)Z_0$, and from the equations for Z_5 and Z_6 we have that $uZ_6-vZ_5=(u-v)Z_0$. On combining these, we have that

$$(v-u)(pZ_3-qZ_2)=(q-p)(uZ_6-vZ_5)$$

From this we have that

$$\frac{u(q-p)}{qv-pu}Z_6+\frac{q(v-u)}{qv-pu}Z_2=\frac{p(v-u)}{qv-pu}Z_3+\frac{(q-p)v}{qv-pu}Z_5$$

This must then be the point W_1.

However, the left-hand sides of the representations for W_1, W_2 and W_3 contain four points Z_1, Z_2, Z_5, Z_6 and we wish to reduce this to three non-collinear points. For this purpose we eliminate Z_5. From the equations for Z_5 and Z_6 we have that $uZ_6-vZ_5=(u-v)Z_0$, while from the equation for Z_2 we have $Z_2-pZ_1=(1-p)Z_0$. Combining these gives

$$Z_5=\frac{u}{v}Z_6-\frac{u-v}{v(1-p)}(Z_2-pZ_1)$$

On substitution, this gives that

$$W_3=\frac{pu(1-v)}{v(1-pu)}Z_1+\frac{v-u}{v(1-pu)}Z_2+\frac{u(1-p)}{v(1-pu)}Z_6$$

We note that the sum of the coefficients for each of W_1, W_2, W_3 in terms of Z_1, Z_2 and Z_6 is equal to 1, and we have that $\delta_F(W_1, W_2, W_3)$ is equal to

$$\delta_F\left(\frac{q(v-u)}{qv-pu}Z_2+\frac{u(q-p)}{qv-pu}Z_6,\ \frac{q(1-v)}{1-qv}Z_1+\frac{1-q}{1-qv}Z_6,\ \frac{pu(1-v)}{v(1-pu)}Z_1+\frac{v-u}{v(1-pu)}Z_2+\frac{u(1-p)}{v(1-pu)}Z_6\right)=$$

$$\frac{q(v-u)}{qv-pu}\,\frac{q(1-v)}{1-qv}\,\frac{u(1-p)}{v(1-pu)}\delta_F(Z_2,\ Z_1,\ Z_6)+\frac{q(v-u)}{qv-pu}\,\frac{1-q}{1-qv}\,\frac{pu(1-v)}{v(1-pu)}\delta_F(Z_2,\ Z_6,\ Z_1)+$$

$$\frac{u(q-p)}{qv-pu}\,\frac{q(1-v)}{1-qv}\,\frac{v-u}{v(1-pu)}\delta_F(Z_6,\ Z_1,\ Z_2)=$$

$$\frac{qu(1-v)(v-u)}{v(qv-pu)(1-qv)(1-pu)}[-q(1-p)+p(1-q)+q-p]\delta_F(Z_1,\ Z_2,\ Z_6)=0$$

This shows that W_1, W_2 and W_3 are collinear.

This is known as PAPPUS' THEOREM.

5.5 Centroid of a triangle

If Z_4, Z_5, Z_6 are the mid-points of $\{Z_2, Z_3\}$, $\{Z_3, Z_1\}$, $\{Z_1, Z_2\}$, respectively, then with the notation before we have that $r = s = t = \frac{1}{2}$, and the condition (5.1) in the converse of Ceva's theorem holds. Note that $[Z_3, Z_6]$ is a cross-bar for the interior region IR($\mid \underline{Z_3 Z_2 Z_1}$) and so $[Z_2, Z_5]$ meets $[Z_3, Z_6]$ in a point Z_0, which is thus on both Z_2Z_5 and Z_3Z_8. It follows that it is also on Z_1Z_4. Thus the lines joining the vertices of a triangle to the mid-points of the opposite sides are concurrent. The point of concurrence Z_0 is called the centroid of the triangle, and we have

$$Z_0 = \frac{1}{3}Z_1 + \frac{1}{3}Z_2 + \frac{1}{3}Z_3$$

5.6 Orthocentre of a triangle

Let Z_4, Z_5, Z_6 be the feet of the perpendiculars from Z_1 to Z_2Z_3, Z_2 to Z_3Z_1, Z_3 to Z_1Z_2, respectively. Then we have that

$$r = \frac{c}{a}\cos\beta, \quad s = \frac{a}{b}\cos\gamma, \quad t = \frac{b}{c}\cos\alpha$$

Hence

$$1 - r = \frac{a - c\cos\beta}{a} = \frac{c\cos\beta + b\cos\gamma - c\cos\beta}{a} = \frac{b}{a}\cos\gamma$$

Similarly

$$1 - s = \frac{c}{b}\cos\alpha, \quad 1 - t = \frac{b}{a}\cos\gamma$$

Suppose now that m and n are any lines which are perpendicular to Z_3Z_1 and Z_1Z_2, respectively. If we had $m \parallel n$, then we would have $m \perp Z_3Z_1$, $n \parallel m$ so that $n \perp Z_3Z_1$; but already $n \perp Z_1Z_2$ so $Z_3Z_1 \parallel Z_1Z_2$; as Z_1, Z_2, Z_3 are not collinear, this gives a contradiction.

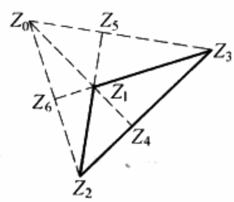


Figure 10

Thus m is not parallel to n and so these lines meet in a unique point Z_0. In particular the lines Z_2Z_5, Z_3Z_6 must meet in a unique point Z_0 and then by the converse of Ceva's theorem, Z_1Z_4 will pass through Z_0. Thus the lines through the vertices of a triangle which are perpendicular to the opposite side-lines are concurrent. The point of concurrence Zo is called the orthocentre of the triangle.

We thus have

$$Z_0 = \frac{\frac{a}{b}\cos\gamma\,\frac{a}{c}\cos\beta}{\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{a}{c}\cos\gamma\cos\alpha}Z_1 + \frac{\frac{a}{c}\cos\gamma\cos\alpha}{\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{a}{c}\cos\gamma\cos\alpha}Z_2 +$$

$$\frac{\frac{a}{b}\cos\alpha\cos\beta}{\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{a}{c}\cos\gamma\cos\alpha}Z_3 = \frac{a}{b}\,\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}Z_1 +$$

$$\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}Z_2 + \frac{c}{b}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}Z_2$$

We could also proceed in this special case as follows. The argument is laid out for the case in the diagram, with β and γ acute angles and (Z_1, Z_2, Z_3) positive in orientation. The other cases can be treated similarly.

Now applied to $[Z_6, Z_2, Z_3]$, $|\angle Z_0Z_2Z_4|° = |\angle Z_6Z_2Z_3|° = 90 - |\gamma|°$ so that

$$\frac{|Z_0, Z_4|}{|Z_2, Z_4|} = \tan\angle Z_0Z_2Z_4 = \cot\gamma$$

But $|Z_2, Z_4| = c\cos\beta$ and so $|Z_0, Z_4| = c\cos\beta\cot\gamma$. Thus $\delta_F(Z_0, Z_2, Z_3) = \frac{1}{2}ac\cos\beta\cot\gamma$ and since $\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, we have that

$$\frac{\delta_F(Z_0, Z_2, Z_3)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)} = \cot\beta\cot\gamma$$

As similar results hold in the other two cases, we have that

$$Z_0 = \cot\beta\cot\gamma Z_1 + \cot\gamma\cot\alpha Z_2 + \cot\alpha\cot\beta Z_3$$

That the sum of the coefficients is equal to 1 follows from the identity

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

for the angles of a triangle. For, using the notation $|\alpha|° + |\beta|° + |\gamma|° = 180$, and so $\alpha_F + \beta_F + \gamma_F = 180_F$ so that

$$-\tan\gamma_F = \tan(180_F - \gamma_F) = \tan(\alpha_F + \beta_F) = \frac{\tan\alpha_F + \tan\beta_F}{1 - \tan\alpha_F\tan\beta_F}$$

whence the result follows by multiplying across and rearranging. This formula fails in the case of a right-angled triangle.

From our two methods we have two formulae for Z_0, but we further note that

$$\cos(\alpha_F + \gamma_F) = \cos(180_F - \beta_F)$$

$$\cos\alpha_F\cos\gamma_F - \sin\alpha_F\sin\gamma_F = -\cos\beta_F$$

$$\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma$$

On using this with the sine rule, the two formulae for the orthocentre are reconciled.

5.7 Incentre of a triangle

Let Z_1, Z_2, Z_3 be non-collinear points. The mid-line of $|\underline{Z_2Z_1Z_3}$ will meet $[Z_2, Z_3]$ in

a point Z_4 where $Z_4 = (1 - r)Z_2 + rZ_3$, and

$$\frac{r}{1-r} = \frac{c}{b}$$

By similar arguments the mid-line of $|\underline{Z_3Z_2Z_1}$ will meet $[Z_3, Z_1]$ in a point Z_5 where $Z_5 = (1 - s)Z_3 + sZ_1$, and

$$\frac{s}{1-s} = \frac{a}{c}$$

and the mid-line of $|\underline{Z_1Z_3Z_2}$ will meet $[Z_1, Z_2]$ in a point Z_6 where $Z_6 = (1 - t)Z_1 + tZ_2$, and

$$\frac{t}{1-t} = \frac{b}{a}$$

The product of these three ratios is clearly equal to 1. By the cross-bar theorem, $[Z_2, Z_5$ will meet $[Z_3, Z_6]$ in a point Z_0 and so Z_2Z_5, Z_3Z_6 meet in Z_0. It follows that Z_1Z_4 also passes through the point Z_0.

Thus the mid-lines of the angle-supports $|\underline{Z_2Z_1Z_3}$, $|\underline{Z_3Z_2Z_1}$, $|\underline{Z_1Z_3Z_2}$ for a triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$ are concurrent. The perpendicular distances from this point Z_0 to the side-lines of the triangle are equal, so the circle with Z_0 as centre and length of radius these common perpendicular distances will pass through the feet of these perpendiculars.

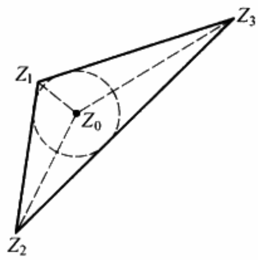


Figure 11

This circle is called the incircle for the triangle; its centre Z_0 is called the incentre of the triangle. The three side-lines are tangents to the circle with the points of contact being the feet of the perpendiculars. For the incentre, we have the formula

$$Z_0 = \frac{a}{a+b+c}Z_1 + \frac{b}{a+b+c}Z_2 + \frac{c}{a+b+c}Z_3$$

6 MOBILE COORDINATES

In standard vector notation, the vector product or cross product takes us out of the plane Π and into solid geometry. Sensed-area gives us half of the magnitude of the vector product and we use that instead. Without the vector product, however, we have not got orientation of the plane Π by vector means. We go on to supply this lack.

However the standard vector operations can be awkward in dealing with perpen-dicularity and distance, and can involve quite a bit of trigonometry, so we also set out a method of reducing unwieldy calculations.

6.1 Grassmann's supplement of a vector

Given any $Z \neq O$, we show that there is a unique W such that

$$|O, W| = |O, Z|, \ OW \perp OZ, \ \delta_F(O, Z, W) > 0$$

Proof. With $Z \equiv (x, y)$, $W \equiv (u, v)$ these require

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \quad ux + vy = 0, \quad xv - yu > 0$$

By the middle one of these

$$\begin{vmatrix} x & y \\ -v & u \end{vmatrix} = 0$$

so the rows of this are linearly dependent. Thus we have $r(x, y) + s(-v, u) = (0, 0)$, for some $(r, s) \neq (0, 0)$. We cannot have $r = 0$ as that would imply $W = O$ and so $Z = O$. Then

$$x = \frac{s}{r}v, \quad y = -\frac{s}{r}u$$

so by the first property above

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{r^2}(x^2 + y^2)$$

Thus we have either $s/r = 1$, so that $u = -y$, $v = x$, for which $2\delta_F(O, Z, W) = x^2 + y^2 > 0$, or we have $s/r = -1$, so that $u = y$, $v = -x$, for which $2\delta_F(O, Z, W) = -(x^2 + y^2) < 0$. Thus the unique solution is $u = -y$, $v = x$.

For any $Z \in \Pi$, we define $\overrightarrow{OZ}^{\perp} = \overrightarrow{OW}$ where $Z \equiv (x, y)$, $W \equiv (-y, x)$, and call this the Grassmann supplement of $\overrightarrow{OZ}$. This clearly has the properties

$$(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2})^{\perp} = \overrightarrow{OZ_1}^{\perp} + \overrightarrow{OZ_2}^{\perp}$$

$$(k\overrightarrow{OZ})^{\perp} = k(\overrightarrow{OZ})^{\perp}$$

$$(\overrightarrow{OZ})^{\perp} = -\overrightarrow{OZ}$$

6.2

In F we take $|O, I| = |O, J| = 1$. If $|O, Z| = 1$ and θ is the angle in A_F with support $|\underline{IOZ}$, then we recall that $Z \equiv (x, y)$ where $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. As $I \equiv (1, 0)$, $J \equiv (0, 1)$, we note that

$$\overrightarrow{OI}^{\perp} = \overrightarrow{OJ}, \quad \overrightarrow{OZ} = \cos\theta\,\overrightarrow{OI} + \sin\theta\,\overrightarrow{OJ}, \quad \overrightarrow{OZ}^{\perp} = -\sin\theta\,\overrightarrow{OI} + \cos\theta\,\overrightarrow{OJ}$$

Suppose that we also have $\overrightarrow{OW} = \cos\phi\overrightarrow{OI} + \sin\phi\overrightarrow{OJ}$. Then we have $\overrightarrow{OW} = r\overrightarrow{OZ} + s\overrightarrow{OZ}^{\perp}$ where

$$r = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta, \quad s = \sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta$$

By the addition formulae we recognise that $r = \cos\angle_F ZOW$, $s = \sin\angle_F ZOW$.

6.3 Handling a triangle

Although for a triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$, we have the vector form for the centroid as $\frac{1}{3}(Z_1+Z_2+Z_3)$, and for the incentre as

$$\frac{a}{a+b+c}Z_1+\frac{b}{a+b+c}Z_2+\frac{c}{a+b+c}Z_3$$

where as usual $a=|Z_2, Z_3|$, $b=|Z_3, Z_1|$, $c=|Z_1, Z_2|$, neither this formula for the incentre, nor the more awkward formula for the orthocentre, are convenient for applications and generalisation. we noted that a unique circle passes through the vertices of a triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$. It is called the circumcircle of this triangle and its centre is called the circumcentre. It is possible to find an expression for the circumcentre in terms of the vertices but it is tedious to cover all the cases. For these reasons we consider the following way of representing any triangle.

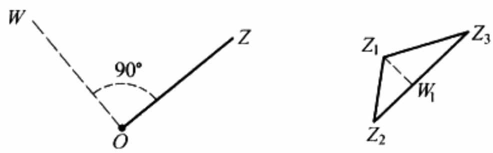


Figure 12

Given non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, we can express

$$\overrightarrow{OZ_1}=\overrightarrow{OZ_2}+p_1(\overrightarrow{OZ_3}-\overrightarrow{OZ_2})+q_1(\overrightarrow{OZ_3}-\overrightarrow{OZ_2})^{\perp}$$

for unique non-zero p_1 and q_1. We could work exclusively with material in this form but the manipulations are simpler if we use complex coordinates as well. Then

$$x_1-x_2=p_1(x_3-x_2)-q_1(y_3-y_2),\quad y_1-y_2=p_1(y_3-y_2)+q_1(x_3-x_2)$$

so with $Z_1\sim z_1$, $Z_2\sim z_2$, $Z_3\sim z_3$ *we have* $z_1-z_2=(p_1+q_1\mathrm{i})(z_3-z_2)$. We coin the name mobile coordinates of the point Z_1 with respect to (Z_2, Z_3) and F, for the pair (p_1, q_1).

It follows immediately that $|Z_1, Z_2|=\sqrt{p_1^2+q_1^2}\,|Z_2, Z_3|$, and as $z_1-z_3=(p_1-1+q_1\mathrm{i})(z_3-z_2)$ we also have $|Z_3, Z_1|=\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\,|Z_2, Z_3|$. From

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{p_1-1+q_1\mathrm{i}}{p_1+q_1\mathrm{i}},\quad \frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=p_1+q_1\mathrm{i},\quad \frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\frac{1}{1-p_1+q_1\mathrm{i}}$$

with $\alpha=\angle_F Z_2Z_1Z_3$, $\beta=\angle_F Z_3Z_2Z_1$, $\gamma=\angle_F Z_1Z_3Z_2$, we have that

$$\operatorname{cis}\alpha=\frac{(p_1-1+q_1\mathrm{i})(p_1-q_1\mathrm{i})}{\sqrt{p_1^2+q_1^2}\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}},\quad \operatorname{cis}\beta=\frac{p_1+q_1\mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2}},\quad \operatorname{cis}\gamma=\frac{1-p_1+q_1\mathrm{i}}{\sqrt{(1-p_1)^2+q_1^2}}.$$

We also have that

$$p_1+\mathrm{i}q_1=\sqrt{p_1^2+q_1^2}\operatorname{cis}\beta=\frac{c}{a}\operatorname{cis}\beta$$

$$1 - p_1 - iq_1 = \sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}\text{cis } \gamma = \frac{b}{a}\text{cis } \gamma$$

$$p_1(p_1 - 1) + q_1^2 + iq_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}\text{cis } \alpha = \frac{bc}{a^2}\text{cis } \alpha. \qquad ④$$

Thus we have in terms of p_1 and q_1, the ratios of the lengths of the sides and cosines and sines of the angles. Moreover, it is easily calculated that

$$\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{q_1}{2} | Z_2, Z_3 |^2$$

so the orientation of this triple is determined by the sign of q_1.

Note too that if

$$z - z_2 = (p + qi)(z_3 - z_2), \quad z' - z_2 = (p' + q'i)(z_3 - z_2)$$

then

$$| z' - z | = | p' - p + (q' - q)i || z_3 - z_2 |$$

and so

$$| Z, Z' | = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2} | Z_2, Z_3 | = a\sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2} \qquad ⑤$$

6.4 Circumcentre of a triangle

Looking first for the circumcentre, we note that points Z on the perpendicular bisector of $[Z_2, Z_3]$ have complex coordinates of the form $z = z_2 + (\frac{1}{2} + qi)(z_3 - z_2)$, where $q \in \mathbf{R}$. But $z_1 - z_2 = (p_1 + q_1 i)(z_3 - z_2)$ and so

$$z = z_2 + \frac{\frac{1}{2} + qi}{p_1 + q_1 i}(z_1 - z_2)$$

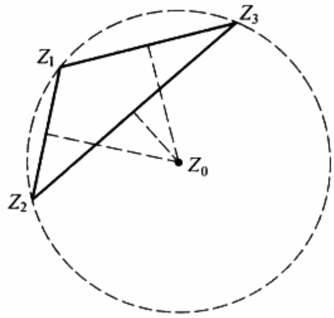


Figure 13

From this we have that

$$z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \left(\frac{\frac{1}{2} + qi}{p_1 + q_1 i} - \frac{1}{2}\right)(z_1 - z_2)$$

To have $Z_3Z \perp Z_1Z_2$ also we need the coefficient of $z_1 - z_2$ in this to be purely imaginary. The coefficient is equal to

$$\frac{\frac{1}{2}p_1 + qq_1 + (qp_1 - \frac{1}{2}q_1)i}{p_1^2 + q_1^2} - \frac{1}{2}$$

and so we need

$$\frac{1}{2}p_1 + qq_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2), \quad \text{i.e.} \quad q = \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{2q_1}$$

Thus the circumcentre has complex coordinate

$$z_0 = z_2 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right](z_3 - z_2)$$

From this we have that

$$z_0 - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right](z_3 - z_2) =$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2q_1}(p_1 - q_1\mathrm{i})(p_1 - 1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2)$$

and from this can conclude that the length of radius of the circumcircle is

$$\frac{a}{2\mid q_1\mid}\sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}$$

In fact we can deduce from this material a formula for the circumcentre in terms of areal coordinates. For

$$p_1^2 - p_1 + q_1^2 = \frac{bc}{a^2}\cos\alpha, \quad q_1 = \frac{bc}{a_2}\sin\alpha$$

so that $z = z_2 + \frac{1}{2}(1 + \cot\alpha\mathrm{i})(z_3 - z_2)$. Then we have

$$x - x_2 = \frac{1}{2}(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}\cot\alpha(y_3 - y_2), \quad y - y_2 = \frac{1}{2}\cot\alpha(x_3 - x_2) + \frac{1}{2}(y_3 - y_2)$$

From this we have that

$$\delta_F(Z, Z_2, Z_3) = \delta_F(Z - Z_2, O, Z_3 - Z_2) =$$

$$\frac{1}{4}\cot\alpha[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] = \frac{1}{4}\cot\alpha a^2$$

As $\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{1}{2}q_1a^2 = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ we have

$$\frac{\delta_F(Z, Z_2, Z_3)}{\delta_F(Z_1, Z_2, Z_3)} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2\cot\alpha}{bc\sin\alpha}$$

and by use of the sine rule this is seen to be equal to

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

By cyclic rotation we can write down the other two coefficients and so have

$$Z = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}Z_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}Z_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}Z_3$$

That the sum of the coefficients here is equal to 1 follows from the identity

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

for the angles of a triangle. For

$$\sin 2\alpha_F + \sin 2\beta_F + \sin 2\gamma_F = 2\sin(\alpha_F + \beta_F)\cos(\alpha_F - \beta_F) + 2\sin\gamma_F\cos\gamma_F =$$

$$2\sin\gamma_F[\cos(\alpha_F - \beta_F) + \cos\gamma_F)] =$$

$$2\sin\gamma_F[\cos(\alpha_F - \beta_F) - \cos(\alpha_F + \beta_F)] =$$

$$2\sin\gamma_F.2\sin\alpha_F\sin\beta_F$$

6.5 Other distinguished points for a triangle

For the centroid Z_0 of $[Z_1, Z_2, Z_3]$ we have that $z_0 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ and so

$$z_0 - z_2 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) - z_2 = \frac{1}{3}(z_1 - z_2) + \frac{1}{3}(z_3 - z_2) =$$

$$\frac{1}{3}(p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2) + \frac{1}{3}(z_3 - z_2) = \frac{1}{3}(p_1 + 1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2)$$

This gives the complex coordinate of the centnoid.

We next turn to the orthocentre of this triangle. Points Z on the line through Z_1 perpendicular to Z_2Z_3 have complex coordinates of the form

$$z = z_2 + (p_1 + q\mathrm{i})(z_3 - z_2) = z_3 + (p_1 - 1 + q\mathrm{i})(z_3 - z_2) =$$

$$z_3 + \frac{p_1 - 1 + q\mathrm{i}}{p_1 + q_1 \mathrm{i}}(z_1 - z_2)$$

For Z_Z to be also perpendicular to Z_1Z_2 we also need the coefficient of $z_1 - z_2$ here to be purely imaginary. Thus we need

$$(p_1 - 1)p_1 + qq_1 = 0, \quad \text{i.e.} \quad q = -\frac{(p_1 - 1)p_1}{q_1}$$

and so obtain

$$z_2 + p_1\left(1 - \frac{p_1 - 1}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_3 - z_2)$$

as the complex coordinate of the orthocentre.

It takes more of an effort to deal with the incentre. The mid-point of the points with complex coordinates

$$z_2 + \frac{1}{|Z_2, Z_3|}(z_3 - z_2), \quad z_2 + \frac{1}{|Z_2, Z_1|}(z_1 - z_2)$$

has complex coordinate

$$z_2 + \frac{1}{2|Z_2, Z_3|}\left(z_3 - z_2 + \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}(z_1 - z_2)\right) =$$

$$z_2 + \frac{1}{2|Z_2, Z_3|}\left(z_3 - z_2 + \frac{p_1 + q_1 \mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}(z_3 - z_2)\right) =$$

$$z_2 + \frac{1}{2|Z_2, Z_3|}\left(1 + \frac{p_1 + q_1 \mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right)(z_3 - z_2)$$

Points on the midline of $| \underline{Z_1Z_2Z_3}$ then have complex coordinates of the form

$$z_2 + \frac{r}{2|Z_2, Z_3|}\left(1 + \frac{p_1 + q_1 \mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right)(z_3 - z_2)$$

By a similar argument, points on the midline of $| \underline{Z_2Z_3Z_1}$ have complex coordinates of the

form

$$z_3 + \frac{s}{2\,|\,Z_2,\ Z_3\,|}\left(\frac{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}}{\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}\right)(z_3 - z_2) =$$

$$z_2 + \left[1 + \frac{s}{2\,|\,Z_2,\ Z_3\,|}\left(\frac{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}}{\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}\right)\right](z_3 - z_2)$$

For a point of intersection we need

$$\frac{r}{2\,|\,Z_2,\ Z_3\,|}\left(1 + \frac{p_1 + q_1\mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right) = 1 + \frac{s}{2\,|\,Z_2,\ Z_3\,|}\left(\frac{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}}{\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}\right)$$

On solving for r and s, we obtain for the incentre the complex coordinate

$$z_2 + \frac{p_1 + q_1\mathrm{i} + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}}{1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2} + \sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}(z_3 - z_2)$$

6.6 Euler line of a triangle

With the notation Z_7, Z_8, Z_9 for the centroid, circumcentre and orthocentre, respectively, of a triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$ we have the formulae

$$z_7 - z_2 = \frac{1}{3}(p_1 + 1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2)$$

$$z_8 - z_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\right)(z_3 - z_2)$$

$$z_9 - z_2 = p_1\left(1 - \frac{p_1 - 1}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_3 - z_2)$$

It is straightforward to check that

$$\frac{2}{3}z_8 + \frac{1}{3}z_9 = z_2 + \frac{2}{3}(z_8 - z_2) + \frac{1}{3}(z_9 - z_2) = z_7$$

and so $Z_7 \in Z_8Z_9$.

Thus we have shown that the centroid, circumcentre and orthocentre of any triangle are collinear. This is a result due to Euler, after whom this line of collinearity is named the Euler line of the triangle.

6.7 Similar triangles

For any two triangles $[Z_1, Z_2, Z_3]$ and $[Z_4, Z_5, Z_6]$ we have

$$\overrightarrow{OZ_1} = \overrightarrow{OZ_2} + p_1(\overrightarrow{OZ_3} - \overrightarrow{OZ_2}) + q_1(\overrightarrow{OZ_3} - \overrightarrow{OZ_2})^{\perp}$$

$$\overrightarrow{OZ_4} = \overrightarrow{OZ_5} + p_4(\overrightarrow{OZ_6} - \overrightarrow{OZ_5}) + q_4(\overrightarrow{OZ_6} - \overrightarrow{OZ_5})^{\perp}$$

or equivalently $z_1 = z_2 + (p_1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2)$, $z_4 = z_5 + (p_4 + q_4\mathrm{i})(z_6 - z_5)$, where p_1, q_1, p_4, q_4 are non-zero real numbers. Then these triangles are similar in the corre-spondence $(Z_1, Z_2, Z_3) \rightarrow (Z_4, Z_5, Z_6)$ if and only if $p_4 = p_1$, $q_4 = \pm q_1$.

Proof. First suppose that $p_4 = p_1$, $q_4 = q_1$ so that $z_1 = z_2 + (p_1 + q_1 i)(z_3 - z_2)$, $z_4 = z_5 + (p_1 + q_1 i)(z_6 - z_5)$. Then we have that

$$|\angle_F Z_3Z_2Z_1|^\circ = |\angle_F Z_6Z_5Z_4|^\circ, \quad |\angle_F Z_1Z_3Z_2|^\circ = |\angle_F Z_4Z_6Z_5|^\circ$$

It follows that the measures of the corresponding angles of these triangles are equal, and so the triangles are similar, with the lengths of corresponding sides pro-portional. Moreover, the triples (Z_1, Z_2, Z_3) and (Z_4, Z_5, Z_6) are similarly oriented.

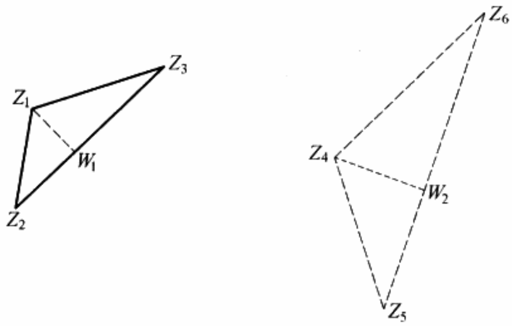


Figure 14

Next suppose that $z_1 = z_2 + (p_1 + q_1 i)(z_3 - z_2)$, $z_4 = z_5 + (p_1 - q_1 i)(z_6 - z_5)$. By an analogous argument the triangles are still similar, and now the triples (Z_1, Z_2, Z_3) and (Z_4, Z_5, Z_6) are oppositely oriented.

Conversely, suppose that $[Z_1, Z_2, Z_3]$ and $[Z_4, Z_5, Z_6]$ are similar triangles in the correspondence $(Z_1, Z_2, Z_3) \to (Z_4, Z_5, Z_6)$. Let W_1 be the foot of the perpendicular from Z_1 to Z_2Z_3, and from parametric equations of Z_2Z_3 choose $p_1 \in \mathbf{R}$ so that $w_1 = z_2 + p_1(z_3 - z_2)$. Then

$$\frac{|Z_2, W_1|}{|Z_2, Z_3|} = |p_1|$$

and p_1 is positive or negative according or not as W_1 is on the same or opposite side of Z_2 as Z_3 is on the line Z_2Z_3, that is according as the wedge-angle $\angle Z_3Z_2Z_1$ is acute or obtuse. As $W_1Z_1 \perp Z_2Z_3$ we can find $q_1 \in \mathbf{R}$ so that $z_1 - w_1 = q_1 i(z_3 - z_2)$. Then

$$\frac{|Z_1, W_1|}{|Z_2, Z_3|} = |q_1|$$

and q_1 is positive or negative according as (Z_1, Z_2, Z_3) is positively or negatively oriented.

As the lengths of the sides of the two triangles are proportional, we have

$$|Z_5, Z_6| = k|Z_2, Z_3|, \quad |Z_6, Z_4| = k|Z_3, Z_1|, \quad |Z_4, Z_5| = k|Z_1, Z_2|$$

for some $k > 0$. Let W_2 be the foot of the perpendicular from Z_4 to the line Z_5Z_6. Then the triangles $[Z_1, Z_2, W_1]$ and $[Z_4, Z_5, W_2]$ are similar, so we have that

$$\frac{|Z_5, W_2|}{|Z_2, W_1|} = \frac{|Z_4, Z_5|}{|Z_1, Z_2|} = k$$

It follows that

$$|Z_5, W_2| = k|Z_2, W_1| = k|p_1||Z_2, Z_3| = |p_1||Z_5, Z_6|$$

But W_2 is on the same side of the point Z_5 on the line Z_5Z_6 as Z_6 is if the wedge-angle $\angle Z_6Z_5Z_4$ is acute, and on the opposite side if this angle is obtuse. Hence we have that $w_2 - z_5 = p_1(z_6 - z_5)$.

As $Z_4W_2 \perp Z_5Z_6$, we have $z_4 - w_2 = ji(z_6 - z_5)$ for some $j \in \mathbf{R}$, and then $|Z_4, W_2| = |j||Z_5, Z_6|$. But

$$\frac{|Z_4, W_2|}{|Z_1, W_1|} = \frac{|Z_4, Z_5|}{|Z_1, Z_2|} = \frac{|Z_5, Z_6|}{|Z_2, Z_3|}$$

so

$$\frac{|Z_4, W_2|}{|Z_5, Z_6|} = \frac{|Z_1, W_1|}{|Z_2, Z_3|} = |q_1|$$

Hence $j = \pm q_1$ and we are to take the plus if (Z_1, Z_2, Z_3) and (Z_4, Z_5, Z_6) have the same orientation, the minus if the opposite orientation.

Thus our mobile coordinates (p_1, q_1) are intimately connected with similarity of triangle.

6.8 Similar triangles erected on the sides of a triangle

Given an arbitrary triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$, if we consider points Z_4, Z_5 and Z_6 defined by

$$z_4 = z_2 + (p_1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2)$$
$$z_5 = z_3 + (p_1 + q_1\mathrm{i})(z_1 - z_3)$$
$$z_6 = z_1 + (p_1 + q_1\mathrm{i})(z_2 - z_1)$$

for some non-zero real numbers p_1 and q_1, then we have triangles erected on the sides $[Z_2, Z_3]$, $[Z_3, Z_1]$ and $[Z_1, Z_2]$, respectively, which are similar to each other and have the same orientation as each other. By addition we note that $\frac{1}{3}(z_4 + z_5 + z_6) = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$, and so the triangle $[Z_4, Z_5, Z_6]$ has the same centroid as the original triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$.

Further, if we let Z_7, Z_8, Z_9 be the centroids of the triangles $[Z_2, Z_3, Z_4]$, $[Z_3, Z_1, Z_5]$ and $[Z_1, Z_2, Z_6]$, respectively, we have that $z_7 = \frac{1}{3}(z_2 + z_3 + z_4)$, $z_8 = \frac{1}{3}(z_3 + z_1 + Z_5)$, $z_9 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_6)$; it follows that the centroid of $[Z_7, Z_8, Z_9]$ is also the centroid of the original triangle.

6.9 Circumcentres of similar triangles on sides of triangle

In a more complicated fashion than in the last subsection, for an arbitrary triangle

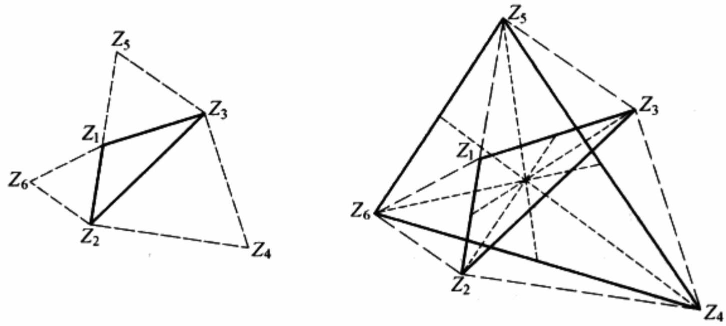


Figure 15

$[Z_1, Z_2, Z_3]$ suppose that we take points Z_4, Z_5 and Z_6 so that

$$z_4 = z_2 + (p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2)$$
$$z_3 = z_1 + (p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_5 - z_1)$$
$$z_2 = z_6 + (p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_1 - z_6)$$

so that we have similar triangles once again on the sides of the original triangle but now in the correspondences $(Z_2, Z_3, Z_4) \rightarrow (Z_1, Z_5, Z_3) \rightarrow (Z_8, Z_1, Z_2)$. We let Z_7, Z_8, Z_9 be the circumcentres of these three similar triangles, so that we have

$$z_7 - z_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_3 - z_2)$$
$$z_8 - z_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_5 - z_1)$$
$$z_9 - z_6 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_1 - z_6)$$

But

$$z_5 - z_1 = \frac{1}{p_1 + q_1 \mathrm{i}}(z_3 - z_1)$$

while $z_2 - z_1 = (1 - p_1 - q_1 \mathrm{i})(z_6 - z_1)$, so that

$$z_6 - z_1 = \frac{1}{1 - p_1 - q_1 \mathrm{i}}(z_2 - z_1)$$

Also

$$z_9 - z_1 = z_6 - z_1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_6 - z_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{2q_1}\mathrm{i}\right)(z_6 - z_1)$$

On combining these we have

$$z_8 - z_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{q_1}\mathrm{i}\right)\frac{1}{p_1 + q_1 \mathrm{i}}(z_3 - z_1)$$
$$z_9 - z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{p_1^2 - p_1 + q_1^2}{2q_1}\mathrm{i}\right)\frac{1}{1 - p_1 - q_1 \mathrm{i}}(z_2 - z_1)$$

Then

$$z_9+(p_1+q_1\mathrm{i})(z_8-z_9)=(1-p_1-q_1\mathrm{i})(z_9-z_1)+(p_1+q_1\mathrm{i})(z_8-z_1)+z_1=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{p_1^2-p_1+q_1^2}{2q_1}\mathrm{i}\right)(z_2-z_1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{p_1^2-p_1+q_1^2}{2q_1}\mathrm{i}\right)(z_3-z_1)+z_1=$$

$$\frac{1}{2}(z_2+z_3)+\frac{p_1^2-p_1+q_1^2}{2q_1}\mathrm{i}(z_3-z_2)=z_7$$

It follows that the triangle $[Z_7, Z_8, Z_9]$ is also similar to the similar triangles above, in the correspondence $(Z_2, Z_3, Z_4)\rightarrow(Z_9, Z_8, Z_7)$.

In the particular case when $p_1=1/2$, $q_1=\sqrt{3}/2$, the similar triangles are all equilateral triangles, that is all three sides have equal lengths. In this case the last result is known as NAPOLEON'S THEOREM. It is easier to prove than the more general case, as for it we can work just with centroids.

6.10 The nine-point circle

Given the notation before, let $Z_4=\mathrm{mp}(Z_2, Z_3)$, $Z_5=\mathrm{mp}(Z_3, Z_1)$ and $Z_6=\mathrm{mp}(Z_1, Z_2)$. We first seek the circumcircle of the triangle $[Z_4, Z_5, Z_6]$ with vertices these mid-points of the sides of the original triangle.

Now

$$z_4=\frac{1}{2}(z_2+z_3)=z_2+\frac{1}{2}(z_3-z_2)$$

$$z_5=\frac{1}{2}(z_3+z_1)=z_2+\frac{1}{2}(p_1+1+q_1\mathrm{i})(z_3-z_2)$$

$$z_6=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=z_2+\frac{1}{2}(p_1+q_1\mathrm{i})(z_3-z_2)$$

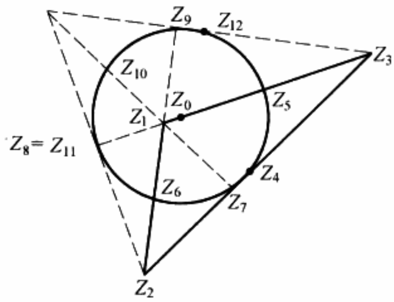


Figure 16 Nine-point circle

Then

$$z_6-z_5=-\frac{1}{2}(z_3-z_2)$$

so that

$$z_4-z_5=-\frac{1}{2}(p_1+q_1\mathrm{i})(z_3-z_2)=(p_1+q_1\mathrm{i})(z_6-z_5)$$

It follows that the circumcentre of $[Z_4, Z_5, Z_6]$ has complex coordinate

$$z_5+\frac{\mathrm{i}}{2q_1}(p_1+q_1\mathrm{i})(p_1-1-q_1\mathrm{i})(z_6-z_5)$$

and this simplifies to

$$z_2+\left(\frac{1}{2}(p_1+1+q_1\mathrm{i})-\frac{\mathrm{i}}{4q_1}(p_1+q_1\mathrm{i})(p_1-1-q_1\mathrm{i})\right)(z_3-z_2)=$$

$$z_2+\frac{1}{4}\left(1+2p_1+q_1\mathrm{i}+\frac{p_1(1-p_1)}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_3-z_2)$$

We denote this point by Z_0.

Next let Z_7, Z_8, Z_9 be the feet of the perpendiculars from the vertices Z_1, Z_2, Z_3 onto the opposite side-lines Z_2Z_3, Z_3Z_1, Z_1Z_2, respectively. We now show that the circumcentre of $[Z_6, Z_4, Z_7]$ is Z_0 also. For this we note that

$$z_4 = z_2 + \frac{1}{2}(z_3 - z_2), \quad z_6 = z_2 + \frac{1}{2}(p_1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2), \quad z_7 = z_2 + p_1(z_3 - z_2)$$

From this

$$z_7 - z_4 = (p_1 - \frac{1}{2})(z_3 - z_2),\ z_6 - z_4 = \frac{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}}{2p_1 - 1}(z_7 - z_4)$$

and hence

$$z_6 = z_4 + \frac{1}{2p_1 - 1}(p_1 - 1 + q_1\mathrm{i})(z_7 - z_4)$$

By the formula of if 6.4 for the circumcentre, we know that the incentre of $[Z_6, Z_4, Z_7]$ has complex coordinate

$$z_4 + \frac{\mathrm{i}}{2q_1/(2p_1 - 1)}\left(\frac{p_1 - 1}{2p_1 - 1} + \frac{q_1}{2p_1 - 1}\mathrm{i}\right)\left(\frac{p_1 - 1}{2p_1 - 1} - 1 - \frac{q_1}{2p_1 - 1}\mathrm{i}\right)(z_7 - z_4)$$

and this simplifies to z_0.

Thus Z_7 lies on the circumcircle of the triangle $[Z_4, Z_5, Z_6]$, and as this argument also applies to the other two sides of $[Z_1, Z_2, Z_3]$, so do Z_8 and Z_9. This shows that the feet of the perpendiculars from the vertices of the triangle onto the opposite sidelines also lie on the above circle.

Finally, let Z_{10} be the mid-point of the orthocentre and the vertex Z_1 in the original triangle, Z_{11} be the mid-point of the orthocentre and the vertex Z_2, and Z_{12} be the mid-point of the orthocentre and the vertex Z_3. We seek the circumcentre of the triangle $[Z_{11}, Z_4, Z_7]$. Now $z_4 = z_2 + \frac{1}{2}(z_3 - z_2)$, $z_7 = z_2 + p_1(z_3 - z_2)$, and by the formula in 6.5 for the orthocentre

$$z_{11} = z_2 + \frac{p_1}{2}\left(1 - \frac{p_1 - 1}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_3 - z_2)$$

From these we have that

$$z_{11} = z_4 + \frac{p_1 - 1}{2p_1 - 1}\left(1 - \frac{p_1}{q_1}\mathrm{i}\right)(z_7 - z_4)$$

Then the circumcentre of $[Z_{11}, Z_4, Z_7]$ has complex coordinate

$$z_4 + \frac{\mathrm{i}}{-2p_1(p_1 - 1)/(2p_1 - 1)q_1}\frac{p_1 - 1}{2p_1 - 1}\left(1 - \frac{p_1}{q_1}\mathrm{i}\right)\left[\frac{p_1 - 1}{2p_1 - 1} - 1 + \frac{p_1(p_1 - 1)}{q_1(2p_1 - 1)}\mathrm{i}\right](z_7 - z_4)$$

and it can be checked that this reduces to z_0. Hence Z_{11} lies on the circle through the mid-points of the sides of $[Z_1, Z_2, Z_3]$, and thus, as our argument applies equally well to the other two sides of the original triangle, so do Z_{12} and Z_{10}. This shows that the mid-point of

the orthocentre and each vertex also lies on the above circle.

Thus we have identified nine points on this circle, which is named from this property.

NOTE. The advantage of mobile coordinates is that they located a point with respect to a triangle using just two instead of three numbers and they also behave like resealed Cartesian coordinates. None the less they can lead to unwieldy expressions as in this section and it is a good idea when possible to check the algebraic manipulations using a computer software programme.

7

7.1 Feuerbach's theorem, 1822

Our formula in 6.5 for the incentre of a triangle is very awkward to apply because of the complicated term in the denominator. However by eliminating the surds in the denominator in two steps, by multiplying above and below by a conjugate surd of the denominator, we obtain the more convenient formulation that

$$\frac{p_1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}}{1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\frac{1}{2}\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2} \qquad ①$$

In fact once we know the form of this we can establish it more directly and easily by noting that

$$\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right]\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)_2+q_1^2}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}\right)^2-\left((p_1-1)^2+q_1^2\right)\right]=p_1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}$$

We note that the right-hand side in ① must be positive.

Recalling from 6.5 that the incentre Z_{13} has complex coordinate

$$z_{13}=z_2+\frac{p_1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+q_1\mathrm{i}}{1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}}(z_3-z_2)$$

we re-write this as

$$z_{13}-z_2=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right]\left[1+\frac{q_1\mathrm{i}}{p_1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}}\right](z_3-z_2)=$$

$$\frac{1}{2q_1}\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right]\left[q_1+\left(\sqrt{p_1^2+q_1^2}-p_1\right)\mathrm{i}\right](z_3-z_2)$$

From this, the foot of the perpendicular from the incentre Z_{13} to the line Z_2Z_3 has complex coordinate

$$z_2+\frac{1}{2q_1}\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right]q_1(z_3-z_2)$$

and so the length of radius of the incircle is equal to

$$\frac{a}{2\,|\,q_1\,|}\left[1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right]\left[\sqrt{p_1^2+q_1^2}-p_1\right]$$

On the other hand the nine-point circle has radius-length equal to the distance from Z_0 to Z_4. Form the formula

$$z_0-z_4=\frac{1}{2}(p_1+q_1\mathrm{i})\left[1-\frac{\mathrm{i}}{2q_1}(p_1-1-q_1\mathrm{i})\right](z_3-z_2)=$$

$$\frac{1}{4q_1}(p_1+q_1\mathrm{i})[q_1+(1-p_1)\mathrm{i}](z_3-z_2)$$

we note that

$$|\,z_0-z_4\,|=\frac{a}{4\,|\,q_1\,|}\,|\,p_1+q_1\mathrm{i}\,|\,|\,q_1+(1-p_1)\mathrm{i}\,|$$

and so this is the radius-length of the nine-point circle.

We also require the distance between the centres of the inscribed and nine-point circles. For this we note that

$$z_{13}-z_0=\left\{\frac{1}{2q_1}\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right)\left(q_1+\left(\sqrt{p_1^2+q_1^2}-p_1\right)\mathrm{i}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}(p_1+1+q_1\mathrm{i})-\frac{\mathrm{i}}{4q_1}(p_1+q_1\mathrm{i})(p_1-1-q_1\mathrm{i})\right)\right\}(z_3-z_2)=$$

$$\frac{1}{4q_1}\left\{\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right)2q_1-(1+2p_1)q_1+\right.$$

$$\left.\left[\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right)^2\left(\sqrt{p_1^2+q_1^2}-p_1\right)+p_1^2-p_1-q_1^2\right]\mathrm{i}\right\}$$

It follows that

$$|\,z_0-z_{13}\,|^2=\frac{a^2}{16q_1^2}\left\{\left[\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right)2q_1-(1+2p_1)q_1\right]^2+\right.$$

$$\left.\left[\left(1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}-\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}\right)2\left(\sqrt{p_1^2+q_1^2}-p_1\right)+p_1^2-p_1-q_1^2\right]^2\right\}$$

The next feature which we wish to note is that if we denote by r_1 and r_2, respectively, the lengths of the radii of the nine-point circle and the incircle, then

$$|\,Z_0,\ Z_{13}\,|^2=(r_1-r_2)^2$$

This can be verified on a computer; it can also be written out at length by writing each term in the form

$$u+v\sqrt{p_1^2+q_1^2}+w\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}+x\sqrt{p_1^2+q_1^2}\sqrt{(p_1-1)^2+q_1^2}$$

where u, v, w and x are polynomials in p_1, q_1 and a. This is unsatisfactory as a method of proof but in the absence of some insight which will lead to a reasonable calculation it must suffice. It follows that

$$|\,Z_0,\ Z_{13}\,|=\pm(r_1-r_2)$$

With these preparatory results, we can now show that the nine-point circle and the incircle meet at just one point and they have a common tangent there.

Suppose first that $r_2 \geqslant r_1$ so that $| Z_0, Z_{13} | = r_2 - r_1$. Let Z be the point on $[Z_{13}, Z_0$ such that $| Z_{13}, Z | = r_2$; then Z is a point on the incircle. As $r_2 - r_1 < r_2$ we have that $Z_0 \in [Z_{13}, Z]$ and so $| Z_0, Z | = r_2 - (r_2 - r_1) = r_1$. It follows that Z is also on the nine-point circle. It then follows that every other point of the nine-point circle is inside or on the incircle. But the incircle is contained in the triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$ and the nine-point circle is not (as it passes through the mid-points of the sides). Thus this gives a contradiction and we must have $r_1 > r_2$ and so $| Z_0, Z_{13} | = r_1 - r_2$. Now let Z be the point on $[Z_0, Z_{13}$ such that $| Z_0, Z | = r_1$; then Z is a point on the nine-point circle. As $r_1 - r_2 < r_1$ we have that $Z_{13} \in [Z_0, Z]$ and so $| Z_{13}, Z | = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. It follows that Z is also on the incircle. Then every other point of the incircle is inside the nine-point circle and the line through Z perpendicular to $Z_0 Z_{13}$ is a tangent to both circles. This shows that the incircle and the nine-point circle of a triangle meet at just one point and they have a common tangent there.

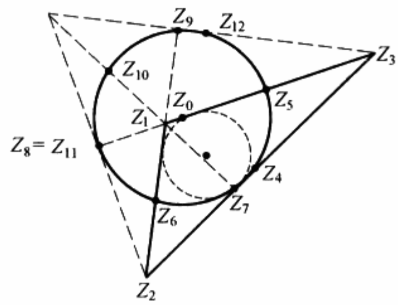


Figure 17 Feuerbach's theorem

If we modify our treatment of the incentre of the triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$, using the terminology before points on the external bisector of $| \underline{Z_1 Z_2 Z_3}$ will have complex coordinates

$$z_2 + \frac{r}{2a}\left(1 - \frac{p_1 + q_1 \mathrm{i}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right)(z_3 - z_2)$$

and points on the external bisector of $| \underline{Z_2 Z_3 Z_1}$ will have complex coordinates

$$z_2 + \left\{1 - \frac{s}{2a}\left(1 + \frac{p_1 - 1 + q_1 \mathrm{i}}{\sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}\right)\right\}(z_3 - z_2)$$

It follows that the point of intersection of these lines has complex coordinate

$$z_2 + p_1 - \frac{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} + q_1 \mathrm{i}}{1 - \sqrt{p_1^2 + q_1^2} - \sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}}(z_3 - z_2)$$

This point is equally distant from the side-lines of the triangle and is called an excentre. The circle with it as centre and which touches the side-lines of the triangle is called an escribed circle for the triangle.

Now

$$\frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{p_1^2 + q_1^2} - \sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}\right]\left[1 - \sqrt{p_1^2 + q_1^2} + \sqrt{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\right)^2 - ((p_1 - 1)^2 + q_1^2)\right] = p_1 - \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$$

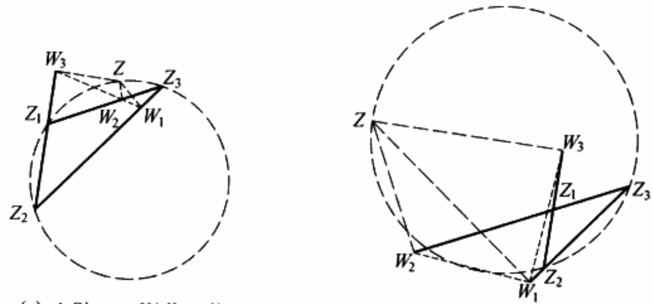
Then by a straightforward modification of our argument for the incircle, it follows that the nine-point circle and this escribed circle meet at one point, where they have a common

tangent. As this argument is valid for the other two sides of the triangle as well, it follows that the two other escribed circles have this property also.

This combined result is known as FEUERBACH'S THEOREM.

7.2 The Wallace-Simson line, 1797

We take a triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$ and for a point Z let W_1, W_2, W_3 be the feet of the perpendiculars from Z to the side-lines Z_2Z_3, Z_3Z_1, Z_1Z_2, respectively.



(a) A Simson-Wallace line

(b) A right Sensed duo-angle

Figure 18

Using notation like that in 6.3, we suppose that

$$z_1 - z_2 = (p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2), \quad z - z_2 = (p + q\mathrm{i})(z_3 - z_2)$$

Then $z = z_2 + p(z_3 - z_2) + q\mathrm{i}(z_3 - z_2)$, and so $w_1 = z_2 + p(z_3 - z_2)$. Next, $w_2 = z_3 + s(z_1 - z_3)$, for some $s \in \mathbf{R}$. Hence $z - w_2 = (p - 1 + q\mathrm{i})(z_3 - z_2) - s(z_1 - z_3)$. But $z_1 - z_3 = (p_1 - 1 + q_1\mathrm{i})(z_3 - z_2)$, so

$$z_3 - z_2 = \frac{1}{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}}(z_1 - z_3)$$

On inserting this, we have that

$$z - w_2 = \left[\frac{p - 1 + q\mathrm{i}}{p_1 - 1 + q_1\mathrm{i}} - s\right](z_1 - z_3)$$

We wish the coefficient of $z_1 - z_3$ to be purely imaginary, and so take

$$s = \frac{(p - 1)(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}$$

Hence

$$w_2 = z_3 + \frac{(p - 1)(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3)$$

Thirdly, $w_3 = z_2 + t(z_1 - z_2)$, for some $t \in \mathbf{R}$. Hence $z - w_3 = (p + q\mathrm{i})(z_3 - z_2) - t(z_1 - z_2)$. But

$$z_3 - z_2 = \frac{1}{p_1 + q_1\mathrm{i}}(z_1 - z_2)$$

and so

$$z - w_3 = \left[\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} - t\right](z_1 - z_2)$$

We choose t so that the coefficient of $z_1 - z_2$ is purely imaginary. Thus

$$t = \frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}$$

which yields

$$w_3 = z_2 + \frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2)$$

From these expressions for w_1, w_2, w_3 we note that

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z_3 - z_2 + \frac{(p-1)(p_1-1) + qq_1}{(p_1-1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3) - p(z_3 - z_2)}{\frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2) - p(z_3 - z_2)} =$$

$$\frac{1 - p + \frac{(p-1)(p_1-1) + qq_1}{(p_1-1)^2 + q_1^2}(p_1 - 1 + q_1 i)}{\frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_{2_1}}(p_1 + q_1 i) - p}$$

The real part of this has numerator $(p_1^2 + q_1^2 - p_1)(p^2 + q^2) - (p_1^2 + q_1^2 - p_1)p + q_1 q$, and the imaginary part has numerator $q_1(p^2 + q^2) - q_1 p - (p_1^2 + q_1^2 - p_1)q$. If $\theta = \angle_F{}' W_3 W_1 W_2$ then for θ to have a constant magnitude it is necessary and sufficient that

$$q_1(p^2 + q^2) - q_1 p - (p_1^2 + q_1^2 - p_1)q = k[(p_1^2 + q_1^2 - p_1)(p^2 + q^2) - (p_1^2 + q_1^2 - p_1)p + q_1 q]$$

This can be re-written as

$$a^2\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p_1^2 + q_1^2 - p_1}{2q_1}\right)^2\right] - \frac{a^2}{4}\left[1 + \frac{(p_1^2 + q_1^2 - p_1)^2}{q_1^2}\right] =$$

$$\frac{k(p_1^2 + q_1^2 - p_1)}{q_1}\left\{a^2\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(q + \frac{q_1}{2(p_1^2 + q_1^2 - p_1)}\right)^2\right] - \frac{a^2}{4}\left[1 + \frac{q_1^2}{(p_1^2 + q_1^2 - p_1)^2}\right]\right\}$$

On using 6.1 we infer that as k varies this gives the family of coaxal circles which pass through Z_2 and Z_3.

For W_1, W_2, W_3 to be collinear, it is necessary and sufficient that the expression be real. On equating its imaginary part to 0 we obtain $q_1(p^2 + q^2) - q_1 p - (p_1^2 + q_1^2 - p_1)q = 0$. On writing this as

$$\frac{p^2 + q^2 - p}{q} = \frac{p_1^2 + q_1^2 - p_1}{q_1}$$

we note from the formula for a circumcentre in 6.4 that it holds when Z lies on the circumcirule of the triangle $[Z_1, Z_2, Z_3]$.

This latter result is due to WALLACE, but SIMSON'S name has for a long time been associated with it.

7.3 The incentre on the Euler line of a triangle

We suppose that we have the mobile coordinates $z_1 - z_2 = (p_1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2)$, where p_1 and q_1 are real numbers and $q_1 \neq 0$. Then $z_1 - z_3 = (p_1 - 1 + q_1 \mathrm{i})(z_3 - z_2)$, and as in 6.3 we have

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = p_1 + q_1 \mathrm{i} = \frac{c}{a} \operatorname{cis} \beta$$

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{1 - p_1 + q_1 i}{(1 - p_1)^2 + q_1^2} = \frac{a}{b} \operatorname{cis} \gamma$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{p_1 - 1 + q_1 i}{p_1 + q_1 \mathrm{i}} = \frac{b}{c} \operatorname{cis} \alpha$$

where we are using our sandard notation. Then

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad (1 - p_1)^2 + q_1^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

We recall that the orthocentre, centroid and incentre have mobile coordinates

$$p_1 + \frac{p_1(1 - p_1)}{q_1} \mathrm{i}, \quad \frac{p_1 + 1}{3} + \frac{q_1}{3} \mathrm{i},$$

$$\frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}}{1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{(1 - p_1)^2 + q_1^2}} + \frac{q_1}{1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{(1 - p_1)^2 + q_1^2}} \mathrm{i}$$

respectively.

Now
$$1 - 2p_1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$$

and so

$$p_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2}, \quad 1 - p_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \quad p_1 + 1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2a^2}{2a^2}$$

Moreover

$$q_1^2 = \frac{c^2}{a^2} - p_1^2 = \frac{c^2}{a^2} - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2}\right)^2 = - \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2 - 4c^2 a^2}{4a^4} =$$
$$- \frac{[(c + a)^2 - b^2][(c - a)^2 - b^2]}{4a^4}$$

while

$$p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = \frac{(c + a)^2 - b^2}{2a^2}$$

$$1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2} + \sqrt{(1 - p_1)^2 + q_1^2} = 1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a + b + c}{a}$$

so that

$$\frac{p_1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}}{1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{(1-p_1)^2+q_1^2}}=\frac{(c+a)^2-b^2}{2a(a+b+c)}=\frac{c+a-b}{2a}$$

$$\frac{q_1^2}{1+\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{(1-p_1)^2+q_1^2}}=-\frac{1}{4a^3}\frac{[(c+a)^2-b^2][(c-a)^2-b^2]}{a+b+c}=$$

$$-\frac{1}{4a^3}(c+a-b)[(c-a)^2-b^2]$$

The determinant for collinearity, on multiplying the middle column by q_1, is

$$\begin{vmatrix} \frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2} & \frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^4} & 1 \\ \frac{c^2+a^2-b^2+2a^2}{6a^2} & -\frac{[(c+a)^2-b^2][(c-a)^2-b^2]}{12a^4} & 1 \\ \frac{c+a-b}{2a} & -\frac{(c+a-b)[(c-a)^2-b^2]}{4a^3} & 1 \end{vmatrix}$$

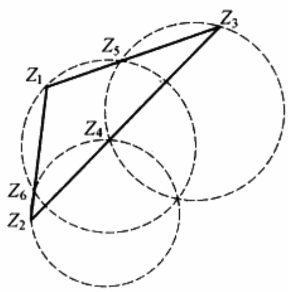
and this is a non-zero multiple of

$$\begin{vmatrix} c^2+a^2-b^2 & (c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) & 1 \\ c^2+a^2-b^2+2a^2 & -[(c+a)^2-b^2][(c-a)^2-b^2] & 3 \\ a(c+a-b) & -a(c+a-b)[(c-a)^2-b^2] & 1 \end{vmatrix}$$

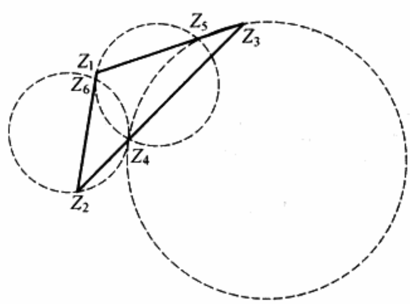
the value of which is $4(ca^5-c^3a^3-ba^5+a^3b^3+c^3ba^2-b^3ca^2)$. This factorizes as $4a^2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ and so the incenten lies on the Euler line if and only if the triangle is isosceles.

7.4 Miquel's theorem, 1838

Let Z_1, Z_2, Z_3 be non-collinear points, and $Z_4\in Z_2Z_3$, $Z_5\in Z_3Z_1$, $Z_6\in Z_1Z_2$ be distinct from Z_1, Z_2 and Z_3. Let C_1, C_2, C_3 be the circumcircles of $[Z_1, Z_5, Z_6]$, $[Z_2, Z_6, Z_4]$, $[Z_3, Z_4, Z_5]$, respectively. Then C_1, C_2, C_3 have a point in common.



(a) Miquel's theorem



(b) Miquel's theorem

Figure 19

Proof. Suppose that these circles have centres the points W_1, W_2, W_3, respectively.

We first assume that C_2 and C_3 meet at a second point $Z_7 \neq Z_4$. If $Z_7 = Z_6$ the result is trivially true, so we may exclude that case. As Z_1, Z_2, Z_6 are collinear, we have $z_1 - z_6 = -v(z_2 - z_6)$, for some non-zero v in $\mathbf{R}$. As Z_2, Z_4, Z_6, Z_7 are concyclic, we have

$$\frac{z_2 - z_6}{z_7 - z_6} = \rho \frac{z_2 - z_4}{z_7 - z_4}$$

for some non-zero ρ in $\mathbf{R}$. As Z_2, Z_3, Z_4 are collinear, we have $z_2 - z_4 = -\lambda(z_3 - z_4)$, for some non-zero λ in $\mathbf{R}$. As Z_3, Z_4, Z_5, Z_7 are concyclic, we have

$$\frac{z_3 - z_4}{z_7 - z_4} = \sigma \frac{z_3 - z_5}{z_7 - z_5}$$

for some non-zero σ in $\mathbf{R}$. On combining these we have

$$\frac{z_1 - z_6}{z_7 - z_6} = v\rho\lambda\sigma \frac{z_3 - z_5}{z_7 - z_5}$$

It follows that Z_1, Z_5, Z_6, Z_7 are concyclic.

We suppose secondly that C_2 and C_3 have a common tangent at Z_2. It is convenient to suppose that $z_1 = z_2 + (p_1 + \mathrm{i}q_1)(z_3 - z_2)$ and $w_2 = z_2 + (p + \mathrm{i}q)(z_3 - z_2)$. Then the foot Z_7 of the perpendicular from W_2 to Z_2Z_3 has complex coordinate $z_7 = z_2 + p(z_3 - z_2)$, and hence $z_4 = z_2 + 2p(z_3 - z_2)$. Then the mid-point Z_8 of Z_3 and Z_4 has complex coordinate $z_8 = z_2 + (p + \frac{1}{2})(z_3 - z_2)$. It follows that for the centre W_3 of C_3 we have $w_3 = z_2 + (p + \frac{1}{2} + \mathrm{i}q')(z_3 - z_2)$, for some real number q'. But Z_4, W_2, W_3 are collinear, so that

$$\begin{vmatrix} 2p & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ p + \frac{1}{2} & q' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

and from this

$$q' = \frac{p - \frac{1}{2}}{p} q\mathrm{i}(z_3 - z_2)$$

Hence

$$w_3 = z_2 + \left(p + \frac{1}{2} + \frac{p - \frac{1}{2}}{p} q\mathrm{i}\right)(z_3 - z_2)$$

From this

$$w_3 - z_3 = \frac{p - \frac{1}{2}}{p}(p + q\mathrm{i})(z_3 - z_2)$$

and since

$$z_3 - z_2 = \frac{1}{p_1 - 1 + \mathrm{i}q_1}(z_1 - z_3)$$

we have

$$w_3 = z_3 + \frac{p - \frac{1}{2}}{p} \frac{(p + iq)(p_1 - 1 - iq_1)}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3)$$

Thus if Z_9 is the foot of the perpendicular from W_3 to Z_3Z_1, we have

$$z_9 = z_3 + \frac{p - \frac{1}{2}}{p} \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3)$$

and so

$$z_5 = z_3 + \frac{2p - 1}{p} \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3)$$

Similarly

$$w_2 = z_2 + (p + iq)(z_3 - z_2), \quad z_3 - z_2 = \frac{1}{p_1 + iq_1}(z_1 - z_2)$$

and so

$$w_2 = z_2 + \frac{(p + iq)(p_1 - iq_1)}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2)$$

It follows that for the foot Z_{10} of the perpendicular from W_2 to Z_1Z_2 we have

$$z_{10} = z_2 + \frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2)$$

and so

$$z_6 = z_2 + 2\frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2)$$

We have

$$z_1 - z_5 = \left[1 - \frac{2p - 1}{p} \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}\right](z_1 - z_3)$$

$$z_1 - z_6 = \left[1 - 2\frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}\right](z_1 - z_2)$$

$$z_4 - z_6 = 2p(z_3 - z_2) - 2\frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(z_1 - z_2) = 2\left[p - \frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(p_1 + iq_1)\right](z_3 - z_2)$$

$$z_4 - z_5 = \left[(2p - 1)(z_3 - z_2) - \frac{2p - 1}{p} \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(z_1 - z_3)\right] =$$

$$\frac{2p - 1}{p}\left[p - \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(p_1 - 1 + q_1)\right](z_3 - z_2)$$

As $z_1 - z_2 = (p_1 + iq_1)(z_3 - z_2)$, from these combined we have that

$$\frac{(z_1 - z_5)(z_4 - z_6)}{(z_1 - z_6)(z_4 - z_5)}$$

is a real multiple of

$$\frac{\left[p - \frac{pp_1 + qq_1}{p_1^2 + q_1^2}(p_1 + iq_1)\right](p_1 - 1 + iq_1)}{\left[p - \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}(p_1 - 1 + iq_1)\right](p_1 + iq_1)} = \frac{\left[p - \frac{pp_1 + qq_1}{p_1 - iq_1}(p_1 - 1 + iq_1)\right]}{\left[p - \frac{p(p_1 - 1) + qq_1}{p_1 - 1 - iq_1}\right](p_1 + iq_1)} =$$

$$\frac{-q_1(ip + q)[(p_1 - 1)^2 + q_1^2]}{-q_1(ip + q)[p_1^2 + q_1^2]} = \frac{(p_1 - 1)^2 + q_1^2}{p_1^2 + q_1^2}$$

and this is real. It follows that Z_1, Z_4, Z_5, Z_6 are concyclic.

This is known as MIQUEL'S THEOREM.

8

8.1 Isogonal conjugates

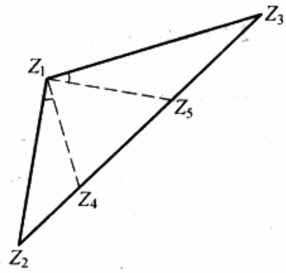


Figure 20

Definition. Given non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, we say that half-lines $[Z_1, Z_4$, $[Z_1, Z_5$ are isogonal conjugates with respect to the angle-support $\mid \underline{Z_2Z_1Z_3}$ if the sensed angles $\angle_F Z_2Z_1Z_4, \angle_F Z_5Z_1Z_3$, have equal magnitudes.

To see how this operates, we first suppose that Z_4 and Z_5 are both on the line Z_2Z_3 and that

$$Z_4 = \frac{1}{1 + \lambda_1}Z_2 + \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}Z_3, \quad Z_5 = \frac{1}{1 + \lambda_2}Z_2 + \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2}Z_3$$

for real numbers λ_1 and λ_2. We recall that then

$$\frac{\overline{Z_2Z_4}}{\overline{Z_4Z_3}} = \lambda_1, \quad \frac{\overline{Z_2Z_5}}{\overline{Z_5Z_3}} = \lambda_2$$

Then

$$\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \Big/ \frac{z_3 - z_1}{z_5 - z_1} = \frac{\frac{1}{1 + \lambda_1}z_2 + \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \frac{\frac{1}{1 + \lambda_2}z_2 + \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2}z_3 - z_1}{z_3 - z_1}$$

is positive and so on multiplying across by $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$.

$$\frac{z_2 - z_1 + \lambda_1(z_3 - z_1)}{z_2 - z_1} \frac{z_2 - z_1 + \lambda_2(z_3 - z_1)}{z_3 - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} + \lambda_1\lambda_2 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \lambda_1 + \lambda_2$$

is real. On subtracting $\lambda_1 + \lambda_2$ it follows that

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} + \lambda_1\lambda_2 \frac{1}{(z_2 - z_1)/(z_3 - z_1)}$$

is real. We write

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = u + vi, \ (u, v \in \mathbf{R})$$

where $v \neq 0$ as $Z_1 \notin Z_2Z_3$. With this notation we have that

$$u + vi + \lambda_1\lambda_2 \frac{u - vi}{u^2 + v^2}$$

is real so that

$$v - \lambda_1\lambda_2 \frac{v}{u^2 + v^2} = 0$$

and hence $\lambda_1\lambda_2 = u^2 + v^2$. We deduce that

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{|Z_1, Z_2|^2}{|Z_3, Z_1|^2}$$

the points Z_4 and Z_5 must be both in $[Z_2, Z_3]$ or both in $Z_2Z_3 \setminus [Z_2, Z_3]$

8.2 Concurrency

Given non-collinear points Z_1, Z_2, Z_3, suppose now that for Z_4, $Z_5 \in Z_2Z_3$ the halflines $[Z_1, Z_4$, $[Z_1, Z_5$ are isogonal conjugates with respect to the angle-support $|\underline{Z_2Z_1Z_3}$, for Z_6, $Z_7 \in Z_3Z_1$ the half-lines $[Z_2, Z_6$, $[Z_2, Z_7$ are isogonal conjugates with respect to the angle-support $|\underline{Z_3Z_2Z_1}$, and for Z_8, $Z_9 \in Z_1Z_2$ the half-lines $[Z_3, Z_8$, $[Z_3, Z_9$ are isogonal conjugates with respect to the angle-support $|\underline{Z_1Z_3Z_2}$. Then by 8.1, with an obvious notation we have

$$\lambda_4\lambda_5\mu_6\mu_7\upsilon_8\upsilon_9 = \frac{|Z_1, Z_2|^2 |Z_2, Z_3|^2 |Z_3, Z_1|^2}{|Z_3, Z_1|^2 |Z_1, Z_2|^2 |Z_2, Z_3|^2} = 1$$

Now if Z_1Z_4, Z_2Z_6, Z_3Z_8 are concurrent, by Ceva's theorem we have $\lambda_4\mu_6\upsilon_8 = 1$. It follows that $\lambda_5\mu_7\upsilon_9 = 1$. Then if two of these are concurrent, the third must pass through their point of intersection.

8.3 Symmedians

If in 8.2 $[Z_1, Z_4$, $[Z_2, Z_6$, $[Z_3, Z_8$ are the median half-lines of $[Z_1, Z_2, Z_3]$, then their isogonal conjugates $[Z_1, Z_5$, $[Z_2, Z_7$, $[Z_3, Z_9$ are called the symmedians of the triangle. Now the mid-points Z_4, Z_6, Z_8 lie in the segments $[Z_2, Z_3]$, $[Z_3, Z_1]$, $[Z_1, Z_2]$, respectively. Hence the points Z_5, Z_7, Z_9 lie in the segments $[Z_2, Z_3]$, $[Z_3, Z_1]$, $[Z_1, Z_2]$, respectively. By the cross-bar theorem the symmedian lines Z_1Z_5, Z_2Z_7 must meet and then Z_3Z_9 must pass through their point of intersection. This point of concurrency is called the symmedian point of the triangle.

To identify the symmedians further, suppose that O be the centre of the circumcircle of the triangle (Z_1, Z_2, Z_3), and W_1 the mid-point of $\{Z_2, Z_3\}$. Let the line OW_1 meet the circumcircle, on the opposite side of Z_2Z_3 from Z_1, at the point U_1, $[Z_1, W_1$ meet the circle again at Z_4, and the line through Z_4 parallel to Z_2Z_3 meet the circle again at Z_5. Then

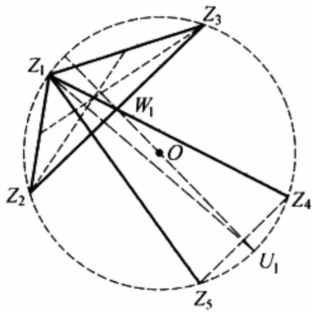


Figure 21

$\mid \underline{Z_2 Z_1 Z_3}$ and $\mid \underline{Z_4 Z_1 Z_5}$ have the same mid-line $Z_1 U_1$ as each other. Thus $[Z_1, Z_5$, is isogonal conjugate of the median half-line $[Z_1, Z_4$, and so is the corresponding symmedian.

Exercises

1. Show that if $Z_1 \neq Z_2$, the points Z on the perpendicular bisector of $[Z_1, Z_2]$ are those for which $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}) + t(\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}$, for some $t \in \mathbf{R}$.

2. If $l = Z_1 Z_2$, then $Z_4 = \pi_l(Z_3)$ if and only if $Z_4 = Z_1 + s(Z_2 - Z_1)$ where

$$s = \frac{(\overrightarrow{OZ_3} - \overrightarrow{OZ_1}) \cdot (\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})}{\| \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1} \|^2}$$

and also if and only if $\overrightarrow{OZ_4} = \overrightarrow{OZ_3} + t(\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}$, where

$$t = -\frac{(\overrightarrow{OZ_3} - \overrightarrow{OZ_1}) \cdot (\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}}{\| \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1} \|^2}$$

3. If $l = Z_1 Z_2$, then $Z_4 = s_l(Z_3)$ if and only if $\overrightarrow{OZ_4} = \overrightarrow{OZ_3} + t(\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}$, where

$$t = -2\frac{(\overrightarrow{OZ_3} - \overrightarrow{OZ_1}) \cdot (\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}}{\| \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1} \|^2}$$

4. If $Z_2 \notin [Z_0, Z_1$ and l is the mid-line of the angle support $\mid \underline{Z_1 Z_0 Z_2}$, then $Z \in l$ if and only if

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OZ_0} + t\left[\frac{1}{\| \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_0} \|}(\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_0}) - \frac{1}{\| \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_0} \|}(\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_0})\right]^{\perp}$$

for some $t \in \mathbf{R}$.

5. Prove that $\overrightarrow{OZ'} - \overrightarrow{OZ_1} = \cos\alpha(\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OZ_1}) + \sin\alpha(\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OZ_1})^{\perp}$, represents a rotation about the point Z_1, through the angle α.

6. For any vector $\overrightarrow{OZ}$, with $Z \equiv F(x, y)$, define

$$\overrightarrow{OZ}^{\vdash} = \overrightarrow{OU}, \quad \overrightarrow{OZ}^{\dashv} = \overrightarrow{OV}$$

where $U \equiv F(x, -y)$, $V \equiv F(y, x)$, so that $U = s_{OI}(Z)$, $V = s_l(Z)$, l being the mid-line of $\mid \underline{IOJ}$. Prove that

(i)

$$(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2})^{\vdash} = \overrightarrow{OZ_1}^{\vdash} + \overrightarrow{OZ_2}^{\vdash}$$

(ii)

$$(k\overrightarrow{OZ})^{\vdash} = k(\overrightarrow{OZ})^{\vdash}$$

(iii)

$$(\overrightarrow{OZ}^{\vdash})^{\vdash} = \overrightarrow{OZ}$$

(iv)

$$(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2})^{\dashv}=\overrightarrow{OZ_1}^{\dashv}+\overrightarrow{OZ_2}^{\dashv}$$

(v)

$$(k\overrightarrow{OZ})^{\dashv}=k(\overrightarrow{OZ})^{\dashv}$$

(vi)

$$(\overrightarrow{OZ}^{\dashv})^{\dashv}=\overrightarrow{OZ}$$

(vii)

$$(\overrightarrow{OZ_0}^{\vdash})^{\dashv}=\overrightarrow{OZ}^{\perp}$$

(viii)

$$(\overrightarrow{OZ}^{\dashv})^{\vdash}=-\overrightarrow{OZ}^{\perp}$$

Prove that axial symmmetry in the line through the origin, with angle of incli-nation α, is given by $\overrightarrow{OZ'}=\cos 2\alpha\,\overrightarrow{OZ}^{\vdash}+\sin 2\alpha\,\overrightarrow{OZ}^{\dashv}$.

7. For non-collinear points Z_1,Z_2,Z_3, suppose that

$$\overrightarrow{OZ_4}=\overrightarrow{OZ_2}+(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2})^{\perp},\quad \overrightarrow{OZ_5}=\overrightarrow{OZ_2}-(\overrightarrow{OZ_3}-\overrightarrow{OZ_2})^{\perp}$$

Show that then $Z_1Z_5\perp Z_3Z_4$, and in fact

$$\overrightarrow{OZ_5}-\overrightarrow{OZ_1}=(\overrightarrow{OZ_4}-\overrightarrow{OZ_3})^{\perp}$$

8. Prove that $\delta_F(Z_1,Z_2,Z_3)+\delta_F(Z_1,Z_4,Z_3)=\delta_F(Z_1,Z_5,Z_3)$, where $(Z_1,Z_2)\uparrow(Z_4,Z_5)$.

9. If a point Z be taken on the circumcircle of an equilateral triangle $[Z_1,Z_2,Z_3]$, prove that when Z is on the opposite side of Z_2Z_3 from Z_1, $|Z,Z_1|=|Z,Z_2|+|Z,Z_3|$.

10. For a triangle $[Z_1,Z_2,Z_3]$, if Z_4 is the foot of the perpendicular from Z_1 to Z_2Z_3, show that Z_4 is the mid-point of the orthocentre and the point where the line Z_1Z_4 meets the circumcircle again.

11. Deduce the pasch property of a triangle from Menelaus' theorem.

[编者的话] Patrick D. Barry 是爱尔兰的一位退休的大学教授.对平面几何研究颇有心得.2007 年 1 月编者在新西兰旅游时,拜访了一位侨居新西兰的爱尔兰高中数学教师.他在奥克兰经营一家类似于我国九章数学书店的小店.2001 年第一次去拜访时还是只有几十本书的家庭书店.2003 年第二次去时已搬到了商业区.而今年则扩大了几倍.本文就是在他那里购得的一本新书的节选.回国后给老 Barry 教授发了电邮,说明欲选载之意图,老 Barry 欣然同意.借此感谢 Barry 让我们领略到了不同风格的几何.

关于一道妙题的再推广

邓寿才

1 证 明

题 设实数 x,y,z 满足条件 $x+y+z=0$,求证

$$(x^2+y^2+z^2)^3 \geqslant 6(x^3+y^3+z^3)^2 \qquad ①$$

本题是我国的苏化明老师于 1989 年在《数学通讯》上首次提出的. 由于不等式 ① 的结构对称,形态优雅,外观简洁,题意简单,而结论却不凡,从此许多数奥书中都有它"闪亮登场",成为一道名题. 在 1990 年第 4 期的《数学通讯》上发表了笔者建立的指数推广,并提出了一个关于综合推广的猜想,不久后笔者又彻底解决了此猜想,并建立了 ① 式的加权推广.

关于 ① 式的证明,至少有六种,下面介绍两种. 由于易验证当 x,y,z 中有 0 时,① 式成立,因此在证明中只须考虑 x,y,z 为非零实数即可.

证明 由已知条件有

$$x+y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x^3+y^3+z^3=3xyz \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=$$
$$(x+y)^2-2xy+z^2=2z^2-2xy$$

由 $x+y=2\times\left(-\frac{z}{2}\right)$ 可设

$$\begin{cases} x=-\frac{z}{2}+t \\ y=-\frac{z}{2}-t \end{cases} \Rightarrow xy=\frac{z^2}{4}-t^2$$

于是

$$(\sum x^2)^3 \geqslant 6(\sum x^3)^2 \Leftrightarrow (2z^2-2xy)^3 \geqslant 6(3xyz)^2 \Leftrightarrow [2z^2-2(\frac{z^2}{4}-t^2)]^3 \geqslant$$
$$54z^2\left(\frac{z^2}{4}-t^2\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}z^2+2t^2\right)^3 \geqslant 54z^2(\frac{z^2}{4}-t^2) \qquad ②$$

② 式左边 $\geqslant \left(\frac{3}{2}z^2\right)^3$;

② 式右边 $\leqslant 54z^2\left(\frac{z^2}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{2}z^2\right)^3$.

所以 ② 式成立,逆推之 ① 式成立,等号成立仅当 $t=0\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}z$,根据对称性知,① 式等号成立的充要条件是 x,y,z 三个数中有两个相等.

另证:只须证明当 $x,y,z\neq 0$ 即可.由对称性不妨设 x,y 同号,且

$$\begin{cases}x=-z\cos^2\theta\\ y=-z\sin^2\theta\end{cases}(0<\theta<\frac{\pi}{2})\Rightarrow(\sum x^2)^3=(2z^2-2xy)^3=$$

$$(2z^2-2z^2\cos^2\theta\sin^2\theta)^3=z^6(2-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta)^3\geqslant z^6(2-\frac{1}{2})^3\Rightarrow(\sum x^2)^3\geqslant(\frac{3}{2}z^2)^3$$

又

$$6(\sum x^3)^2=6(3xyz)^2=6(3z^3\cos^2\theta\sin^2\theta)^2=\left(\frac{3}{2}z^2\right)^3(\sin 2\theta)^6\leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}z^2\right)^3\Rightarrow(\sum x^2)^3\geqslant 6(\sum x^3)^2$$

即 ① 式成立,等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2\theta=1\\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=y=-\frac{z}{2}$$

由对称性知,① 式等号成立仅当 x,y,z 中有两个相等.

首先指出:为了收缩篇幅,我们约定 x,y,z 均为非零实数.

2 指数推广

推广一(指数推广) 设非零实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$,指数 $n,k\in\mathbf{N}$,则

$$(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^{2k+1}\geqslant\lambda(x^{2k+1}+y^{2k+1}+z^{2k+1})^{2n}\tag{③}$$

其中

$$\lambda=(1+2^{1-2n})^{2k+1}\Big/(1-2^{-2k})^{2n}$$

显然,当取 $n=k=1$ 时,$\lambda=6$,③ 式为 ① 式.

证法一 由已知条件知 x,y,z 必有两个同号,根据对称性,不妨设 x,y 同号,由幂平均不等式得

$$x^{2n}+y^{2n}\geqslant 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2n}=2^{1-2n}\cdot z^{2n}\Rightarrow\sum x^{2n}\geqslant(1+2^{1-2n})z^{2n}$$

因此,欲证 ③ 式,只须证

$$\lambda(\sum x^{2k+1})^{2n}\leqslant[(1+2^{1-2n})z^{2n}]^{2k+1}\Rightarrow\left(\sum x^{2k+1}\right)^{2n}\leqslant(1-2^{-2k})^{2n}\cdot z^{2n(2k+1)}\tag{④}$$

由于 $-\frac{x}{z},-\frac{y}{z}$ 总是正数,因此分别记为 p 和 q,则 $p+q=1$,且

$$\begin{cases}0<p^{2k+1}<p<1\\ 0<q^{2k+1}<q<1\end{cases}\Rightarrow 0<p^{2k+1}+q^{2k+1}<p+q=1$$

由于

$$(\sum x^{2k+1})^{2n}=[x^{2k+1}+y^{2k+1}-(-z)^{2k+1}]^{2n}=z^{2n(2k+1)}(1-p^{2k+1}-q^{2k+1})^{2n} \quad ⑤$$

⑤代入④得

$$(1-2^{-2k})^{2n}\geqslant(1-p^{2k+1}-q^{2k+1})^{2n}\Leftrightarrow 1-2^{-2k}\geqslant 1-p^{2k+1}-q^{2k+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(p^{2k+1}+q^{2k+1})\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2k+1} \quad ⑥$$

由幂平均不等式,⑥式显然成立,从而③式成立,等号成立仅当 x,y,z 中有两个相等.

证法二 由证法一知,我们只须证

$$(\sum x^{2k+1})^{2n}\leqslant(1-2^{-2k})^{2n}\cdot z^{2n(2k+1)}\Leftrightarrow\left[\left(\frac{x}{z}\right)^{2k+1}+\left(\frac{y}{z}\right)^{2k+1}+1\right]^{2n}\leqslant(1-2^{-2k})^{2n} \quad ⑦$$

根据对称性,不妨设 x,y 同号,且

$$\frac{x}{z}=-\frac{1}{2}+t,\quad \frac{y}{z}=-\frac{1}{2}-t(t\in\mathbf{R})$$

代入⑦式得

$$\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+1\right]^{2n}\leqslant(1-2^{-2n})^{2n} \quad ⑧$$

设关于 t 的函数为

$$f(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$

求导得

$$f'(t)=(2k+1)\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2k}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2k}\right]$$

$$f''(t)=2k(2k+1)\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\right]$$

由于 $t\in\mathbf{R}\Rightarrow t-\frac{1}{2}<t+\frac{1}{2}$,解方程

$$f'(t)=0\Rightarrow t+\frac{1}{2}=-(t-\frac{1}{2})\Rightarrow t=0\Rightarrow$$

$$f''(0)=-k(2k+1)\cdot 3^{3-2k}<0\Rightarrow f(t)\leqslant f(t)_{\max}=$$

$$f(0)=-2^{-2k}\Rightarrow[f(t)+1]^{2n}\leqslant(1-2^{-2k})^{2n}$$

即⑧式成立,从而③式成立,等号成立仅当 $t=0\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}z$.由对称性知,等号成立仅当 x,y,z 中有两个相等.

证法三 根据对称性,不妨设 $0<|x|,|y|<|z|$.令 $x=-z\sin^2\theta,y=-z\cos^2\theta$,$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则③式化为

$$f(\theta)=[(\sin\theta)^{4n}+(\cos\theta)^{4n}+1]^{2k+1}-\lambda[(\sin\theta)^{4k+2}+(\cos\theta)^{4k+2}-1]^{2n}\geqslant 0 \quad ⑨$$

其中 $f(\theta)$ 为关于 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的三角函数,求导得

$$f'(\theta)=2n(2k+1)\sin 2\theta\cdot\varphi(\theta)$$

这里

$$\varphi(\theta)=[(\sin\theta)^{4n-2}-(\cos\theta)^{4n-2}]\cdot[(\sin\theta)^{4n}+(\cos\theta)^{4n}+1]^{2k}-$$
$$\lambda[(\sin\theta)^{4k}-(\cos\theta)^{4k}]\cdot[(\sin\theta)^{4k+2}+(\cos\theta)^{4k+2}-1]^{2n-1}$$

显然,易验证:

当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时,$f'(\theta)<0$;

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,$f'(\theta)=0$;

当 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时,$f'(\theta)>0$.

所以在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处函数 $f(\theta)$ 达到最小值,即

$$f(\theta)\geqslant f(\theta)_{\min}=f(\frac{\pi}{4})=(1+2^{-2n+1})^{2k+1}-\lambda(1-2^{-2k})^{2n}=0$$

于是 ⑨ 式成立,从而 ③ 式成立.等号成立仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}z$.由对称性知,$x$,$y$,$z$ 中有两个相等.

解法研究

3　系数推广

由于不等式 ① 的特殊性,欲从系数方向将它推广为形如

$$(\lambda x^2+uy^2+vz^2)^3\geqslant k(\lambda x^3+uy^3+vz^3)^2 \qquad ⑩$$

(其中 k 为关于 λ,u,v 的表达式)的结构确实不易.下面我们看如下结果:

推广二(系数推广)　设实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$,λ,u,v 为任意正数,则

$$(\lambda x^2+uy^2+vz^2)^3\geqslant 6\lambda uv(x^3+y^3+z^3)^2 \qquad ⑪$$

等号成立仅当 $\lambda=u=v$ 且 x,y,z 中有两个相等.

证明　我们只须证明 x,y,z 均不为 0 即可.

(i)当 x,y 同号时,$xy>0$,且易得

$$x^3+y^3+z^3=3xyz\Rightarrow xyz^4=xy(x+y^2)z^2\geqslant 4(xy)^2z^2=\frac{4}{9}(3xyz)^2=\frac{4}{9}(\sum x^3)^2\Rightarrow$$

$$S=(\lambda x^2+uy^2+vz^2)^3=\left[\lambda x^2+uy^2+4\left(\frac{vz^2}{4}\right)\right]^3\geqslant$$

$$6^3\left[\lambda x^2\cdot uy^2\cdot\left(\frac{vz^2}{4}\right)^4\right]^{3/6}=\frac{27}{2}\sqrt{\lambda uv^4}(xyz^4)\geqslant\frac{27}{2}\times\frac{4}{9}\sqrt{\lambda uv^4}(\sum x^3)^2 \qquad ⑫$$

同理,当 y,z 同号时,有

$$S\geqslant 6\sqrt{\lambda u^4v}(\sum x^3)^2 \qquad ⑬$$

当 z,x 同号时

$$S\geqslant 6\sqrt{\lambda^4uv}(\sum x^3)^2 \qquad ⑭$$

⑫ × ⑬ × ⑭ ⇒

$$S^3 \geqslant \sqrt{(\lambda uv)^6}\cdot\left[6(\sum x^3)^2\right]^3 \Rightarrow S \geqslant 6\lambda uv(\sum x^3)^2 \quad ⑮$$

即 ⑪ 式成立,等号成立仅当 $\lambda = u = v$ 且 x,y,z 中有两个相等.

① 式还有一个系数推广是:

推广三(系数推广) 设实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$,λ,u,v 为任意正数,则

$$[(u+v)x^2+(v+\lambda)y^2+(\lambda+u)z^2]^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{k^3}{3}}(x^3+y^3+z^3)^2 \quad ⑯$$

其中 $k = uv+v\lambda+\lambda u$,等号成立仅当 $\lambda = u = v$,且 x,y,z 中有两个相等.

显然,当 $\lambda = u = v$ 时,⑯ 式化为 ① 式.

欲证明 ⑯ 式,须应用:

引理 设 λ,u,v 均为正数,则对任意正数 p,q,r 有

$$[(u+v)p+(v+\lambda)q+(\lambda+u)r]^2 \geqslant 4(uv+v\lambda+\lambda u)(qr+rp+pq) \quad ⑰$$

等号成立仅当 $\frac{\lambda}{p}=\frac{u}{q}=\frac{v}{r}$.

证明 当 x,y,z 中有 0 时,⑯ 式左边为 0 成立.

当 x,y,z 中无 0 时,记

$$\begin{cases} t \doteq x^3+y^3+z^3 = 3xyz \\ S = (u+v)x^2+(v+\lambda)y^2+(\lambda+u)z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = (u+v)(\frac{x}{2})^2+(v+\lambda)y^2+(\lambda+u)z^2 \\ S_2 = (u+v)x^2+(v+\lambda)(\frac{y}{2})^2+(\lambda+u)z^2 \Rightarrow S_1+S_2+S_3=\frac{9}{4}S \\ S_3 = (u+v)x^2+(v+\lambda)y^2+(\lambda+u)(\frac{z}{2})^2 \end{cases} \quad ⑱$$

当 y,z 同号时 $yz>0$,应用 S_1;当 z,x 同号时,$zx>0$,应用 S_2;当 x,y 同号时,$xy>0$,应用 S_3.应用引理有

$$S_3^2 \geqslant 4k\left[x^2y^2+y^2\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2x^2\right] = 12k\left[x^2y^2\cdot y^2\left(\frac{z}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2\cdot x^2\right]^{1/3} =$$

$$\left.\begin{matrix} 6\left(\frac{xyz}{2}\right)^{4/3} = 6k\left(\frac{3xyz}{6}\right)^{4/3} \Rightarrow S_3 \geqslant \sqrt{6k}\left(\frac{t}{6}\right)^{2/3} = m \\ \text{同理 } S_1 \geqslant m, S_2 \geqslant m \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}S = S_1+S_2+S_3 \geqslant 3m \Rightarrow S \geqslant \frac{4}{3}m = \frac{4}{3}\sqrt{6k}\left(\frac{t}{6}\right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$S^3 \geqslant \frac{16}{\sqrt{3}}\sqrt{k^3}t^2$$

即 ⑯ 式成立,等号成立仅当 $\lambda = u = v$ 且 x,y,z 中有两个相等.

4 再度推广

下面我们再从指数方面去推广 ⑪、⑯ 两式.

推广四(指数 - 系数推广) 设实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$,系数 $\lambda,u,v>0$,指数 $n\in\mathbf{N}$,则

$$(\lambda x^{2n}+uy^{2n}+vz^{2n})^3\geqslant k\lambda uv(x^3+y^3+z^3)^{2n} \qquad ⑲$$

其中

$$k=6^{-2n}\cdot(2+4^n)^3(n\in\mathbf{N}) \qquad ⑳$$

显然,当 $n=1$ 时,⑲式化为⑪式.

略证:记 $S=2+4^n$,则

$$P=(\sum\lambda x^{2n})^3=\left[\lambda x^{2n}+uy^{2n}+4^n\cdot v\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\right]^3\geqslant$$

$$S^3\left\{\lambda x^{2n}\cdot uy^{2n}\cdot\left[v\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\right]^{4n}\right\}^{3/S}=$$

$$S^3\left(\frac{\lambda uv4^n}{4^{n4^n}}\right)^{\frac{3}{S}}\cdot(xyz^{4^n})^{6n/S} \qquad ㉑$$

同理可得

$$P\geqslant S^3\left(\frac{\lambda vu4^n}{4^{n4^n}}\right)^{\frac{3}{S}}\cdot(xzy^{4^n})^{6n/S} \qquad ㉒$$

$$P\geqslant S^3\left(\frac{uv\lambda^{4^n}}{4^{n4^n}}\right)^{\frac{3}{S}}\cdot(yzx^{4^n})^{6n/S} \qquad ㉓$$

㉑×㉒×㉓得

$$P^3\geqslant S^9\frac{(\lambda uv)^{(2+4^n)3/S}}{(4^{n4^n})^{9/S}}(xyz)^{\frac{6n(2+4^n)}{S}}\Rightarrow$$

$$P\geqslant k\lambda uv(3xyz)^{2n}=k\lambda uv(x^3+y^3+z^3)^{2n}$$

即⑲式成立,等号成立仅当 $\lambda=u=v$ 及 x,y,z 中有两个相等.

推广五(指数 - 系数推广) 设实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$,系数 $\lambda,u,v>0$,指数 $n\in\mathbf{N}$,则

$$[(u+v)x^{2n}+(v+\lambda)y^{2n}+(\lambda+u)z^{2n}]^3\geqslant mk^{3/2}\cdot(x^3+y^3+z^3)^{2n} \qquad ㉔$$

其中

$$m=\frac{8(2+4^n)^3}{\sqrt[3]{9}\cdot 36^n}(n\in\mathbf{N})$$

$$k=uv+v\lambda+\lambda u \qquad ㉕$$

证明 我们记

$$\begin{cases}T=(u+v)x^{2n}+(v+\lambda)y^{2n}+(\lambda+u)z^{2n}\\ T_1=(u+v)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+(v+\lambda)y^{2n}+(\lambda+u)z^{2n}\\ T_2=(u+v)x^{2n}+(v+\lambda)\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}+(\lambda+u)z^{n}\\ T_3=(u+v)x^{2n}+(v+\lambda)y^{2n}+(\lambda+u)\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\end{cases}\Rightarrow T_1+T_2+T_3=(2+4^{-n})T \qquad ㉖$$

应用引理有

$$T_1^2 \geqslant 4k^1\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \cdot y^{2n} + y^{2n} \cdot z^{2n} + z^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] \geqslant$$

$$12k^1\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} y^{2n} \cdot y^{2n} z^{2n} \cdot z^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]^{1/3} =$$

$$\frac{12k}{4^{2n/3}}(xyz)^{4n/3} = \frac{12k}{16^{n/3}}\left(\frac{t}{6}\right)^{4n/3} \Rightarrow T_1 \geqslant \frac{\sqrt{12k}}{4^{n/3}}\left(\frac{t}{6}\right)^{\frac{2n}{3}} \quad ㉗$$

其中

$$t = 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

同理可得

$$T_2 \geqslant \frac{\sqrt{12k}}{4^{n/3}}\left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{2n}{3}} \quad ㉘$$

$$T_3 \geqslant \frac{\sqrt{12k}}{4^{n/3}}\left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{2n}{3}} \quad ㉙$$

㉖ + ㉗ + ㉘ 得

$$(2 + 4^{-n})T = T_1 + T_2 + T_3 \geqslant \frac{3\sqrt{12}}{4^{n/3}}\left(\frac{t}{6}\right)^{2n/3} \Rightarrow T^3 \geqslant mk^{\frac{3}{2}}(x^3 + y^3 + z^3)^{2n} \quad ㉚$$

即 ㉔ 式成立，等号成立仅当 $\lambda = u = v$ 及 $x = y = z$.

5 元数推广

漂亮的不等式 ① 涉及的是关于 3 个实数 x, y, z 的趣味不等式，现在我们把它从 3 元推广到多元的优美不等式：

推广六（指数 - 元数推广） 设 m 个非零实数 $x_1, x_2, \cdots, x_m (3 \leqslant m \in \mathbf{N})$ 中有 $m - 1$ 个同号，且满足条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$，指数 $n, k \in \mathbf{N}$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n}\right)^{2k+1} \geqslant \lambda_m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{2k+1}\right)^{2n} \quad ㉛$$

其中

$$\lambda_m = \frac{[1 + (m - 1)^{1-2n}]^{2k+1}}{[1 - (m - 1)^{-2k}]^{2n}} \quad ㉜$$

显然，当 $m = 3$ 时，㉛ 式与 ③ 式等价. 当 $n = k = 1, m = 4$ 时，$\lambda_4 = 3$.

特别指出：

（ⅰ）从 ㉜ 式知，分子是关于 m 的减函数，分母是关于 m 的增函数，所以 λ_m 是关于 m 的减函数，即当 n, k 固定时，有

$$\lambda_3 > \lambda_4 > \cdots > \lambda_{m-1} > \lambda_m \quad ㉝$$

且由于

$$\left.\begin{aligned}\lim_{m \to +\infty}(m - 1)^{1-2n} = 0\\ \lim_{m \to +\infty}(m - 1)^{-2k} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{m \to +\infty} \lambda_m = 1$$

另一方面，如果固定 m，那么当 n, k 增大时，λ_m 的分子不确定，但趋向于 1，λ_m 的分母在增大，也趋近于 1，总之，当 m, n, k 同时增加时，λ_m 趋近于 1，比如，当 $n = k = 1$ 时

$$\lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \cdots > \lambda_m$$

即
$$6 > 3 > \frac{20}{9} > \frac{15}{8} > \frac{42}{25} > \cdots > 1$$

（ⅱ）因为原妙题的已知条件是：实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$. 这一信息暗示，如果 x,y,z 为非零实数，那么 x,y,z 这三个数中必有两个数同为正数或同为负数，即同号. 并且易证当 x,y,z 中有 0 时，① 式显然成立.

因此，顺藤摸瓜，笔者将妙题推广成了推广六. 否则，如果将推广六中的条件中"有 $m-1$ 个同号"删去，那 ㉛ 式就不一定成立了.

（ⅲ）如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中有 0 时，我们记 $S_m=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2n}\right)^{2k+1}$，$S'_m=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2k+1}\right)^{2n}$，那么当 $m=3$ 时，从推广一知，㉛ 式成立，再记 $X_m=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$.

假设当 $m\leqslant t-1(t=4,5,\cdots,m+1)$ 时 ㉛ 式成立，则当 X_m 中有 1 个为 0 时，如 $x_m=0$，由归纳假设有

$$\left.\begin{aligned}S_{m-1}\geqslant\lambda_{m-1}S'_{m-1}\\ \lambda_{m-1}>\lambda_m\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{m-1}>\lambda_m S'_{m-1}$$

依此类推，当 x_m 中有 $t(1\leqslant t\leqslant m)$ 个为 0 时，有

$$S_{m-t}\geqslant\lambda_{m-t}S'_{m-t}>\lambda_m S'_{m-t}\Rightarrow S_m>\lambda_m S'_m$$

即此时 ㉛ 式仍然成立.

总之，当 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中有 0 时，㉛ 式成立.

为了少费篇幅，因此，我们在推广六中约定了 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为非零实数.

现在我们言归正传，开始证明推广六.

证明　记 $S_m=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2n}\right)^{2k+1}$，$S'_m=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2k+1}\right)^{2n}$. 由对称性，不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 同号，并令 $a_i=-x_i/x_m>0(1\leqslant i\leqslant m-1)$. 于是

$$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}+x_m=0\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}=1\Rightarrow$$
$$0<a_i<1\Rightarrow 0<a_i^{2k+1}<a_i<1\Rightarrow 0<\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}<\sum_{i=1}^{m-1}a_i=1 \tag{34}$$

应用幂平均不等式，有

$$\sum_{i=1}^{m-1}x_i^{2n}\geqslant(m-1)\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-1}|x_i|}{m-1}\right)^{2n}=(m-1)\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{m-1}x_i\right|}{m-1}\right)^{2n}=(m-1)\left(\frac{|-x_m|}{m-1}\right)^{2n}=$$
$$(m-1)^{1-2n}\cdot x_m^{2n}\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2n}\right)^{2k+1}=\left(\sum_{i=1}^{m-1}x_i^{2n}+x_m^{2n}\right)^{2k+1}\geqslant$$
$$[1+(m-1)^{1-2n}]^{2k+1}\cdot x_m^{2n(2k+1)} \tag{35}$$

因此，欲证 ㉛ 式，只须证

$$[1+(m-1)^{1-2n}]^{2k+1}\cdot x_m^{2n(2k+1)}\geqslant\lambda_m\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{2k+1}\right)^{2n}=\lambda_m\left[\sum_{i=1}^{m-1}x_i^{2k+1}-(-x_m)^{2k+1}\right]^{2n}\Leftrightarrow$$

$$[1+(m-1)^{1-2n}]^{2k+1}\geqslant\lambda_m\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}\right]^{2n}\Leftrightarrow[1-(m-1)^{-2k}]^{2n}\geqslant$$

$$\left(1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}\right)^{2n}\Leftrightarrow 1-(m-1)^{-2k}\geqslant 1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}\Leftrightarrow \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}\geqslant(m-1)^{-2k}\Leftrightarrow\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{2k+1}}{m-1}\right)\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-1}a_i}{m-1}\right)^{2k+1}=\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2k+1}$$

由幂平均不等式知,㊱ 式显然成立. 等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=\frac{1}{m-1}\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=-x_m/(m-1)$.

由对称性知,等号成立仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中有 $m-1$ 个相等.

本文最后指出,推广二还有一个间接推广:

推广七 设非零实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m(3\leqslant m\in\mathbf{N})$ 有 $m-1$ 个同号,且满足 $\sum_{i=1}^{m}x_i=0$ 系数 $\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant m)$. 记 $\lambda=\prod_{i=1}^{m}\lambda_i$, $G=\prod_{i=1}^{m}x_i$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i^2\right)^m\geqslant m^m\left[\frac{\lambda G^2}{(m-1)^{m-2}}\right] \tag{37}$$

显然,当取 $m=3$ 时,注意到

$$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$$

此时 ㊲ 式与推广二中的 ⑪ 式一致.

关于一道理科实验班复试试题的证明的几点注记

卢翠艳　邹佳彤[①]

1　1988年理科实验班复试试题

试题1　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是满足条件:

i) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$;

iii) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,

的两组任意实数.试求使不等式 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant A(a_1 - a_n)^{(*)}$ 成立的 A 的最小值.

解　令 $n = 2$,则依题设条件有 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ |x_1|+|x_2| = 1 \end{cases}$,解之,得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$,或 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$,这时(*)变为 $\frac{1}{2}(a_1 - a_2) \leqslant A(a_1 - a_2)(a_1 > a_2)$,所以 $A \geqslant \frac{1}{2}$.

下面证 $A \geqslant \frac{1}{2}$ 时,(*)式成立.

事实上,因 $a_1 \geqslant a_i \geqslant a_n, a_1 > a_n$,所以

$|2a_i - a_1 - a_n| = |(a_1 - a_i) - (a_i - a_n)| \leqslant |(a_1 - a_i) + (a_i - a_n)| \leqslant |a_1 - a_n|$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(2a_i - a_1 - a_n)x_i\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|(2a_i - a_1 - a_n)x_i| \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(a_1 - a_n)\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \frac{1}{2}(a_1 - a_n) \leqslant A(a_1 - a_n)$$

故 $A_{\min} = \frac{1}{2}$.

利用Abel求和公式可以给出一个新证明,先介绍一下什么是阿贝尔求和法.

---

① 哈尔滨市新一校教务主任.

2 Abel 求和法

定理 设 $S_K = a_1 + a_2 + \cdots + a_k(k = 1,2,3,\cdots,n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k-1})$$

证明 为了写得对称，令 $S_0 = 0$，则 $a_1 = S_1 - S_0$；又 $a_k = S_k - S_{k-1}(k = 2,3,\cdots,n)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1} =$$

$$S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k S_k - \sum_{k=2}^{n} b_k S_{k-1}(\text{因 } S_0 = 0) =$$

$$S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1})$$

试题 2 设 $a_i, x_i \in \mathbf{R}(i = 1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$。求证

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{1}{2}(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i - \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i)$$

证明 不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，这是由于若 a_i 的序关系为 $a_{i_1} \geqslant a_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{i_n}$，这里 $(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \pi(1,2,\cdots,n)$，令 $a'_1 = a_{i_1}, a'_2 = a_{i_2}, \cdots, a'_n = a_{i_n}$；$x'_1 = x_{i_1}, x'_2 = x_{i_2}, \cdots, x'_n = x_{i_n}$，即可归结为上述情形.

令 $S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k(k = 1,2,\cdots,n)$，由题设有 $S_n = 0$，且

$$|S_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| = \left|-\sum_{j=k+1}^{n} x_j\right|$$

所以

$$2|S_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| + \left|\sum_{j=k+1}^{n} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1$$

即 $|S_k| \leqslant \frac{1}{2}$，于是，由部分求和公式，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| = \left|S_n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(a_k - a_{k+1})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} S_k(a_k - a_{k+1})\right|(\text{因 } S_n = 0) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = \frac{1}{2}(a_1 - a_n)$$

令 $a_i = \frac{1}{i}(i = 1,2,\cdots,n)$，则本题不等式成为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| \leqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

(1989 年全国高中联赛二试三题)

3 Abel 求和法的应用

利用 Abel 求和法可以证明许多竞赛问题,如下面的 1981 年 USAMO 试题:

试题 3 设 $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$,求证:$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{[ix]}{i} \leqslant [nx]$($[x]$ 为 Gauss 符号).

证明 先证一个[引理]:若 $f_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{[ix]}{i}$,则

$$n f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} [kx] + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$$

事实上,令 $f_0(x) = 0, a_k = 1, (k = 1,2,\cdots,n)$,则 $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i = k + 1$.于是,由部分和公式,得

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f_k - f_{k+1}) + f_n S_n =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\left(-\frac{[(k+1)x]}{k+1}\right) + (n+1) f_n(x) =$$
$$-\sum_{k=1}^{n} [kx] + (n+1) f_n(x)$$

所以

$$n f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} [kx] + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$$ (证毕)

下面用数学归纳法证明试题 3:

i) 当 $n = 1$ 时,显然;

ii) 假设 $k \leqslant n - 1$ 时,原不等式成立,即当 $k = 1,2,\cdots,n-1$ 时都有 $f_k(x) \leqslant [kx]$,于是,由引理得

$$n f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} [kx] + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} [kx] + \sum_{k=1}^{n-1} [kx] =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} ([kx]) + [(n-k)x] + [nx] \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} [kx + (n-k)x] + [nx] = n[nx]$$

所以

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[ix]}{i} \leqslant [nx]$$ (证毕)

4 G. kalajdžić 的证明

最后我们指出试题 1 是一个著名不等式的变形,G. kalajdžić 曾给出如下的证明不失一般性,我们假定 $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i = a_1, \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i = a_n$.根据假设 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = o$,我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(2a_i - a_n - a_1)x_i\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |2a_i - a_n - a_1||x_i| \quad ①$$

因为不等式

$$|2a_i - a_n - a_1| \leqslant a_n - a_1 \Leftrightarrow a_i^2 - (a_1 + a_n)a_i + a_1 a_n \leqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(这对于 $a_1 \leqslant a_i \leqslant a_n$ 是正确的)又因为 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,所以由不等式 ① 推出

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_1)|x_i| = \frac{1}{2}(\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_i - \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_i)$$

(证毕)



在波兰的数学竞赛会

И.Б.畏伊次曼

在这一篇文章里,我们想向教师们介绍在波兰人民共和国的数学竞赛会上所提出来的各种问题.自1950~1955年的五年来,在五次竞赛会上所提出来的问题和例子已经在斯·斯特拉舍维奇的书中汇集和使之系统化了.所有的材料分为两大部分:Ⅰ—— 算术和代数,Ⅱ—— 几何和三角.

这两部分中的每一部分依次由下面各节组成:

§1 自然数.

§2 整数、分数和无理数的代数表达式.

§3 方程和方程组.

§4 不等式.

§5 几何的证明问题.

§6 计算问题.

§7 点的几何轨迹问题.

§8 作圆问题.

§9 极大值和极小值问题.

§10 三角学的变换问题.

很显然,有时要把问题归于上面所列举的各节中的唯一的一个是有一些困难的.但是必须说明,这样的划分很好地反映了竞赛会上的问题的提纲.

自然,竞赛会上的问题是不可能很死板地严格安排在中学的大纲里,并且对于学生解某一个问题可能要求数论的初等知识,像孟氏和塞瓦的定理、阿波罗尼斯圆、许氏兹次的不等式.反演和一系列其他的问题,要通晓这些问题不可避免地增加很多困难.

为了使读者们得到关于在数学问题的竞赛会上所提出来的各种问题的性质的比较具体的概念,这里我们安置一些具有简短解答和困难程度不同的个别的类型.要说明的是,我们这里所用的号码是按照原作者所采用的号数的.

No.8 证明数 $2^{55}+1$ 可被11整除.

解 利用恒等式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

当代替以 $a=2^5,b=-1,n=11$ 时,我们得到

$$2^{55}+1=(2^5+1)(2^{50}-2^{45}+2^{40}-\cdots-2^5+1)=33\cdot N$$

其中 N 是自然数.因此,数 $2^{55}+1$ 可被33整除,亦即可被11整除.

从这个解答推得,一切 $2^{5n}+1$ 类型的数,都可被11整除,其中 n 是被11整除的任意的奇数.

原作者利用这个例子,其目的是向学生们介绍依据数论的某一个定理来解类似问题的方法.

No.13 证明:若 n 是一个偶数,那么数 13^n+6 可被 7 整除.

解 方法 Ⅰ(数学归纳法).设 $n=2k$,其中 $k=1$,这时可以断言

$$13^2=169=7\cdot 24+1$$

是正确的.我们假设,对于某一个 k,满足等式

$$13^{2k}=7\cdot m+1 \quad (m \text{ 是自然数})$$

我们把 k 变为 $k+1$.在这样的情况下

$$13^{2(k+1)}=13^{2k}\cdot 13^2=(7m+1)\times(7\cdot 24+1)=7(169m+24)+1$$

因此,命题是正确的.

方法 Ⅱ.利用二项式的展开公式

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ia^{n-i}b^i+\cdots+b^n$$

设 $a=14$ 和 $b=-1$,这时

$$13^n=[14+(-1)]^n=14^n+C_n^1 14^{n-1}\times(-1)+\cdots+C_n^i 14^{n-i}\times(-1)^i+\cdots+(-1)^n$$

所有右边部分的被加项,最后一项例外,都可被 7 整除,因 n 是偶数,那么$(-1)^n=1$,所以,13^n+6 可被 7 整除.

No.15 证明:$1+2+3+\cdots+n$ 的和(n 是自然数)不能够以数字 2,4,7,9 做结尾.

有趣的是,这个不难的问题的解答可能有很多很好的方法.也可以提出这样的问题:自然数的平方.立方和高次方的和可能以什么样的数字做结尾?

No.25 求下式的最小值

$$\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$$

解 我们把这个式表示为下面的形式

$$y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2-(x^2+1)+5}{(x^2+1)^2}=1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{(x^2+1)^2}$$

我们表示$\frac{1}{1+x^2}=u$,此时 y 变为 u 的二次函数

$$y=5u^2-u+1$$

从代数学里知道,函数 $f(x)=ax^2+bx+c,a>0$,当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时有极小值.在这里当 $u=\frac{1}{10}$ 时,给出极小值,$y_{\min}=\frac{19}{20}$.解方程我们得到:$x_1=-3$ 和 $x_2=3$.

当引进解这个例子的其他的方法的时候,原考虑到找寻二次分式函数的极小值的比较一般的形式

$$y=\frac{x^2+mx+n}{x^2+px+q}$$

No.28 证明:$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ 不可能是算术级数的三个项.

解 用反证法:设$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ 是某算术级数的三个项,这时

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=md,\quad \sqrt{5}-\sqrt{2}n=d \quad (d \text{ 是算术级数的公差},m \text{ 和 } n \text{ 是整数})$$

由此可得

$$m(\sqrt{5}-\sqrt{2})=n(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$m\sqrt{5}-n\sqrt{3}=(m-n)\sqrt{2}$$

两边平方得

$$5m^2+3n^2-2mn\sqrt{15}=2(m-n)^2$$

因此

$$\sqrt{15}=\frac{5m^2+3n^2-2(m-n)^2}{2mn}$$

这是不可能的,因为$\sqrt{15}$是一个无理数.

No.65 证明:假若 n 是比 2 大的整数,那么

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$$

幂的指数是自然数 1 到 $n-1$ 的和,亦即

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}$$

因为 $n>2$,那么 $2^n>n+1$,因此

$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}>2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n=n!$$

亦即,$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$

[用数学归纳法很容易证明,当 $n>2$ 时,$2^n>n$.不等式 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$,可以用数学的归纳法来证明.]

No.57 证明:若 a 和 b 是直角三角形的直角边,c 是斜边,而且 n 是比 2^n 大的自然数,那么

$$a^n+b^n<c^n$$

No.75 长度为 a 的垂直的杆子,被太阳光投射得的影子,首先为 a,其次为 $2a$,第三为 $3a$.

证明 太阳光线的方向同水平线组成的三个角的和等于 90°.

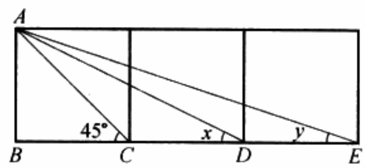


图 1

我们不能导出这个问题的几何解法(参看:格·里尼可夫的是"数学的课外工作",第十页).引进三角学的解法(图 1).

$$\tan x=\frac{AB}{BD}=\frac{1}{2},\quad \tan y=\frac{AB}{BE}=\frac{1}{3}$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1,\quad x+y=45°$$

下面我们引进立体几何问题的一些例子,从这些例子看出,作者能够做到使题目的内容丰富并兼有解法易于理解.

No.91 证明:假若三棱锥的二条高相交,那么　　的二条高也相交.

解 设 $AM\perp$ 平面 BDC,$BN\perp$ 平面 ADC(图 2),AM 和 BN 相交在点 S.此时平面

$ASB \perp CD$(因为 $CD \perp AS$ 和 $CD \perp BS$),因此,$CD \perp AB$.

作 $CP \perp AB$(图3).这样 $CD \perp AB$,$CP \perp AB$,那么平面 $CDP \perp AB$.三角形 CPD 的高,即是线段 CK 和 DF,也将作为三角锥的高.事实上,根据作图 $CK \perp PD$,$CK \perp AB$,因此,$CK \perp$ 平面 ABD.

容易证明,$DF \perp$ 平面 ABC,但是由于 CK 和 DF 是三角形 CPD 的高,所以是相交的.

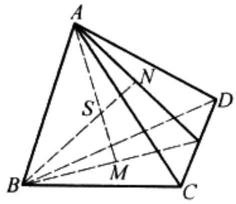


图 2

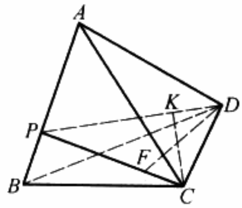


图 3

No.92 证明:假若在三棱锥 $ABCD$ 中,相对的二条棱是相等的,即 $AB = CD$;$AC = BD$;$AD = BC$,那么相对的棱的中点的连线是互相垂直的并且是四面体的对称轴(图4).

解 *方法* Ⅰ.$AB = CD$;$AC = BD$;$AD = BC$.点 K,Q,M,P,F,N 是棱的中点.因为 $AD = BC$ 和 $BD = AC$,那么 $\triangle ABD = \triangle ABC$(根据三组边相等);用这二个三角形的中线组成的 $\triangle DKC$ 是等腰的,而且 $\triangle DKC$ 的中线 KF 与 DC 垂直.

容易证明,$KF \perp AB$.

由此可见,KF 是四面体的对称轴.实际上,点 A 与点 B,点 C 与点 D 关于直线 KF 是对称的;最后,线段 BC 的中点 Q 与线段 AD 的中点 P 关于直线 KF 亦是对称的.通过关于 KF 对称的两个点 P 和 Q 的直线 PQ,与 KF 相交并且和它垂直.

方法 Ⅱ.不难证明(图5),四边形 $KPFQ$ 是平行四边形($KP /\!/ BD$ 和 $KP = \frac{1}{2}BD$,而且 $QF /\!/ BD$ 和 $QF = \frac{1}{2}BD$;亦即 $KP /\!/ QF$ 和 $KP = QF$).而且因为 $BD = AC$,所以 $KPFQ$ 是一个菱形.

这个菱形的对角线 KF 和 PQ 互相平分和互相垂直.很容易地可以证明,线段 NF 和 MN 在交点相互平分和互相垂直.由此可见,当圆形以直线 KF 为轴旋转 $180°$ 的时候,点 K,Q,M 变为对应的点 K,P,N,就是说,在旋转 $180°$ 的时候 $\triangle ABC$ 的边的中点同 $\triangle BAD$ 的边的中点相重合.因此,$\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 重叠,而且四面体本身重叠,这个解答比第一种方法来得更为精雅.

方法 Ⅲ.在每一个四面体中可能外切于一个平行六面体,即是作这样的一个平行六面体:它的各个相对的面的对角线是四面体中各个相对的棱(图6).而且,因为根据条件:相对的棱是相等的.那么,对应的平行六面体中相对的面的对角线也是相等的.从上所说容易证明,这个平行六面体是长方体.

大家都知道,长方体有三条互相垂直的对称轴,每条轴分别通过相对的面的对角线的交点.

这些这样的直线也是内接于长方体的四面体的对称轴.

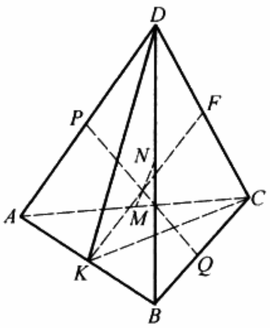


图 4

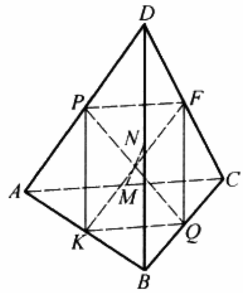


图 5

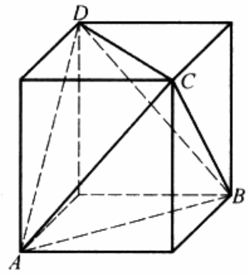


图 6

No.106 长度为 a 的梁 AB 悬挂在二条平行而其长度为 b 的轴上(即与铰链相连接的部分). 当梁绕通过梁的中点的垂直轴旋转 φ 角时,试问梁升高了多少?

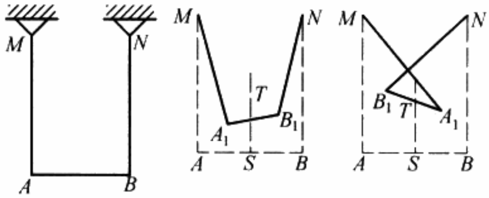


图 7

这里我们作这个问题的图(图 7).

在直径为 2 m 的圆柱状的塔内,安放着高为 6 m 的螺旋梯. 每一梯级的高度为 0.15 m. 在梯级的水平投影组成互相接连以顶角为 18° 的扇形,扇形的顶点同直径为 0.64 m 的圆柱相连,而圆柱的轴与塔的轴重合.

找寻可以在这个梯子上自下而上地移动的垂直轴的最大长度.

这个题目的解可以用几种方法给出.

No.160 证明:假若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是在 0° 和 180° 之间的角,而且 n 是比 l 大的任意自然数,那么

$$\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) < \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n$$

No.119 求长度为 a 的线段的中点的几何轨迹,而线段的二端位于二条互相垂直的直线上(相交的或异面的).

应该强调指出,极大多数的题目常常容许有在方法上的实质不同的各式各样的解法. 为要鼓舞读者找寻在解答数学问题上的新的途径和方法以及在其困难程度和内容方面比较各种不同的解法,只有在原作者自己给出了各式各样的解答并且有意识地做到了这一点之下才是可能的.

附　录　波兰人民共和国数学研究工作的组织[①]

K.库拉托夫斯基院士[②]

对于波兰人民来说,1945年永远是最值得纪念的一年.正是在这一年里,英勇的苏联军队从德国法西斯的奴役之下解放了我们的祖国;也正是在这一年里,在我们国内开始了建设一个新的人民国家的伟大事业.国家建设事业向在第二次世界大战和法西斯统治时期受到了无情摧残的波兰科学提出了许多新的、十分艰巨而光荣的任务.

战争给波兰人民及其创造性活动所带来的无可补偿的损失,在科学方面,尤其是在数学方面,表现得特别显著.作为科学研究工作的物质基础的高等学校和图书馆,在战争期间被彻底地毁坏了;波兰科学家们长期辛勤所积累起来的许多珍贵手稿和资料都被烧毁了.但所有这一切还不是最严重的损失,最严重的损失是大部分波兰数学家都在战争期间牺牲了.

在这样的情况之下,要想恢复起波兰的数学就必须付出巨大的集体劳动.何况我们的任务还不仅在于将战前科学工作的组织及其工作恢复起来就算完成了,还必须建立起一个新的科学组织,使之能够为新社会服务,能够服从新的国家和我们祖国的新社会制度的需要.

现在请让我向大家介绍一下第二次世界大战结束后最初几年内,波兰数学所面临的一些最主要的任务.

在两次世界大战之间,波兰的数学在整个世界数学中获得了相当显著的地位.这些成就之所以能够获得,在不小的程度上是因为当时许多杰出的波兰数学家都集中在为数不多的几个领域内进行创造性工作之故,这些领域是:拓扑学、泛函分析、实变函数论、集合论及数理逻辑.但这样的作法也引起了相反的后果,那就是使整个数学研究带有很大的片面性,数学分析和代数学方面进展很小,和这两门学科的重大很不相称.另一方面,也使得上述几个数学领域的研究和外界向科学所提出的问题脱节,使波兰的数学对物理学和技术方面很少应用,对数学的应用当时几乎没有人注意.

这种现象之所以产生,在很大的程度上是由战前波兰的社会经济制度所决定的.在一个工业不发达的国家里是没有条件来发展数学以为实际应用服务的.但同时也必须指出,除了这个主要的原因之外,当时的波兰数学也没有今天这样一个思想基础.在今天,数学的应用方面的工作,是为自己祖国的利益、为国民经济的发展和人民的福利服务的.

由于整个科学及其社会作用的空前增长,国民经济向数学所提出的要求的日益增多,所有这一切都要求我们在科学工作的组织方面和工作方法方面进行一番改变,以使祖国在恢复事业和国家的社会主义建设计划中充分利用科学的成就.

在数学方面,这就归结成为下面的三项基本任务:

1.克服战前波兰数学所特有的那种片面性,主要的办法就是发展数学分析、代数学和概率论方面的研究,同时也必须保留并发展战前波兰数学的理论基础(拓扑学、泛函分析、数学基础、实变函数论).

2.加强数学对技术、国民经济和物理学等方面的应用(在战前这样的几乎是不存在的).

---

① 1955年5月在中国科学院的演讲.

② 波兰科学院数学研究所所长.

3.巩固唯物主义的世界观,以之作为数学研究工作的理论基础,建立数学和实践的密切联系,同时也必须加强各个数学学科之间的密切联系.

为了达到上述的目的,必须建立起相应的集中领导,即建立一个数学方面的全国性的科学研究所.为了这个目的,在1948年的年底成立了国家数学研究所.波兰科学院成立之后(1952年),该所即成为科学院的研究机构之一.

从数学研究所成立的时候起,它的基本组织单位就是“科学研究组”,这是一种由为数不多(6 ~ 12人)的科学工作者所组成的工作集体.目前数学研究所内共有17个科学研究组,即:数学基础、拓扑学、泛函分析、代数学、实变函数、数学分析(有两个组:一个组在华沙,另一组在伏罗茨拉夫)、微分几何、解析函数、微分方程、积分方程、数理统计、产品质量的统计控制、数学对自然科学及国民经济的应用、数学的技术应用(有两个组:一组在华沙,另一组在伏罗茨拉夫)、电子计算机.

波兰科学院数学研究所现有50位教授和副教授参加工作(其中大部分同时是各高等学校的教师),有将近70名初级研究人员和技术人员,11名研究生.此外尚有100名高等学校的研究生和高年级学生,他们虽不是数学研究所的成员,但也参加数学研究的科学活动.因此,差不多我国各地区最活跃的数学家都成了波兰科学院数学研究所的工作人员.

数学研究所的科学活动是根据年度计划来进行的.制订年度所根据的原则由数学研究所统一布置,而数学所在布置这些原则时本身又依照科学院主席团的指示.各个研究组的具体计划由各组工作人员集体拟订,整个计划由数学所学术委员会讨论通过(学术委员会的主席现由W·西尔宾斯基教授担任).

有计划地进行科学研究工作,是波兰数学的组织和改造中的一个十分重要的因素,在很多方面都是十分有利的.当然,我们不能规划某一数学问题的解决,可是规划每一数学部门中的理论和实践方面有重要意义的研究方向却是完全可能的,而且是十分有益的.根据波兰科学院数学研究所的经验,我们可以说,我们工作中的某些成就之所以能够获得,主要是因为进行了有计划的研究工作之故.有一些数学问题,如果不是在计划中把它们规定下来的话,也许一直不会有人去研究.最后,一些以往很少研究的数学领域中科学著作的大量增多,也是因为有了科学研究工作计划之故.

企图制订一个无所不包的科学研究计划,而不留任何余地的作法是错误的,这会阻碍科学发展的进程.有一些科学研究工作虽然不在计划之内,可是如果他们的确能得到宝贵的成果的话,那么在进行这些工作的时候就不应受到阻碍.另一方面,对科学工作进行规划,的确能够限制一些多余的科学著作的出现.很显然,在研究计划中是不会把一些没有根据的,和其他工作没有联系的工作包括进去的.

制订科学研究工作的计划,并将计划交付大家讨论,不但可以促进各个研究组内集体工作的展开,而且更重要的是能够促进各个研究组之间的接触和合作.我们所内各个研究组之间的接触和合作已经达到十分密切的程度,以至于可以讨论数学的整体规划问题了.在数学研究所的组织中,我们是不承认所谓“纯粹数学”和“应用数学”这种传统的区分的.数学虽然有各种不同的应用,可是作为一门科学来看,它是一个统一的整体.有时候,一些按照旧的传统应该归“纯粹”数学的研究组却在解决一些“应用”数学方面的问题(例如数学基础组就帮助数学仪器组进行过一些工作).反之,一些技术性的研究组在为外界服务时也进行一些理论性的研究.

数学研究所为我国国民经济各个部门所作的工作是很多的,并且正在日益增多.我们为工业、技术、交通、农业、医疗事业以及自然科学的需要进行了各种各样的工作.

在目前数学研究所认为特别重要的问题当中,可以举出下面一些来:非线性泛函方程、随机过程、分布理论及运算子理论、近代数学方法对数理逻辑的应用、拓扑学方法对分析及几何学的应用、泛函分析对微分方程的应用、微分方程解的渐近性状、几何对象、维数分析、数理统计农业、生物学及医学方面的应用、非均齐体的弹性力学、电子计算机的设计与利用.

上面所举的问题当中,有许多是需要数学所两个或两个以上的研究组的集体合作才能解决的.为了促进这种合种,研究所每年都召开若干次学术讨论会,由不同研究组的工作人员参加,每一次会议都是用来讨论一些预先已经规定好的问题的.

经验表明这样的学术讨论会是非常合宜和有益的.今后我们准备对波兰数学家们的这一种合作方式加以更大的注意;如果可能的话,还要争取国外的数学家们来参加学术会议的工作,我们相信,通过这一方式我们和国际数学界,首先是和苏联、中华人民共和国数学界及其他人民民主国家数学界的合作将比以往更有效.

数学研究所是数学方面研究工作最重要的中心,但不是唯一的中心.在这一方面,各高等学校和波兰数学会所起的作用也是很大的.

尤其是波兰数学会所起的作用,值得特别提出来谈一谈.

第二次世界大战结束后的最初几年内,波兰数学会曾经是唯一的全国性数学组织.这个组织曾经担负了恢复波兰数学的任务.下面我们可以提一提波兰数学会所作的一些最重要的工作,这些工作当然远不是该会所从事的工作的全部.波兰数学会组织了各种数学出版物,特别是为各高等学校所迫切需要的教科书的出版;召开了四次全国数学家的大会,吸收了战后幸存的波兰数学家参加了工作.最后,数学会还进行了建立数学研究所的筹备工作.

至于科学研究工作方面,在当时,波兰数学会和各高等学校的讨论会一样,曾为科学工作者提供了相互聚会、讨论其所获结果的唯一可能性.

很显然,在目前显然科学研究工作都集中在数学研究所内进行.但这并不是说,在这方面波兰数学会的作用已经失去了意义.近几年来的经验表明,数学会的历次会议对科学研究工作的进展仍然具有很大的意义.数学会的科学工作的方式和数学研究所科学工作的方式有所不同.数学会所召开的会议,其所讲的问题更为广泛,会上所宣读的报告带有更多的报导性质;而出席会议的人则是各个不同数学领域的代表人物.这种工作方式能够促进波兰数学家们的相互合作,为科学工作创立了有利的条件.

科学研究工作当然不能成为数学组织的唯一对象,在这里我们不能忘记另外一个基本问题,那就是青年干部的挑选和培养问题.这个问题的解决,在很大的程度上取决于高等学校里的正确数学教学.最近我们的高等教育部在一些杰出的波兰数学家的参与之下拟订了一项数学的教学大纲.在拟订这个大纲时,充分地估计了波兰数学发展的一些基本前提,那就是要加强对数学分析的注意:避免培养学生中的片面性,通过专业化培养学生,使之能够从事科学研究工作、科学教学工作以及数学的应用方面的工作.

数学研究在青年干部的培养和进修方面所作的工作,首先是组织了各种各样的讨论会(本年这样的讨论会有 50 多个).此外还为工业学校毕业的学生组织了一系列专门课程,以便帮助他们补充自己的数学知识.

我们在培养干部方面所获得的结果可以认为是非常令人满意的.到目前为止,我们已经在数量上补偿了在战争期间人力上的损失.

很显然,青年干部的培养是在高等学校的配合之下来进行的(如招收研究生).在这里,我想提一提波兰数学会在挑选对数学具有特别才能的学生这一工作中所给予的宝贵帮助.波兰数学会利用前苏联的成就和方法,在全国范围内组织了所谓的"数学奥林匹克".

由于近几年来数学方面著作的日益增大(1954年共发表了180篇论文,其中包括在数学研究所内所完成的工作),对数学书刊的要求也大大增加了.数学研究所对出版工作予以很大的注意.

数学研究所出版了下列几种杂志和书籍:

1. Fundamenta Mathematicae:登载集合论、拓扑学、数学基础、实变函数、抽象代数等方面的论文.

2. Studia Mathematica:登载泛函分析、分析的抽象方法及概率论方面的论文.

3. Annales Polonici Mathematici：这是一个数学分析、几何及数论等方面的杂志.

4. Colloquium Mathematicum：这主要是一个关于数学中的新问题的杂志.

5. Zastosowania Matematyki：这是一个数学的应用方面的杂志.

6. Monografie Matematyczne：这是一套专著，每一专著都是一个数学部门的综合论述，并全面讨论该部门中的主要问题.

7. Rozprawy Matematyczne（篇幅约 50 ~ 100 页）：每书综合讨论一个专门的数学问题.

上面所列举的这些书刊当然不是波兰数学出版物的全部. 除这些书刊之外，还要介绍一下波兰科学院的中央机关刊物 —— 波兰科学院公报. 这是一个每月出版一次的刊物，登载一些简短的科学报告，其目的在于向国外科学家介绍波兰科学工作者的成就（1954 年共发表 43 篇数学报告）. 此外尚有波兰数学会的年刊（Roczniki）和国家科学出版社出版的数学教科书（数学丛书）.

数学书刊的年出版量已经超过了战前的平均水平. 书籍和教科书的出版量差不多为战前的 3 倍，就出版的份数来说，比战前的四倍还要多. 由于数学书籍出版量的增多，教科书的供应情况也比战前大大改善了. 差不多在每一个数学部门里都有合乎近代水平的波兰文教科书.

由于数学研究所出版了相当大量的书籍和刊物，我们就可以和国外建立广泛的科学文献交换关系，因而也就便利了各个主要科学机构中外国文献的供应，并创立一个中央数学图书馆，即华沙的数学研究图书馆.

这就是波兰数学组织的一般情况. 波兰人民在数学方面的成就可以说有以下几个方面：即造成了科学著作蓬勃增长，数学为其他科学部门及国民经济所作工作的原著增多；将波兰数学的进一步发展推上了正确的道路，并大大地扩大了青年干部的数量；在物质上和组织上为科学工作创立最良好的条件. 但我们也必须承认，在我们的工作中还存在许多缺点和困难，这些缺点和困难必须予以克服，这就是最近几年内我们的任务.

［肇桐译］



写在 1956 年数学竞赛结束之后

华罗庚

1956 年度北京市的数学竞赛已经结束了.在这次竞赛中,最好的成绩几乎达到了我们预计的最高标准.一般讲来,绝大部分都达到了优秀中学生的水平.在第一次数学竞赛中,就出现这样优秀的成绩,实在是令人十分兴奋的.这显示了新中国青年们的卓越才能和学习毅力,也说明了在我国的科学事业中,已经涌现了强有力的后备队伍.

数学是研究量的关系和空间形式的科学,在一切的科学中,都不可能缺少量的关系,因此,数学也就很自然地渗透到科学的各个领域之中.掌握好数学,就会给我们顺利地进入科学的其他领域,打下一个牢固的基础,它将很好地为各项科学服务.从这一意义来看,这次数学竞赛,不仅数学界为之欢欣,祖国整个科学界也应当把它当作一件喜事看待.

在这里,我为青年朋友们的出色成就而庆幸.我也希望,这次的竞赛带给优胜者的不是骄傲和自满,而是更加谦虚,更加努力,继续和同学们一起共同前进.我更希望,没有录取的同学不要气馁,不要为一时的失败而丧失了信心.在长距离的赛跑中,它的优胜者是最有持久力的人.

在这里,我要说明一下有些中学教师和其他方面的朋友对这次竞赛所提出的一些问题.

有人说:试题太难了!尤其是第二场的题,在学校的习题里找不到和它性质相同的.首先要说明,数学竞赛的性质和学校中的考试是不同的,和大学的入学考试也是不同的!我们的要求是,参加竞赛的同学不但会代公式,会用定理,而且更重要的,是能够灵活地掌握已知的原则,和利用这些原则去解决问题的能力,甚至于创造出新的办法、新的原则去解决问题.这样的要求,可以很正确地考验和锻炼同学们的数学才能.所谓"数学才能",并不是很快地会背书中的公式和定理,很快地会做模仿性的习题,而在于能深入地了解数学,透过公式和定理来洞察其中的精神和实质,从而灵活地运用这些公式和定理去解决新问题.大家都知道:对学习数学的同学的要求,是"计算技巧的熟练","几何直观能力的培养"和"创造性地思考能力".我们就是根据这些原则来举行竞赛的.这样的要求也许是高了一些,但愈是这样,才愈能提高数学爱好者的兴趣,增强他们的数学能力.而且,这对于数学竞赛的优胜者来说,实际上并不是太"难"的.另一方面,这种所谓"难",也只是限于对数学的高度熟练,而不是出什么奇奇怪怪的题目.如果有一个学校的教师,错误地理解了数学竞赛的要求,给同学出了很多难题,以"培养"数学竞赛的优胜

者.我们必须反对,因为这是贻误青年的有害的做法.很明显,从做难题入手,是不会收到好的效果的.纵使学生做了一个类型的难题,而对另一类型,却依然是生疏,并且难题是很多的,层出不穷的,又哪里做得完呢?单靠做些奇奇怪怪的难题,是锻炼不出很高的才能来的,只有掌握了原则,才能无往不利,才能创造性地灵活运用,因而才能有所创造.因为原则的运用,不是只能做这一套,就是换另外一套,也照样行!会解决各种不同形式的难题.所以,想从多做难题这条道路争取做优胜者,恐怕是不容易的,也是不应该的.我希望老师们和同学们能够从基本概念上去教和学,不要钻在劳而无功的难题上.当然,适度的难题锻炼还是有必要的.

也有人说:这次竞赛的题目中缺少计算题.是的,这是一个缺点.测验计算技巧是十分重要的,有趣的计算题不是死代公式或成法就可以完成的,而是需要机智和技巧.但是,既包括"技巧"而同时又能在短时间内完成,这样的计算题目很难找到合适的.我再声明一句:竞赛的题目中没有计算题,并不说明计算题不重要.相反地,在一切应用中,都需要计算出具体的数字来,而不是代一个公式就可了事的."计算"是数学的理论和其他科学间的联系的一个重要环节,一个决不可少的环节.所以,同学们要练好这套本领,不要因为计算题枯燥无味,太繁琐而忽视了它.否则,在未来的科学道路上,将会遇到困难的.

数学竞赛的前几名优胜者收到了不少的来信,有些是祝贺他们的,但也有些对他们的获胜表示不服气,向他们提出"挑战":"看!谁到底更好些."我认为这样由于不服气而来的挑战是不好的,也是不必要的.青年们倔强,不甘于失败,这自然是好的.可是倔强并不是说不要谦逊精神了,不要实事求是的态度了.竞赛失败者的正确态度,应当是一方面要检查自己竞赛失败的原因,以后努力追上去;另一方面也应当祝贺优胜者,尊敬他们的成就,学习他们成功的经验.应当把同学的任何一点成功,都看做是集体的荣誉,都看做是自己伙伴的光彩.妒忌,是最没有出息的.不怕暂时自己的才能没有发挥出来,怕的是失去信心或是不肯作辛勤的努力.谁敢说,在参加这次数学竞赛没有获选的同学中,在将来,就没有比这次优胜者更优秀的呢?

在这里,我要代青年们表达一下他们对科学家的要求.

在这次竞赛中,我们举办了一系列的演讲,同学们都感到很大的兴趣,并且渴望着继续下去.在一次通俗演讲会上,有些同学和我谈,希望各方面的科学家们能够多举办些演讲,以便丰富他们的科学知识.他们再三地要求我把这个意见转达给敬爱的科学家们.他们那样恳切,那样渴望,使人不能不感动,不能不下定决心,无论如何也要满足他们.为青年们做这样的工作,跟我们科学家的工作和意愿应该是完全一致的.我们有责任关怀下一代的成长,要经常地通过各种方式给他们以精神食粮,不断地接近他们,多方面给他们以指导.这样,使得我们的接班人更能合乎我们的要求.我体会到了青少年们的急切心情,因此,诚恳地代他们向科学家们呼吁:经常地和他们见面,给他们一些具体的指导吧!满足他们求知的愿望吧!

在全国范围内,今年只有4个城市——京、津、沪、汉举行了数学竞赛,很多城市的数学爱好者来信,希望这种活动能够推广到他们的城市中去,这充分表现了他们对科学事

业的热爱,是极可喜的.但是,由于我们没有经验,力量又不足,今年没有可能实现大家的愿望.明年,我们一定要适当地给以推广,而且我们有"比今年办得更好"的信心.要实现这个愿望,十分需要得到各方面的支持.

(原载 1956 年 5 月 31 日《光明日报》)



夫妇圆桌公式的相互关系

曾宪昌

假定 n 对夫妻圆桌而坐,男女相间,夫妻不得连席的坐法,共有 $f(n)$ 种. 我在《数学通讯》1951 年 6 月号曾经证明下式

$$f(n) = 2 \cdot n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{(n+r-1)!\,r!}{(n-r)!\,(2r)!} \qquad ①$$

如果规定 $f(n) = (n-1)!\lambda_n$,《数学通讯》1950 年 8 月号路见可同志曾经证明下式

$$(n-1)\lambda_{n+1} = (n^2-n+1)(\lambda_n+\lambda_{n-1}) + n\lambda_{n-2} \qquad ②$$

尤兆桢同志曾经证明下式

$$\lambda_{n+1} = (n+1)\lambda_n + 2\lambda_{n-1} - (n-3)\lambda_{n-2} - \lambda_{n-3} \qquad ③$$

又 M. Laisant 与 M. C. Moreau 曾经得到下式

$$(n-1)\lambda_{n+1} = (n^2-1)\lambda_n + (n+1)\lambda_{n-1} + (-1)^n 4 \qquad ④$$

下面利用 ① 式来证明 ④ 式,因而证明 ②、③ 两式.

这是因为从 ① 式,我们有下列三式

$$\begin{aligned}(n^2-1)\lambda_n &= 2(n^2-1)n\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\frac{(n+r-1)!\,r!}{(n-r)!\,(2r)!} = \\ &2(n^2-1)n\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{n-r}\frac{(n+r-1)!\,r!}{(n-r)!\,(2r)!} - (n+1)!\,(n-1) = \\ &2(n^2-1)n\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n+1-r}\frac{(n+r-2)!\,(r-1)!}{(n-r+1)!\,(2r-2)!} - (n+1)!\,(n-1)\end{aligned} \qquad ⑤$$

$$\begin{aligned}(n+1)\lambda_{n-1} &= 2(n^2-1)\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\frac{(n+r-2)!\,r!}{(n-r-1)!\,(2r)!} = \\ &2(-1)^{n-1}(n+1) + 2(n^2-1)\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r+1}\frac{(n+r-2)!\,r!}{(n-r-1)!\,(2r)!}\end{aligned} \qquad ⑥$$

$$\begin{aligned}(n-1)\lambda_{n+1} &= 2(n^2-1)\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^{n+1-r}\frac{(n+r)!\,r!}{(n-r+1)!\,(2r)!} = \\ &2(-1)^{n+1}(n-1) + 2(n^2-1)\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n+1-r}\frac{(n+r)r!}{(n-r+1)!\,(2r)!} - \\ &(n+1)!\,(n-1)\end{aligned} \qquad ⑦$$

又因为下列两式成立

$$\frac{n\cdot(n+r-2)!(r-1)!}{(n-r+1)!(2r-2)!}+\frac{(n+r-2)!r!}{(n-r-1)!(2r)!}=\frac{(n+r)!r!}{(n+1-r)!(2r)!}$$

$$2(-1)^{n-1}(n+1)+(-1)^{n}4=2(-1)^{n+1}(n-1)$$

因此 ⑤、⑥ 两式的总和加上$(-1)^n4$就得 ⑦ 式,这就证明了 ④ 式.

再把 ④ 式里面 n 换成 $n-1$ 就得下式

$$(n-2)\lambda_n=(n^2-2n)\lambda_{n-1}+n\lambda_{n-2}+(-1)^{n-1}4 \qquad ⑧$$

又把 ④、⑧ 两式相加就得

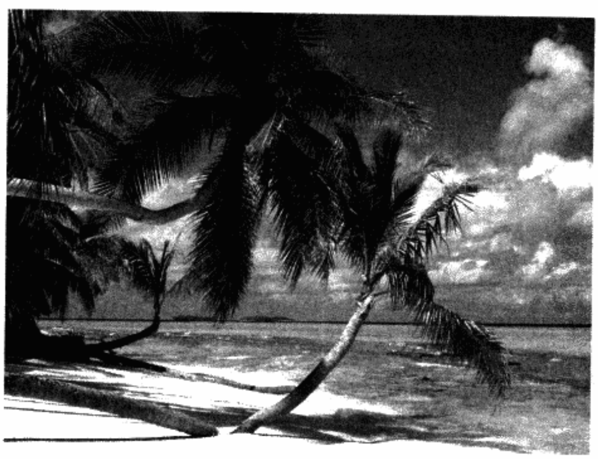
$$(n-1)\lambda_{n+1}+(n-2)\lambda_n=(n^2-1)\lambda_n+(n^2-n+1)\lambda_{n-1}+n\lambda_{n-2}$$

上式移项就可以得到 ② 式. 再把 ② 式里面的 n 换成 $n-1$ 就有

$$(n-2)\lambda_n=(n^2-3n+3)(\lambda_{n-1}+\lambda_{n-2})+(n-1)\lambda_{n-3} \qquad ⑨$$

从 ② 式减去 ⑨ 式,再用$(n-1)$除就得到 ③.

[编者注] 这是建国初期初数研究的一个案例. 与今天相比有三个特点:一是连续性,即持续关注某一个小课题,多次返回到自己喜爱的题目中去,像高斯对待二次互反律一样;二是继承性,即跟踪他人成果,在其之上做文章;三是细节性,即追求完美,注重细节. 这三点都是当今极其缺乏的. 许多作者跟风研究,什么时髦就去说上两句,没有自己所长. 在越来越多的领域知道的越来越少. 还有很多人不查文献,闭门造车. 使得初数研究不深入,平面化. 三是"粗制滥造"不求完美. James Newman 说:"数学是一个工具,是一种语言,是一幅地图. 它是一种艺术品,是以其自身为目标的产物,是热衷于完美性的成就."



经典重温

几何学中的归纳法

[俄] 亚格劳姆

1 用归纳法的计算

数学归纳法在几何学中(跟这个方法在数论和代数中的应用近似)最自然的应用是在解几何计算题方面.我们来考察几个例子.

例 1 试计算半径为 R 的圆的内接正 2^n 边形的 a_{2^n}.

解 (1) 当 $n=2$ 时,正 2^n 边形是正方形;它的边 $a_4=R\sqrt{2}$.其次,依据二倍公式

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

我们求出:正八边形的边 $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

正十六边形的边 $a_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

正三十二边形的边 $a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

所以可以假设:当 $n\geqslant 2$ 时,内接正 2^n 边形的边等于

$$a'_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{个}2}} \quad ①$$

(2) 假设内接正 2^n 边形的边由公式 ① 表示.在这种情形下,按二倍公式,有

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-R^2\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{个}2}}{4}}}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{个}2}}$$

由此可见,公式 ① 对于所有的 n 都成立.

由公式 ① 推出,半径 R 的圆的周长 $C=2\pi R$ 等于式子 $2^nR\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{个}2}}$ 当 n 无限增大的极限,因而

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{个}2}}=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1\text{个}2}}$$

题 1 试利用公式 ①,证明:π 等于式子

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})})}\cdots}$$

当分母中因子(平方根)的个数无限增大时越近的极限(维叶特[①]公式).因子的组成规律由已写出的前三个确定.

提示 用 S_{2^n} 表示半径 R 的圆的内接正 2^n 边形的面积,而用 h_{2^n} 表示它的垂辐.那么由公式①,可以推出

$$h_{2^n}=\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}=\frac{R}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{个}2}$$

和

$$S_{2^n}=\frac{1}{2}(2^n a_{2^n})=h_{2^n}=2^{n-2}R^2\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-3\text{个}2}}=2^{n-2}Ra_{2^{n-1}}$$

(这里假设 $n\geqslant 3$)其次,有

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}}=\frac{2^{n-1}a_{2^n}h_{2^n}}{2^{n-1}Ra_{2^n}}=\frac{h_{2^n}}{R}=\cos\frac{180^\circ}{2^n}$$

由此推出

$$\frac{S_4}{S_{2^n}}=\frac{S_4}{S_8}\cdot\frac{S_8}{S_{16}}\cdot\cdots\cdot\frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}}=\cos\frac{180^\circ}{4}\cos\frac{180^\circ}{8}\cdots\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}$$

因为 $S_4=2R^2$,而且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\pi R^2$,所以 $\frac{2}{\pi}$ 等于式子

$$\cos 45^\circ\cos\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{4}\cdots$$

的极限,然后就只剩下利用公式

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

了.

例 2 试指出具有一定周长 P 的正 2^n 边形的内切圆和外接圆的半径 r_n 和 R_n 的计算规律.

解 (1) $r_2=\frac{P}{8}$, $R_2=\frac{P\sqrt{2}}{8}$.

(2)已知周长 P 的正 2^n 边形的内切圆和外接圆的半径 r_n 和 R_n,我们来计算具有同样周长的正 2^{n+1} 边形的内切圆和外接圆的半径 r_{n+1} 和 R_{n+1}.设 AB(图1)是周长 P 的正 2^n 边形的边,O 是它的中心,C 是弧 AB 的中点,D 是弦 AB 的中点;其次,设 EF 是三角形 ABC 的均线,G 是它的中点.因为

$$\angle EOF=\angle EOC+\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB$$

① 维叶特(1540 ~ 1603 年)是著名的法国数学家,代数符号体系的创始人之一.

所以 EF 等于用 OE 作半径的圆的内接正 2^{n+1} 边形的边，而且这个 2^{n+1} 边形的周长等于

$$2^{n+1}EF = 2^{n+1}\frac{AB}{2} = 2^{n}AB$$

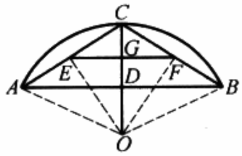


图 1

就是也等于 P. 这样，$r_{n+1} = OG$，而且 $R_{n+1} = OE$. 其次，显然 $OC - OG = OG - OD$，就是 $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$，由此 $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$. 最后，由直角三角形 OEC，有 $OE^2 = OC \cdot OG$，就是 $R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$，因而 $R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$. 于是，最后

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad 和 \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$$

考察序列 r_2、R_2、r_3、R_3、…、r_n、R_n、… 这个序列的项趋近周长 P 的圆的半径，就是趋近于 $\frac{P}{2\pi}$. 在特殊情况，当 $P = 2$ 时有 $r_2 = \frac{1}{4}$ 和 $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 再假设 $r_1 = 0, R_1 = \frac{1}{2}$，那么就得到下面的定理：

如果作数列

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}+1}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1}{16}, \cdots$$

它最前面的两项等于 0 和 $\frac{1}{2}$，其余各项交替地等于本身前两项的算术均值和几何均值，那么这个数列的项趋近于 $\frac{1}{\pi}$.

例 2 试确定 n 边形（不一定是凸多边形！）的内角和.

解 (1) 三角形的三内角的和等于 $2d$①. 四边形四内角的和等于 $4d$，因为一个四边形可以分成两个三角形（图 2）.

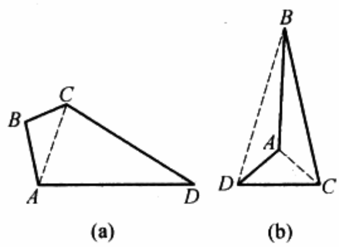


图 2

(2) 假设已经证明任意 k 边形（这里 $k < n$）的 k 个内角的和等于 $2d(k-2)$，我们来考察 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$.

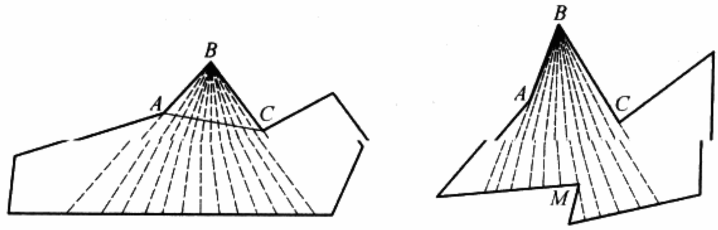
首先我们来证明：在任何多边形里可以求得一条对角线②，把它分成边数较少的两个多边形（对于凸多边形，这是显然可以的）. 设 A、B、C 是多边形的任意三个相邻的顶点. 经过顶点 B 引所有可能的射线，充满多边形的内角 ABC，使它们直到和多边形的周界相交为止. 有两种可能情况：

甲，所有射线都辐射在多边形的同一条边上（图(3(a)). 在这种情形，对角线 AC 把我们的多边形分成一个 $(n-1)$ 边形和一个三角形.

① d 表示一直角，等于 90°. —— 译者注

② 注意，凹多边形的对角线可能和多边形相交，也可能完全在多边形外部.

乙,不是所有的射线都辐射在同一条边上(图 3(b)).在这种情形,射线之一经过多边形的某一顶点 M,而 BM 把多边形分成边数较少的两个多边形.



(a) (b)

图 3

现在回头来证明我们的基本断定.在 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中引对角线,把它分成一个 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 和一个 $(n-k+2)$ 边形 $A_1A_kA_{k+1}\cdots A_n$.按照所作的假设,k 边形与 $(n-k+2)$ 边形的内角的和分别等于 $2d(k-2)$ 与 $2d[(n-k+2)-2]=2d(n-k)$,所以 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的角的和等于

$$2d(k-2)+2d(n-k)=2d(n-2)$$

由此推出:我们的断定对于所有的 n 都是正确的.

像我们在例 3 中见到的,在任何多边形里都可以找到一条对角线,把它分成两个边数较少的多边形.这两个多边形,如果都不是三角形,那么每一个可以再分成两个边数较少的多边形,其余依此类推.因而每个多边形都可以用不相交的对角线分成三角形.

例 4 一个 n 边形(不一定是凸的)用不相交的对角线可以分成几个三角形?

解 (1) 对三角形来说,这个数等于 1(在三角形里不能引任何对角线);对四边形来说,这个数显然等于 2(图 2(a) 和(b)).

(2) 假设我们已经知道每个 k 边形(这里 $k<n$)都可以用不相交的对角线分成 $k-2$ 个三角形(跟分的方法无关).我们来考察把 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成三角形的一种分法.设 A_1A_k 是这种分法的一条对角线,它把 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成一个 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 和一个 $(n-k+2)$ 边形 $A_1A_kA_{k+1}\cdots A_n$.根据所作的假设,分成的三角形的总数将等于

$$(k-2)+[(n-k+2)-2]=n-2$$

这就对于所有的 n 证明了我们的断定.

题 2 试决定把 n 边形分成三角形的不相交的对角线的条数 N.

提示 由于 n 边形的 N 条不相交的对角线和 n 条边就是 $n-2$ 个三角形的边(见例 4),所以

$$2N+n=3(n-2),\quad N=n-3$$

例 5 试说出用不相交的对角线把凸 n 边形分成三角形的方法数 $P(n)$ 的计算法则.

解 (1) 对于三角形,这个数显然等于 1:$P(3)=1$.

(2) 假设我们已经对于所有的 $k<n$ 确定了数 $P(k)$.现在来求在这种情形下,$P(n)$ 等于什么.为了这个目的,我们来考察 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$(图 4).在把它分成三角形的任何

分法中,边 A_1A_2 总是一个分成的三角形的一条边,这个三角形的第三个顶点可能跟点 A_3、A_4、…、A_n 中的一个点相重.当这个顶点跟点 A_3 重合时,n 边形的分法数等于 $(n-1)$ 边形 $A_1A_3A_4\cdots A_n$ 分成三角形的分法数,就是等于 $P(n-1)$.当这个顶点跟点 A_4 重合时,分法数等于 $(n-2)$ 边形 $A_1A_4A_5\cdots A_n$ 的分法数,就是等于 $P(n-2)=P(n-2)P(3)$;当它跟 A_5 重合时,分法数等于 $P(n-3)\cdot P(4)$,因为这时候 $(n-3)$ 边形 $A_1A_5\cdots A_n$ 的每一种分法都可以跟四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 的每一种分法相结合,其余依此类推.这样,我们得到了下列关系式

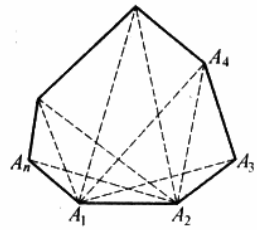


图 4

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+\cdots+P(3)P(n-2)+P(n-1). \quad ②$$

利用这个公式,我们依次得到

$P(4)=P(3)+P(3)=2$

$P(5)=P(4)+P(3)P(3)+P(4)=5$

$P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14$

$P(7)=P(6)+P(5)P(3)+P(4)P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42$

$P(8)=P(7)+P(6)P(3)+P(5)P(4)+P(4)P(5)+P(3)P(6)+P(7)=132$

⋮

附注 利用公式②,可以证明:对于任何 n,有

$$P(n)=\frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}$$

题 3 如果凸 n 边形的任何三条对角线都不相交于一点,这个 n 边形被它所有的对角线分成几部分?

提示 凸 $(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ 被对角线 A_1A_n 分成一个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和一个三角形 $A_1A_nA_{n+1}$.把 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 被自己的对角线分成的部分 $F(n)$ 当作已知数,我们来计算由于增添顶点 A_{n+1} 而增加了几部分(这个数比由顶点 A_{n+1} 发出的对角线被其余的对角线分成的部分数大一).这样我们求得关系式

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+1(n-2)+2(n-3)+\cdots+(n-3)2+(n-2)1$$

可以把它改写成

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=F(n)+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}-2$$

把 $F(n),F(n-1),\cdots,F(4)$ 的值加起来就得到

$$F(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

2 用归纳法的证明

上节里有几个问题,可以看成利用数学归纳法证明几何定理的例子.例如,例 3 的命

题就可以这样表述:试证明 n 边形的角的和等于 $2d(n-2)$;在例4中证明了:不相交的对角线把 n 边形分成 $n-2$ 个三角形.在这一节里,我们要考察更进一步的这种例子.

例6 已知 n 个任意的正方形.试证明:可以把它们分成几部分,使分成的部分能够凑成一个新的正方形.

解 (1)当 $n=1$ 时,我们的断定是用不到证明的.我们来证明:当 $n=2$ 时,它也成立.用 x 和 y 分别表示已知正方形 $ABCD$ 和 $abcd$ 的边;设 $x \geqslant y$.在边是 x 的正方形 $ABCD$ 的边上(图5(a))截取线段 $AM=BN=CP=DQ=\frac{x+y}{2}$,并沿直线 MP 和 NQ(容易看出,这两条直线相交于正方形的中心 O,并且互相垂直)把这个正方形切开,分成四个相同的部分.把这四块拼到第二个正方形上,像图5(b)所示,得到的图形也是一个正方形.因为在点 M'、N'、P'、Q' 处的角互补,角 A'、B'、C'、D' 是直角,而且 $A'B'=B'C'=C'D'=D'A'$.

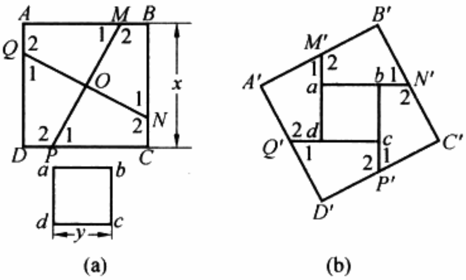


图5

(2)假设我们的断定对于 n 个正方形已经证明了,并且假设已知 $n+1$ 个正方形 K_1、K_2、…、K_n、K_{n+1}.

从这些正方形中取任意两个,比如说取 K_n 和 K_{n+1}.像上面第1部分所示,把这两个正方形里的一个切开,并且把切成的小块拼到第二个正方形上,就可以得到一个新的正方形 K'.这以后,按照我们所作的假设,正方形 K_1、K_2、…、K_{n-1}、K' 都可以分成部分,使这些部分能够凑成一个新的正方形,这就是要证明的.

例7 已知三角形 ABC,经过它的顶点 C 引 $n-1$ 条直线 CM_1、CM_2、…、CM_{n-1},把三角形分成 n 个小三角形 ACM_1、M_1CM_2、…、$M_{n-1}CB$.用 r_1、r_2…、r_n 和 ρ_1、ρ_2、…、ρ_n 分别表示这些三角形的内切圆和旁切圆的半径(所有旁切圆都在三角形的角 C 内;见图6(a)),并且假定 r 和 ρ 是三角形 ABC 本身的内切圆和旁切圆的半径.试证明

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdot\cdots\cdot\frac{r_n}{\rho_n}=\frac{r}{\rho}$$

解 用 S 表示三角形 ABC 的面积,用 p 表示它的周长的一半;那么正像大家知道的,$S=pr$.另一方面,如果 O 是这个三角形的旁切圆的圆心(图6(b)),那么

$$S=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OCB}-S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}b\rho+\frac{1}{2}a\rho-\frac{1}{2}c\rho=\frac{1}{2}(b+a-c)\rho=(p-c)\rho$$

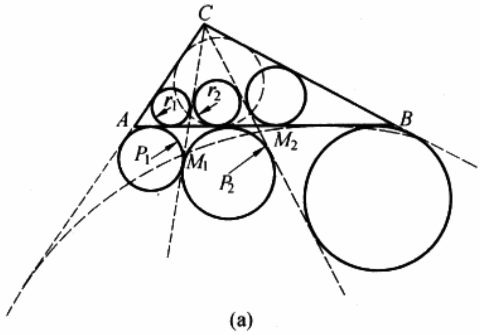
因而

$$pr=(p-c)\rho,\quad \frac{r}{\rho}=\frac{p-c}{p}$$

其次,按照三角的著名公式

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

和



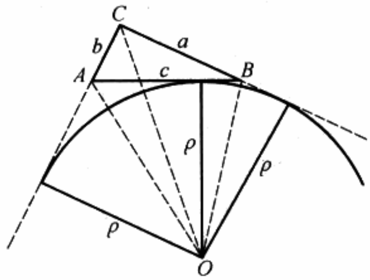


图 6

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

可得

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{p-c}{p}=\frac{r}{\rho} \qquad ③$$

作了这些预先说明以后，我们再回过头来证明定理：

(1) 当 $n=1$ 时，我们的断定用不到证明．我们来证明当 $n=2$ 时它的正确性．在这种情形，三角形 ABC 被直线 CM 分成两个小三角形 ACM 和 CMB．根据公式 ③

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{CMA}{2}\cdot\tan\frac{CMB}{2}\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{CMA}{2}\mathrm{tg}\frac{180^\circ-\angle CMA}{2}\tan\frac{B}{2}=$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{\rho}$$

(2) 假设我们的断定对于 $n-1$ 条直线已经证明了．设已知 n 条直线 CM_1、CM_2、…、CM_n，把三角形 ABC 分成 $n+1$ 个小三角形 ACM_1、M_1CM_2、…、M_nCB．考察这些三角形里面的两个，比如说考察 ACM_1 和 CM_1M_2．则有

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r_{12}}{\rho_{12}}$$

这里 r_{12} 和 ρ_{12} 是三角形 ACM_2 的内切圆半径和旁切圆半径．但是对于 n 个三角形 ACM_2、M_2CM_3、…、M_nCB，根据所作的假设，等式

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}}\cdot\frac{r_3}{\rho_3}\cdots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$$

成立，因而

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$$

题 4　设直线 CM 和 CM' 用两种方法把三角形 ABC 分成两个三角形 ACM、CMB 和 ACM'、$CM'B$；r_1、r_2 和 r'_1、r'_2 各是这些三角形的内切圆半径．试证明：如果 $r_1=r'_1$，那么 $r_2=r'_2$，而且外接圆的半径也有类似的性质．

提示　用例 7 的符号，先证明

$$\frac{r}{\rho} = 1 - \frac{2r}{h} \quad 和 \quad \frac{\rho}{r} = 1 + \frac{2\rho}{h}$$

（这时的 h 是由顶点 C 所作的高）由此推出等式

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r'_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r'_2}{h}\right)$$

和

$$\left(1 + \frac{2\rho_2}{h}\right)\left(1 + \frac{2\rho_2}{h}\right) = 1 + \frac{2\rho}{h} = \left(1 + \frac{2\rho'_1}{h}\right)\left(1 + \frac{2\rho'_2}{h}\right)$$

题 5 沿用例 7 的符号,试证明

$$\frac{r_1 + \rho_1}{R_1} + \frac{r_2 + \rho_2}{R_2} + \cdots + \frac{r_n + \rho_n}{R_n} = \frac{r + \rho}{R}$$

这里 R_1、R_2、…、R_n 和 R 各是三角形 ACM_1、M_1CM_2、…、M_nCB 和 ABC 的外接圆的半径.

提示 大家知道 $S = pr = (p - c)\rho = \frac{abc}{4R}$,由此应用余弦定理,就得到

$$\frac{r + \rho}{2R} = \frac{\frac{S}{p} + \frac{S}{p - c}}{\frac{abc}{2S}} = \frac{(a + b)[c^2 - (a - b)^2]}{2abc} =$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos CAB + \cos CBA$$

题 6 已知经过点 O 的 n 个圆 C_1、C_2、…、C_n;分别用 A_1、A_2、…、A_n 表示圆 C_1 和 C_2、C_2 和 C_3、…、C_n 和 C_1 的第二个交点(图 7(a)).设 B_1 是圆 C_1 上不同于 O 和 A_1 的任意一点.引割线 B_1A_1 交圆 C_2 于点 B_2,然后引割线 B_2A_2,交圆 C_3 于点 B_3,以下类推(当点 B_2 和 A_2 重合时,不能引割线,我们就经过点 A_2 引圆 C_2 的切线).试证明:最后在圆 C_1 得到的点 B_{n+1} 和 B_1 重合.

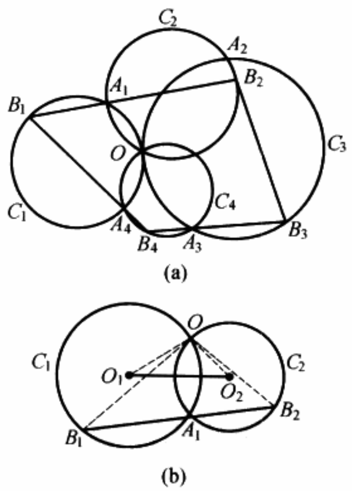


图 7

提示 先证明下面的辅助定理.设 O_1 和 O_2 是相交于点 O 的两圆 C_1 和 C_2 的圆心,B_1B_2 是经过这两个圆的第二个交点 A_1 的割线(图 7(b));那么线段 B_1B_2 和 O_1O_2 从点 O 看的视角相等.然后来证明对于三个圆提出的定理.此后,假设定理对于 $n - 1$ 个圆成立,而考察 n 个圆 C_1、C_2、…、C_n.经过点 B_{n-1} 和圆 C_{n-1} 跟 C_1 的交点引割线;把归纳法的假设应用到 $n - 1$ 个圆 C_1、C_2、…、C_{n-1}.

设在平面上给出连结一些点 A_1、A_2、…、A_p 而没有另外公共点的线网;我们还假设这个网是"结成一块的",就是从点 A_1、A_2、…、A_p 中的每一个点只沿着网线走,都能到达任意的另一点(联络性).这种线网叫做地图,给出的点叫做地图的顶点,相邻两点间的曲线段叫做地图的国境,平面被国境分成的各部分(无限远外部区域也算在内)叫做地图的

国家.例如在图 8 上,点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8 是地图的顶点,曲线 A_1A_2、A_2A_7、A_1A_6、A_6A_7、A_4A_1、A_4A_3、A_3A_6、A_6A_5、A_5A_7、A_4A_8 是它的国境,区域 σ_1、σ_2、σ_3 和无限远外部区域 σ 是它的国家.

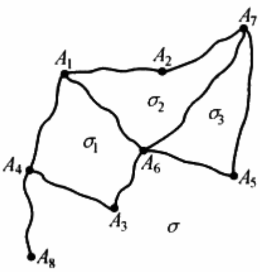


图 8

例 8 欧拉定理:用 s 表示一张任意地图的国家数,用 l 表示它的国境数,用 p 表示顶点数,那么

$$s + p = l + 2$$

证明 关于地图的国境数 l 来进行归纳.

(1) 设 $l = 0$,那么 $s = 1, p = 1$;在这种情形,有

$$s + p = l + 2$$

(2) 假设定理对于有 n 条国境的任意地图都成立,我们来考察含有 $l = n + 1$ 条国境、s 个国家和 p 个顶点的地图.有两种可能情形.

(甲) 对于地图的任意两个顶点,沿着地图的国境存在唯一的一条连结它们的路径(根据地图的联络性,至少有一条这种路径).在这种情形,地图上一条闭线也没有,因而它像图 9 所示的形式;同时 $s = 1$.我们来证明:在这种地图上至少能找到一个顶点,只具有一条国境(例如图 9 中的顶点 A_1,这种顶点叫做极端顶点).事实上,我们取地图的任意一个顶点.如果它不是极端顶点,那么它至少是两条国境的端点.沿这两条国境之一走到它的第二个顶点.如果这个顶点也不是极端的,那么它就是另外某一条国境的端点;沿着这条国境走到它的第二个端点,以下类推.因为按照条件,地图上没有闭线,所以我们不能加到任何一个以前经过的顶点,而且根据地图顶点数的有限性,最后一定会走到一个已经是极端的顶点.把这个顶点跟拿它当端点的那条唯一的国境除去,我们就得到一幅新的地图,在这幅地图上,有

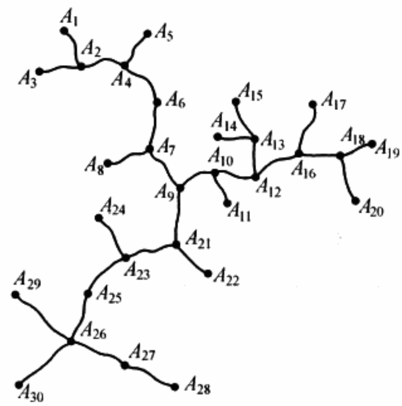


图 9

$$l' = l - 1 = n, \quad s' = s = 1, \quad p' = p - 1$$

而且这幅新地图自然仍是联络的.根据归纳法的假设,有

$$s' + p' = l' + 2$$

由此

$$s + p = l + 2$$

(乙) 两个顶点存在一条以上的连结路径(图 8).在这种情形,地图上有一个闭线经过这两个顶点.除掉这个闭线的一条国境(不连顶点),我们就得到一幅新的联络的地图.在这幅地图上,有

$$l' = l - 1 = n, \quad p' = p, \quad s' = s - 1$$

按照归纳法的假设,有

$$s' + p' = l' + 2$$

由此

$$s + p = l + 2$$

例 9 试证明:如果在地图的每个顶点上会聚的国境都至少有三条(就是地图上没有像图 8 中 A_2、A_3、A_5、A_8 这样的顶点和象 A_4A_8 这样的国境),那么在地图上就能找到一个国家,它的国境数不会大于 5.

解 因为在地图的 p 个顶点上会聚的国境都至少有三条,所以 $3p$ 不会大于国境数的两倍 $2l$(两倍是因为每条国境连结两个顶点).由此

$$p \leqslant \frac{2}{3}l \tag{④}$$

现在假设地图上 s 个国家里的每一个国家,国境数都不小于 6.那么 $6s$ 不会大于国境数的两倍 $2l$(两倍是因为每条国境分开两个国家),因此

$$s \leqslant \frac{1}{3}l \tag{⑤}$$

不等式 ④ 和 ⑤ 给出

$$s + p \leqslant \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}l = l$$

这和欧拉定理矛盾.因此,"每个国家的国境数都不小于 6" 这个假设不正确.

题 7 在平面上给定五个点.试证明:不能用两两不相交的曲线把这五个点里每两个都连结起来(图 10).

提示 假设所有这些点都能按照问题的条件连结起来,那么就要得到一幅地图,它有 5 个顶点,$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ 个国境,因而有 7 个国家(欧拉定理!).但是这种地图是不可能有的,这可以从跟导出不等式 ⑤ 近似的讨论推出来.

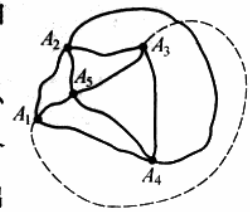


图 10

题 8 试证明,如果 p 是凸多面体的顶点数,l 是棱数,s 是面数,那么

$$s + p = l + 2$$

(关于多面体的欧拉定理).

提示 把多面体放在半径足够大的球里,并且从球心(可以认为它在多面体内部)把多面体所有的点射影到球面上.从得到的在球面上的地图的任意的、不属于任何国境的点,射影到跟球面的直径对点相切的平面上(球极射影).把欧拉定理应用在得到的平面地图.

题 9 试证明:任何多面体都具有三角形的、四边形的或五边形的面.

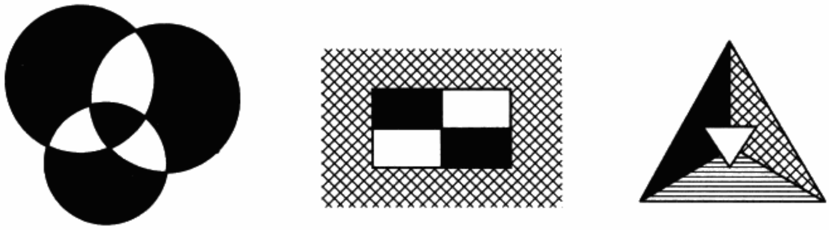
提示 参看例 9.

题 10 试证明:具有七个棱的多面体是不存在的.

提示 应用欧拉定理.

地图染色问题

设在平面上给出了一幅地图.如果它上面每个国家都用一定颜料染了色,而且任何两个相邻的国家染的颜色都不相同,那么我们就说:**它正确地染了色**.任何一幅地理图都可以作为正确染了色的地图的例子.每一幅地图都可以正确地染色,比如说,把它每个国家都染成一种特别颜色.但是这种染色法不经济.自然会发生这样一个问题:最少要用几种颜料,才可以给一幅地图正确地染色?显然,像图 11(a) 所示的地图,用两种颜料就可以正确地染色了;要把图 11(b) 所示的地图正确染色,必须用三种颜料;而图 11(c) 所示的地图,却要用四种颜料才能正确染色的地图.首先注意到这种情况的,大概是一百多年前著名的德国数学家贸比乌斯.从那时起有许多伟大的学者试图解决这个四色问题,也就是说,试图证明:四种颜料就足够给任意的地图染色,或者找出一幅地图,用四种颜料染色不够.但是直到今天,这个问题还没有人解决.只不过建立了:要正确染色任何地图,无论如何用五种颜料终归够了.也不难求出使地图用两种或三种颜料就可以染色的条件.此外,我们还要指出地图能用四种颜料就可以染色的条件.此外,我们还要指出地图能用四种颜料正确染色的一种必要而且充分的条件;但是,这个条件对于任意的地图是不是满足,或者是不是有满足这个条件的地图,这个问题仍然是个悬案.



(a) (b) (c)

图 11



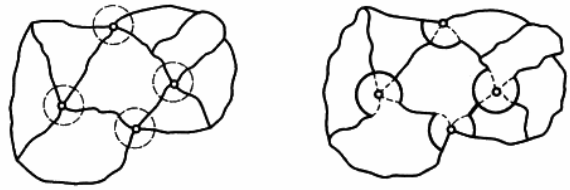
图 12

有趣的是,对于看起来构造比平面复杂的一些曲面,地图染色问题倒已经完全解决了.例如,已经证明了:在环面上(图 12),要用七种颜料才可以把任何地图正确染色,而且存在着不能用六种颜料正确染色的地图.

以后我们假设:地图上没有不分隔开的国境,也就是没有两边属于同一个国家的国境,因为不这样,问题的提法就没有意义了.我们还假设:地图上没有只会聚两条国境的顶点,因为这种顶点是多余的.换句话说,我们以后只考察每个顶点至少会聚三条国境的地图,也就是满足例 9 的条件的那种地图.这个例子的结果以后不止一次会用到.为了方便,我们还要认为:地图上只有一个无限远的区域,也就是说,地图上没有“伸向无限远的”国境.可以证明:不要最后这个条件,以后的结论没有一个会改变.

每个顶点都恰巧会聚三条国境的地图叫做**正规的**地图.设给出任意一幅地图 S(图 13(a)).围绕这幅地图的每个顶点画一个足够小的圆,并且把它归并到围绕这个顶点一个国家里,我们就得到一幅国家数和原来一样的正规地图 S'(图 13(b));同时也由地图

S' 的每种正确染色法可以得到地图 S 的用同样几种颜料的正确染色法,反过来也行.所以在地图正确染色问题里,我们往往只限于考察正规地图.



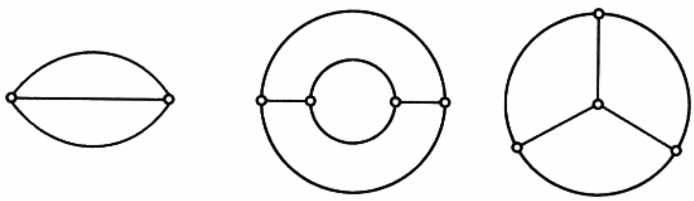
(a) (b)

图 13

现在我们来说明最简单的正规地图的结构[①].设 p 是正规地图的顶点数,l 是国境数,s 是国家数,那么 $2l = 3p$,由此 $p = \frac{2}{3}l$.此外,按照欧拉定理 $s + p = l + 2$,也就是

$$s = (l - p) + 2 = \frac{l}{3} + 2$$

因而 $s \geqslant 2$.但是当 $s = 2$ 时,我们求出 $l = 0$;这种地图显然不存在.设 $s = 3$,得到 $l = 3$ 和 $p = 2$.这个最简单的正规地图的形状如图 14(a) 所示.当 $s = 4$ 时,得 $l = 6$ 和 $p = 4$.我们来证明:在这种情形,地图的形状像图 14(b) 或(c).事实上,用 k_2 表示地图上两角形的数,用 k_3 表示它的三角形的数,用 k_4 表示的四边形的数(因为 $p = 4$,所以地图不能有顶点数大于四的国家).那么



(a) (b) (c)

图 14

$$k_2 + k_3 + k_4 = s = 4$$

而且

$$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$$

由最后这个等式,可见:k_3 是偶数和 $k_2 + k_3 + k_4$ 等于 4,如果不管被加项的次序,它可能有形式 $2 + 2 + 0, 2 + 1 + 1, 3 + 1 + 0, 4 + 0 + 0$.现在来考察这些情形中的每一种.

如果 k 的两个值等于 2 而一个值等于 0,那么当 $k_2 = 2$、$k_3 = 2$、$k_4 = 0$ 时,$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 10 < 12$;当 $k_2 = 2$、$k_3 = 0$、$k_4 = 2$ 时,$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$——适应

① 这儿我们把"结构相同的"地图(像图 11(c))看成是相同的,它们的国家和国境可以重新编号,使在两幅地图上,号码相同的国家被号码相同的国境分隔开.

这种情形的地图如图 14(b)；当 $k_2 = 0$、$k_3 = 2$、$k_4 = 2$ 时，$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 14 > 12$. 如果 k 的一个值等于 2，而两个值等于一，那么只有当 $k_2 = 1$、$k_3 = 2$、$k_4 = 1$ 时，$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 12$——这种地图是存在的，但是它不是正规的（图 15）.

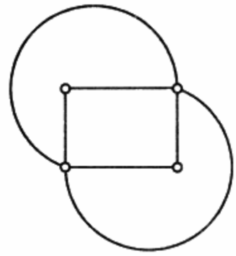


图 15

如果 k 的一个值等于 3 而一个值等于 1，那么应当有 $k_3 = 0$，因为 k_3 是偶数，这时 $2k_2 + 4k_4 \neq 12$.

最后，如果 k 的一个值等于 4 而其余的都等于 0，那么只有当 $k_2 = k_4 = 0$、$k_3 = 4$ 时，$2k_2 + 3k_3 + 4k_4$ 才等于 $2l = 12$——相应的地图像图 14(b) 所示.

有时候我们不仅把地图上的国家染色，而且也把国境染色. 这样，我们用数字 1、2、3、… 表示国境的颜色. 如果会聚在同一顶点的所有国境，在这种编号之下具有不同的号码，那么我们就把这种相应的国境编号法叫做**正确编号法**（图 16）. 注意，把地图的顶点编号，使"相邻的"顶点，也就是被同一条国境连结的顶点具有不同的号码，这个问题也跟 地图上国家的正确染色有关.

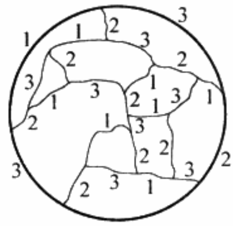
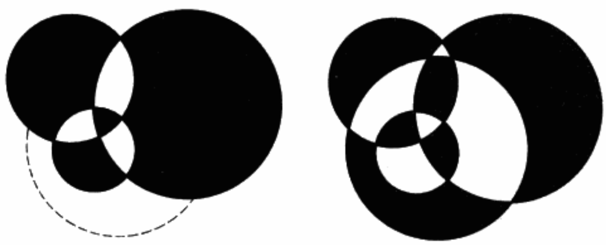


图 16

例 10　在平面上给出 n 个圆. 试证明：不管这些圆怎样布置，它们作成的地图都可以用两种颜料正确染色.

解　(1) 当 $n = 1$ 时，断定是显然的.

(2) 假设我们的断定对于 n 个圆作成的任意地图都正确. 在平面上给出 $n + 1$ 个圆. 取掉其中的一个，我们就得到一幅地图，根据所作的假设，它可以用两种颜料，例如黑的和白的，正确地染色（图 17(a)）. 然后恢复取掉的那个圆，并在它的一边（例如，里边）把每个区域的颜色变换成相反的颜色（也就是说，黑的变白的，白的变黑的）；很容易看出，这时候我们得到一幅地图，它能用两种颜料正确地染色（图 17b）



(a)　　(b)

图 17

题 11　在平面上给出 n 个圆，在每个圆里引一条弦. 试证明，它们作成的地图能用三种颜料正确地染色（图 18）.

提示　设各带有一弦的 n 个圆作成的地图用颜料 α、β、γ 正确地染了色.

作第 $n + 1$ 个圆，把这个圆内部相应弦的一边的国家按 $\alpha \to \beta$、$\beta \to \gamma$、$\gamma \to \alpha$ 方式变

换颜色;而把弦的另一边的国家按 $\alpha\to\gamma$、$\beta\to\alpha$、$\gamma\to\beta$ 方式变换颜色.

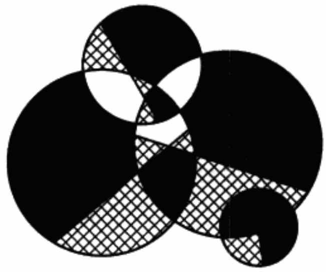


图 18

例 11 (两色定理)地图能用两种颜料正确染色的必要和充分的条件是:在它的每个顶点都会聚偶数条国境.

解 这个条件的必要性是很显然的,因为如果在地图的某一个顶点会聚了奇数条国境,那么围绕这个顶点的国家就不能用两种颜色正确地染色了(图 19).

为了证明条件的充分性,我们按地图的国境数来进行归纳.

(1) 对于有两条国境的地图,断定是显明的(图 20).

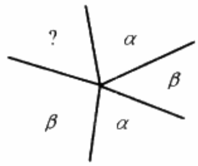


图 19

(2) 假设对于在每个顶点会聚偶数条国境而且国境的总数不大于 n 的任意地图,定理都成立.给出地图 S,它有 $n+1$ 条国境,而且满足相同的条件.由地图 S 的任意顶点开始,顺任意方向,沿着地图的国境运动.因为地图有有限个顶点,所以我们最后总要回到以前曾经到过的顶点之一(地图没有极端顶点,因为在它上面没有不把国家分隔开的国境),而且能分出由地图的国境组成的某一个无自交点的闭线.取掉这个闭线,我们就得到国境数较小的地图 S',在它的每个顶点也会聚偶数条国境(因为在地图 S 的每个顶点取掉了偶数条——0 或 2 条国境).根据归纳法的假设,地图 S' 能用两种颜料正确地染色.

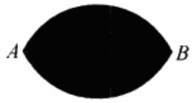


图 20

恢复取掉的那个闭线,并且把它的一方面(例如它的内部)的所有的颜色改变,我们就得到了地图 S 的正确染色法.

例 12 (三色定理)正规地图能用三种颜料正确染色的必要和充分条件是:它的每个国家都有偶数条国境.

证明 上述条件的必要性是很显然的,因为如果在地图上有一个国家 σ,具有奇数条国境,那么 σ 和跟它相邻的国家就已经不能用三种颜料正确地染色了(图 21).

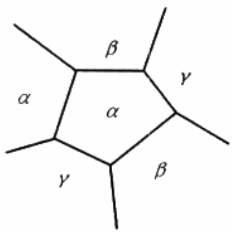


图 21

要证明条件的充分性,我们对地图的国家数 n 来进行归纳.

(1) 对于由三个国家组成的正规地图,我们的断定是很显然的.由四个国家组成,像图 14(b) 所示的正规地图显然也可以用三种颜料染色(只要把"内部的"国家和外部区域染成同样的颜色就行了);但图 14(b) 所示的正规地图并不满足"每个国家的国境数都是偶数"这个条件.这样看来,国家数等于 3 或 4、而且每个国家都有偶数条国境的正规地图,都可以用三种颜料正确染色.

(2) 假设对于每个国家都有偶数条国境,而且国家的总数等于 $n-1$ 或 n 的任意正规地图,定理正确.我们来考察正规地图 S,它满足同样的条件,而且有 $n+1$ 个国家.由例 9 可知,在地图 S 上能求出国家 σ,它的国境数不会大于五.在我们的情形,σ 有两个国境或四个国境.我们分别来考察这两种情形.

(甲)σ 有两条国境.设 A 和 B 是这个国家的顶点,σ_1 和 σ_2 是跟它毗邻的国家(图 22).取掉国家 σ 和 σ_1 之间的国境,我们就得到地图 S',它也是正规的,因为点 A 和 B 不再是顶点(我们曾经约定:地图没有多余的顶点),而在其余的顶点会聚的国境数如旧.地图 S' 的国家也都有偶数条国境,因为 σ_1 和 σ_2 这两个国家的国境数都减少了 2,而其余国家的国境数都不变.因为地图 S' 的国家数等于 n,所以根据归纳法的假设,它可以用三种颜料 α、β、γ 正确地染色.设国家 $\sigma'_1=\sigma_1+\sigma$ 和 $\sigma'_2=\sigma_2$ 这时各染成了 α 色和 β 色.恢复国家 σ,并把它染成 γ 色,我们就得到地图 S 的正确染色法.

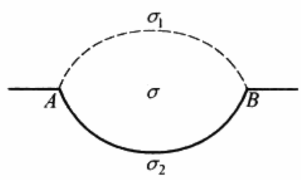


图 22

(乙)σ 有四条国境.σ 的相对邻国中可能有某两个国家毗邻或甚至于重合(图 23(a)或图 14(b)).但是在这种情形,σ 的另外两个邻国不能有公共国境,也不能重合.设 σ_2 和 σ_4 是两个这样的国家(图 23(b)).取掉国境 AB 和 CD,把国家 σ_2 和 σ_4 归并到 σ.我们得到地图 S',它显然也是正规的,而且在这个地图上每个国家都有偶数条国境.事实上,如果国家 σ_1 的国境数等于 $2k_1$,国家 σ_2 的国境数等于 $2k_2$,国家 σ_3 的国境数等于 $2k_3$,并且国家 σ_4 的国境数等于 $2k_4$,那么国家 $\sigma'=\sigma+\sigma_2+\sigma_4$ 就有 $2k_2+2k_4-4$ 条国境,国家 $\sigma'_1=\sigma_1$ 有 $2k_1-2$ 条国境,并且国家 $\sigma'_3=\sigma_3$ 有 $2k_3-2$ 条国境,但是其余每个国家的国境数都不变.(在国家 σ_1 跟 σ_3 重合的情形,这个国家在地图 S' 上的国境数比在地图 S 上的国境数少 4.)

因为地图 S' 有 $n-1$ 个国家,所以根据归纳法的假设,它可以用三种颜料 α、β、γ 正确地染色.现在我们来证明:国家 σ'_1 和 σ'_3 染成相同的颜色(如果 σ'_1 和 σ'_3 重合,这个断定是显然的).事实上,设国家 σ' 染成了 α 色,国家 σ'_1 染成了 β 色.因为在区域 MN 中跟 σ' 毗邻的有奇数 $(2k_2-3)$ 个国家,从而这些国家的颜色显然应当交替地是 γ、β、γ、β、…、γ,所以 σ'_3 染成了 β 色.恢复国家 σ,并把它染成 γ 色,我们就得到地图 S 的正确染色法.

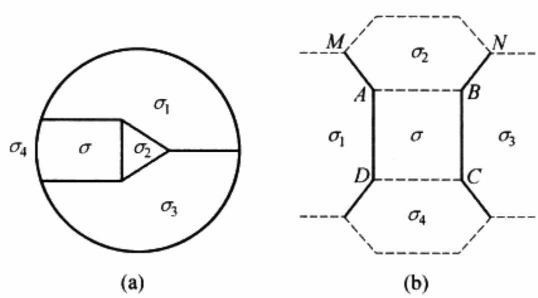


图 23

例 13 (五色定理)任意的正规地图都可以用五种颜料正确地染色.

证明 (1)对于国家数不超过五的地图,断定是显然的.

(2)假设对于国家数等于 $n-1$ 或 n 的任意正规地图,定理成立.我们来考察由 $n+1$ 个国家组成的地图 S.像在例 9 里证明了的,地图 S 至少有一个国家 σ,它的国境数不大于五.我们来考察这时所有可能发生的情形:

(甲)σ 有两条国境(图 22).设 σ_1 和 σ_2 是 σ 的邻国.把国家 σ_1 归并到 σ,我们得到正规地图 S',它的国家数等于 n.

根据归纳法的假设,地图 S' 可以用五种颜料正确地染色.国家 $\sigma'_1=\sigma+\sigma_1$ 和 $\sigma'_2=$

σ_2 这时用这五种颜料中的某两种颜料染了色.恢复国家 σ,我们可以用其余三种颜料中的一种染色.

(乙)σ 有三条国境(图 24(a)).把 σ_1 归并到 σ.用五种颜色染所得到的地图 S',然后我们就能把国家 σ 染成在染国家$\sigma'_1 = \sigma + \sigma_1$、$\sigma'_2 = \sigma_2$、$\sigma'_3 = \sigma_3$时未曾用过的那两种颜色中的一种.

(丙)σ 有四条国境(图 24(b)).求出 σ 的两个不相重合的邻国(参看例 12).把这两个国家之一,例如 σ_2,归并到 σ,我们就得到 n 个国家的地图S'.根据归纳法的假设,它可以用五种颜料正确地染色.这时国家 $\sigma'_1 = \sigma_1$、$\sigma'_2 = \sigma_2 + \sigma$、$\sigma'_3 = \sigma_3$ 和 $\sigma'_4 = \sigma_4$ 染成了五种可能颜色中的某四种(当 σ'_1 和 σ'_3 重合时或染成同种颜色时,少于四种).恢复国家 σ,我们把它染成第五种颜色.

(丁)σ 有五条国境(图 24(b)).像在例 12 中一样,求出 σ 的不相邻也不相重合的两个邻国,假设它们是 σ_1 和 σ_3.把这两个国家归并到 σ,我们就得到地图 S',它有 $n-1$ 个国家.根据归纳法的假设,它可以用五种颜料正确地染色.这时候,国家 $\sigma'_1 = \sigma_1 + \sigma + \sigma_3$、$\sigma'_2 = \sigma_2$、$\sigma'_4 = \sigma_4$、$\sigma'_5 = \sigma_5$染成了这五种颜色中的某四种.恢复国家 σ,我们可以把它染成第五种颜色.

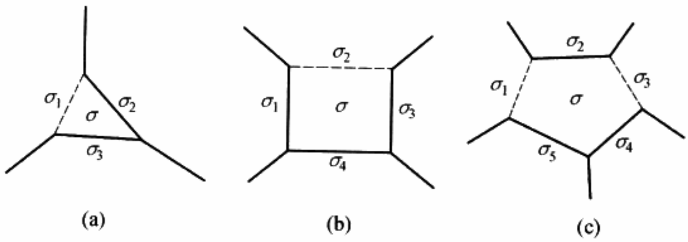


图 24

例 14 (沃勒恩斯基[①]定理) 正规地图的国境能用三个数字正确地编号时,也只有在这种情况,它才能用四种颜料正确地染色.

解 (甲) 如果正规地图能用四种颜料正确地染色,那么它的国境就能用三个数字正确地编号.

假设正规地图 S 已用四种颜料α、β、γ、δ 正确地染好了色.用数字 1 表示染了色 α 和β 或染了色γ 和δ 的国家间的国境;用数字 2 表示染了色 α 和γ 或染了色β 和δ 的国家间的国境;用数字 3 表示染了色 α 和δ 或染了色β 和γ 的国家间的国境.国境的这种编号法是正确的,因为事实上,如果在某一个顶点 A 会聚有用同一个数字(例如数字 1,图 25) 标志的两条国境,那么由具有相同号码的国境跟国家 σ_1 分开的国家 σ_2 和 σ_3 就要有相同的颜色了(例如,在我们的例子里的 σ_1 如果有颜色 α,那么 σ_2 和 σ_3 就都要涂有颜色 β 了),但这是不行的,因为

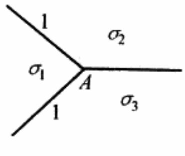


图 25

① 沃勒恩斯基(B.B. Волынский;1923 ~ 1943 年),前苏联数学家,牺牲在伟大卫国战争的前线.

σ_2 和 σ_3 是邻国.

(乙) 如果正规地图的国境能用三个数字正确地编号，那么国家就能用四种颜料染色.我们对于地图上的国家数 n 用归纳法来证明这个断定.

(1) 三个国家组成的最简正规地图的国境(参看图 14(a)) 能用数字 1、2、3 按唯一的方式来编号(这三个数字的不同排列算作一种方式).现在我们来把图26(a)所示这个地图染色.这时，染了色 α 和 β 的国家间的国境号码是 1，染了色 β 和 δ 的国家间的国境号码是 2，染了色 α 和 δ 的国家间的国境号码是 3.

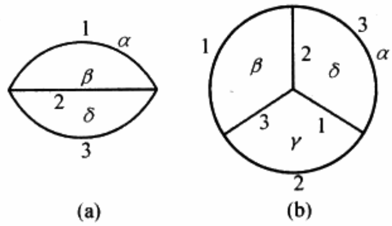


图 26

下述用四种颜料 α、β、γ、δ 把地图 S 正确染色的方法叫做许可的染色法，虽然色 α 和 β 间的国境及 γ 和 δ 间的国境号码都是 1，色 α 和 γ 间的国境及色 β 和 δ 间的国境号码都是 2，色 α 和 δ 间的国境及色 β 和 γ 间的国境号码都是 3.我们已经证明了，三个国家的最简正规地图能用许可染色法以及四种颜料正确地染色.我们现在来证明，这对于四个国家的地图也正确.图 14(b) 上画的那幅地图的国境能用唯一的一种方法(数字 不同排列算一种) 用数字 1、2、3 正确地编号(图 26(b)).这个地图象图 26(b) 所示的染色法是许可的.图 14(b) 的那个地图的国境，可以有两种本质上不同的编号法(图 27(a) 和(b)).图 27(a) 和(b) 所示的那两种染色法也都是许可的.

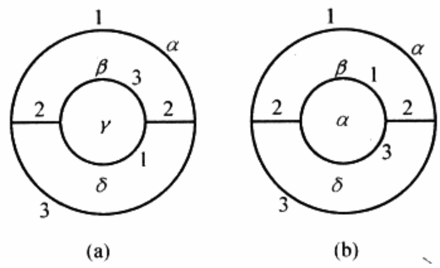


图 27

(2) 假设国境能用三个数字正确地编号、国家数等于 $n-1$ 或 n 的一切正规地图，都能用许可染色法，以四种颜料染色.我们来考察有 $n+1$ 个国家的、国境也能用三个数字正确编号的正规地图.像我们在例 9 中见到的，在地图 S 上能找到一个国家，它的国境数不大于五.现在来考察这时可能发生的各种不同的特殊情形.

(甲) σ 有两条国境.图 28(a) 上画出在 σ 附近的国境的唯一(数字的不同排列算一种) 可能的编号法.把国家 σ_1 合并到 σ；分隔开国家 $\sigma'_1=\sigma_1+\sigma$ 和 $\sigma'_2=\sigma_2$ 的新国境 MN(图 28(b)) 用号码 1 来标志，其余国境号码保持不变.得到的地图 S' 是正规的，它的国境能用三个数字正确地编号.因为地图 S' 的国家数等于 n，所以它可以用四种颜料正确地染色，而且如果国家 σ'_1 染成了 α 色的，那么国家 σ'_2 就是 β 色的.恢复国家 σ，并把它染成 γ 色的，我们就得到地图 S 的用四种颜料的许可染色法.

(乙) σ 有三条国境.在 σ 附近，国境的唯一可能的编号法见图 29(a).我们想象：地图 S 画在一块橡皮板上，并使国家 σ 缩成一点，这时国境 AB、BC 和 AC 消失，而三个顶点 A、B 和 C 合并成一个：$A=B=C=A'$(图 29(b)).不改变国境 MA'、NA'、PA'(原来是 MA、

NB、PC）以及所有其余国境的编号，我们得到正规地图 S'，它的国境正确地编了号．因为地图 S' 的国家数等于 n，所以它能用四种颜料正确地染色；这时候，如果 σ'_1 染成 α 色，那么国家 σ'_2 就是 δ 色的，国家 σ'_3 就是 γ 色．恢复国家 σ，并把它染成 β 色，我们就得到地图 S 的许可染色法．

（丙）σ 有四条国境．在这种情形，国家 σ 附近的国境可能有两种本质上不同的编号法（图 30(a) 和图 31(a)）．我们来考察第一种情形（图 30(a)）．求 σ 的两个彼此无公共国境的邻国（参看例 14）．因为两对相对的国家 σ_1、σ_3 和 σ_2、σ_4，就国境的编

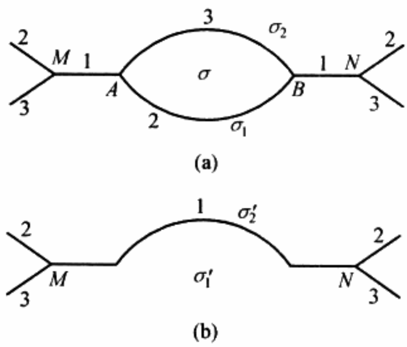


图 28

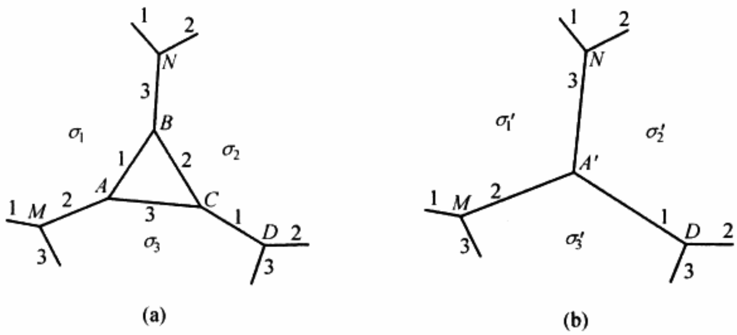


图 29

号来说是同等的，所以我们可以假设国家 σ_1 和 σ_3 没有公共的国境．把 σ_1 和 σ_3 这两个国家归并到 σ；用 3 来标志新的国境 NP 和 MQ（图 30(b)）．所得到的地图 S' 是正规的，而且国境正确地编了号．因为地图 S' 的国家数等于 $n-1$，所以它能用四种颜料来正确地染色，而且如果国家 $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$ 染成 α 色，那么国家 $\sigma'_2 = \sigma_2$ 和 $\sigma'_4 = \sigma_4$ 就是 δ 色的．恢复国家 σ，我们把它染成 β 色．

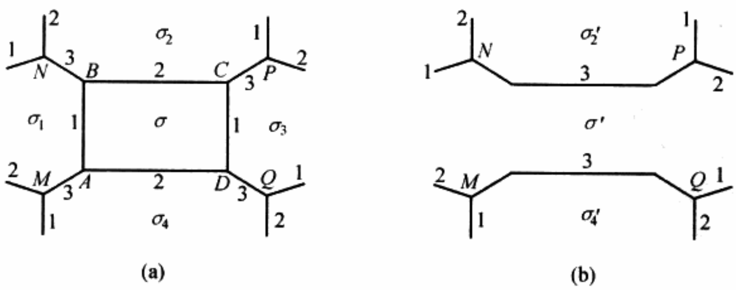


图 30

在第二种情形（图 31(a)），如果 σ_1 和 σ_3 是没有公共国境的国家，那么就可以用类似方法来讨论．在这种情形，只是国境 NP 的号码和原来的一样仍旧是 3，国境 MQ 仍旧是

2(图 31(b));国家 $\sigma'_4 = \sigma_4$ 染成 γ 色的.恢复国家 σ,我们仍然把它染成 β 色的.

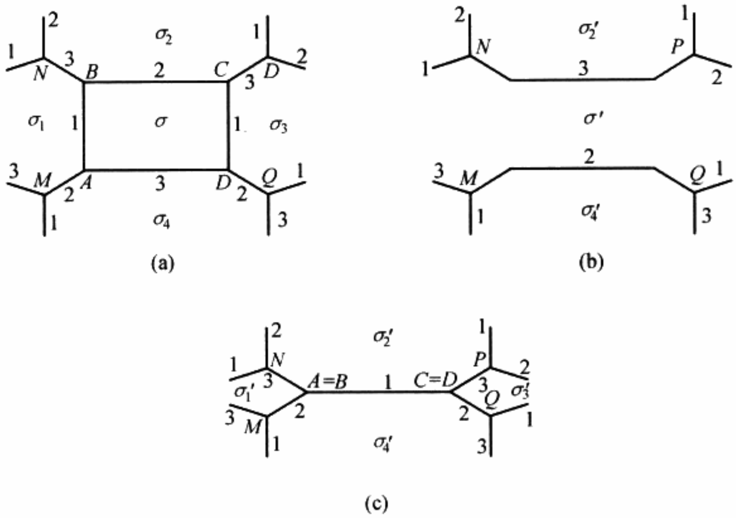


图 31

最后,假设国家 σ_2 和 σ_4 没有公共国境.把四边形 $ABCD$ 压缩成一条线段,使点 A 和点 B 重合、点 C 和点 D 重合;这时国境 BC 和 AD 重合.使国境 MA、NB、PC 和 QD 的编号依旧.而用号码 1 来标志新的国境 $BC = AD$(图 31(b)).得到的地图 S' 是正规的,并且国境正确地编了号.因为地图 S' 的国家数等于 n,所以它可以用四种颜料正确地染色,并且如果国家 σ'_1 是 α 色的,那么国家 σ'_2 就是 δ 色的,国家 σ'_3 就是 α 色的,国家 σ'_4 就是 γ 色的.恢复国家 σ,我们把它染成 β 色的.

(丁)σ 有五条国境.在这种情形,要不管数字 1、2、3 的重新排列,国家 σ 附近的国境的编号法只可能有一种(图 32(a)).首先来考察 国家 σ_5 跟 σ_2 和 σ_3 都不相重合,也没有公共国境的情形.合并国家 σ_5 到 σ,用号码 2 标志新国境 MB,用号码 1 标志新国境 RD;把国境 BC 改名 1,把国境 CD 改名 2.我们得到正规地图 S'(图 32(b)),它的国境已正确地编了号.因为地图 S' 的国家数等于 n,所以它可以用四种颜料正确地染色.而且如果国家 $\sigma' = \sigma + \sigma_5$ 染成 α 色的,那么 σ'_2 和 σ'_4 就是 β 色的,国家 σ'_1 和 σ'_3 就是 γ 色的.恢复国家 σ,我们把它染成 δ 色的.

在国家 σ_5 跟 σ_2 相邻或重合的情形,国家 σ_1 和 σ_3 不相邻,也不相重合;但如国家 σ_5 跟 σ_3 重合或相邻,那么国家 σ_2 和 σ_4 就既不相重合,也不相邻,因为这两种情形,就国境的编号来说,是同等的.所以只要考察国家 σ_1 和 σ_3 没有公共国境,也不相重的情形就行了.把这两个国家归并到 σ,用号码 3 标志新的国境 NP,用号码 2 标志新的国境 ME,用号码 3 标志新的国境 EQ.我们得到正规地图 S'(图 32(b)),它的国境已正确地编了号.因为 S' 的国家数等于 $n-1$,所以它可以用四种颜料正确地染色,而且如果国家 $\sigma' = \sigma + \sigma_1 + \sigma_3$ 染成 α 色的,那么 $\sigma'_2 = \sigma_2$ 和 $\sigma'_4 = \sigma_4$ 就是 δ 色的,而国家 $\sigma'_5 = \sigma_5$ 就是 γ 色的.恢复国家 σ,我们把它染成 β 色的.

因为不知道是不是一切的正规地图都能用四种颜料正确地染色,所以也不知道一切

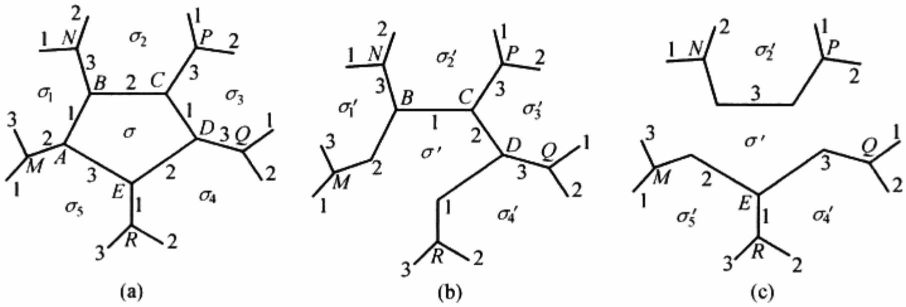


图 32

正规地图的国境是不是都能用三个数字正确地编号.只能证明下面的较弱的断定.

例 15 每个正规地图的国境都可以用四个数字正确地编号.

证明 我们就拿任意的(甚至不一定是联络的)、在各顶点会聚的国境数不大于三的地图来证明这个断定.用关于地图的顶点数 n 的归纳法来证明.

(1) 当 $n=2$ 时,断定是显然的.

(2) 假设对于各顶点会聚的国境都不超过三条、顶点的个数等于 n 的任意地图,我们的断定是正确的.我们来考察满足同样条件而有 $n+1$ 个顶点的地图 S.把这些顶点之一,例如 A_0,连同属于它的国境一起消除掉,我们得到地图 S',在它每个顶点上会聚的国境不超过三条,而且顶点的个数等于 n.根据归纳法的假设,地图 S' 的国境可以用四个数字 1、2、3、4 正确地编号.恢复顶点 A_0 和它的国境.这时可能有三种情形:

(甲) 顶点 A_0 只跟地图 S' 的一个顶点 A_1(用一条、两条或三条国境) 相连(图 33(a),(b),(c)).在这种情形,地图 S' 的国境的编号容易延伸成地图 S 的国境的正确编号.

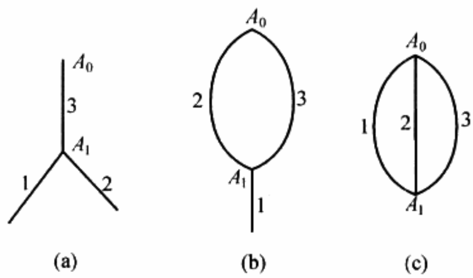


图 33

(乙) 顶点 A_0 跟地图 S' 的两个顶点 A_1 和 A_2 相连,而且可能跟 A_1 和 A_2 之一有两个国境相连(图 34(a) 和(b)).容易证明:这时在所有的情形,地图 S' 的国境的编号可以延伸成地图 S 的国境的编号.

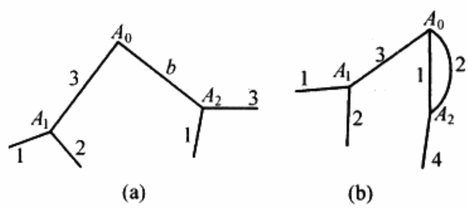


图 34

(丙) 顶点 A_0 跟地图 S' 的三个顶 A_1、A_2、A_3 相连(图 35).经过地图 S' 的顶点 A_1、A_2、A_3 各有两条国境时是最不便利的情形.在这种情形,对于国境 A_0A_1、A_0A_2、A_0A_3,我们各有两个可能的号码.只因当这三对号码相同时,也就是地图 S' 的经过顶点 A_1、A_2、A_3 的三对国境有相同的号码比如 1 和 2 时,由它们选不出三个不同的号码.这时候,在地

图 S' 作一个最长的环线，由顶点 A_1 开始，而且交替由号码是1和3的国境组成（这种环线可能只由一条国境组成，并且可能终于顶点 A_2 和 A_3 之一）. 这个环线不能有自交点，因为按照假设，地图 S' 是正确地编了号的. 代替这个环线的国境的号码，把1换成3，而把3换成1. 这时候，地图 S' 的国境的编号显然仍是正确的，而且在新编号之下，经过地图 S' 的顶点 A_1、A_2、A_3 的三双国境的号码已不相同了，而在这种情形，地图 S' 的国境的编号容易延伸成地图 S 的国境的正确编号.

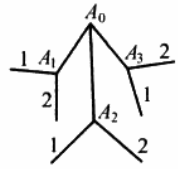


图 35

3　用归纳法作图

也可以用数学归纳法解条件中出现有正整数 n 的作图题（例如作 n 边形）. 下面我们来考查一系列的这种例子. 同时，在这一节中我们也考察有自交点的多边形（图36）；换句话说，在大多数问题里，我们把多边形理解成任意的闭折线 $A_1A_2\cdots A_n$.

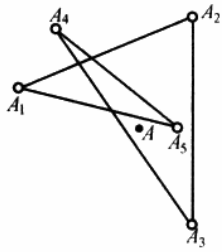


图 36

例16　在平面上给出 $2n+1$ 个点. 试作一 $(2n+1)$ 边形，使这些点成为各边的中点.

解　(1) 当 $n=1$ 时，问题化成：已知三边的中点，求作三角形. 这问题很容易解出（只要经过三已知点之一作平行于其余两点连线的直线就行了）.

(2) 假设已知 $(2n-1)$ 边形各边的中点，我们会作这个 $(2n-1)$ 边形，并且设 $2n+1$ 个点 A_1、A_2、$\cdots$、A_{2n+1} 是所求 $(2n+1)$ 边形 $x_1x_2\cdots x_{2n+1}$ 的边的中点.

考察四边形 $x_1x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}$（图37）. 点 A_{2n-1}、A_{2n}、A_{2n+1} 是它的三条边的中点. 设 A 是第四条边 x_1x_{2n-1} 的中点. 四边形 $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A$ 是平行四边形（只要引直线 x_1x_{2n}，并考察三角形 $x_1x_{2n+1}x_{2n}$ 和 $x_1x_{2n-1}x_{2n}$，就可以证明线段 $A_{2n}A_{2n+1}$ 和 $A_{2n-1}A$ 是这两三角形的均线）；因为点 A_{2n-1}、A_{2n} 和 A_{2n+1} 是我们已经知道的，所以这个平行四边形的第四个顶点 A 很容易求出来. 点 A_1、A_2、$\cdots$、A_{2n-2}、A 是 $(2n-1)$ 边形 $x_1x_2\cdots x_{2n-1}$ 边的中点，而这个 $(2n-1)$ 边形按我们所作的假设，是能够作出来的. 其次，就只剩下作被已知点 A_{2n+1} 和 A_{2n-1} 等分为二的线段 x_1x_{2n+1} 和 $x_{2n-1}x_{2n}$ 了（点 x_1 和 x_{2n-1} 已经确定）.

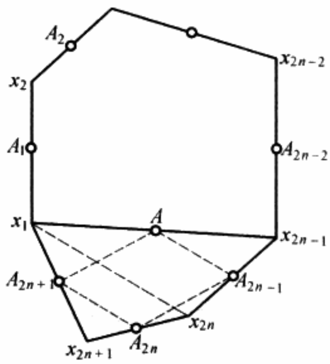


图 37

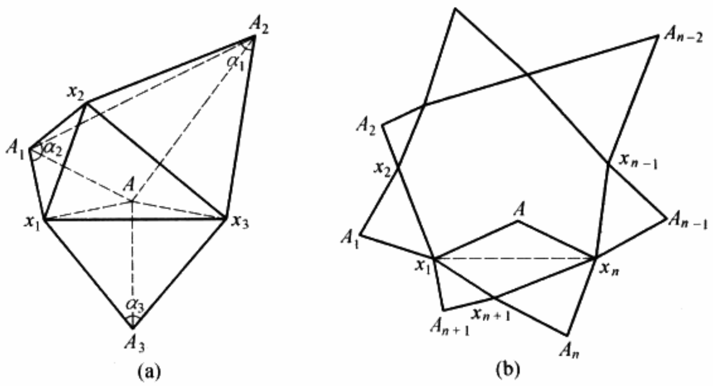
在没有自交点的多边形的情形，什么是这个多边形的外点和内点，这是很清楚的. 在一般情形，这个概念就失去了意义；例如图36上点 A，我们不能说它是在多边形的内部或外部. 替代这，我们引出下列的定义. 假设给出任意多边形 $A_1A_2\cdots A_n$. 我们来对这个多边形确定绕经它的顶点的一定方向（例如按次序 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 来环绕）. 设在多边形的一边例如 A_1A_2 上，作三角形 A_1BA_2. 如果按次序 A_1、A_2、B 绕经三角形的顶点的方向是跟绕经

多边形的方向相反的(一是顺时针方向,一是逆时针方向),那么我们说:三角形在多边形的外方;如果绕经三角形顶点的方向跟多边形的相同,那就说三角形在多边形的内方.

例 17 在平面上给出 n 个点.试作一 n 边形,使它的边各是等腰三角形的底边,而这些等腰三角形的顶点在 n 个已知点,顶角各是 α_1、α_2、…、α_n.①

解 我们假设角 α_1、α_2、…、α_n 中有几个也可以大于 180°,并且约定:当 $\alpha < 180°$ 时,相应的等腰三角形在多边形的外方;当 $\alpha > 180°$ 时,它在多边形的内方(同时在这种情形,顶角等于 $360° - \alpha$).

(1) 设 $n = 3$.假定问题已经解出,x_1、x_2、x_3 是所求三角形的顶点,A_1、A_2、A_3 是在它边上所作的三个等腰三角形的已知顶点,顶角是 α_1、α_2、α_3(图 38a).把平面绕点 A_1 旋转一个角 α_1(我们约定:所有的旋转都是反时针方向进行的)时,顶点 x_1 变成 x_2,绕点 A_2 旋转角度 α_2 时,顶点 x_2 变成 x_3.这两个旋转一个接一个地进行,等于绕某一点 A 作一个角度 $\alpha_1 + \alpha_2$ 的旋转,按点 A_1 和 A_2 与角 α_1 和 α_2 可以用下列方法作出点 A:在线段 A_1A_2 上点 A_1 和 A_2 处作角 $\frac{\alpha_1}{2}$ 和 $\frac{\alpha_2}{2}$;这两个角的第二条边的交点 A 就是旋转角 $\alpha_1 + \alpha_2$ 的结合旋转的中心.经过这个结合旋转,顶点 x_1 变成了 x_3.因而经过绕点 A 转角度 $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ 的旋转后顶点 x_3 变成了 x_1,也就是说,点 A 是底 x_1x_3、顶角 $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ 的等腰三角形的顶点.



(a) (b)

图 38

如果点 A 和 A_3 不重合(只当 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360° \cdot k$ 时它们才可能重合),那么按点 A 和 A_3 可以作一条边 x_1x_3.为此,在线段 AA_3 上点 A 和 A_3 的两侧各作角 $\frac{360° - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ 和 $\frac{\alpha_3}{2}$.这些角的边的交点就是所求三角形的顶点 x_1 和 x_3.然后也就不难作出顶点 x_2.当 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360° \cdot k$ 时(这时点 A 和 A_3 重合),问题的解是不定的.

(2) 假设已知在 n 边形的边上所作等腰三角形的顶点和顶角,我们已经会作这个 n 边形了.现在要按在 $(n + 1)$ 边形的所作的、顶角是 α_1、α_2、…、α_n、α_{n+1} 的等腰三角形的顶

① 上一例可以看成是例 17 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 180°$ 时的特殊情形.

点 A_1、A_2、…、A_n、A_{n+1} 来作这个 $(n+1)$ 边形.

设 $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$ 是所求 $(n+1)$ 边形(图 38(b)).考察三角形 $x_1x_nx_{n+1}$.按在边 x_nx_{n+1} 和 $x_{n+1}x_1$ 上所作的等腰三角形 $x_nA_nx_{n+1}$ 和 $x_{n+1}A_{n+1}x_1$ 的已知顶点 A_n 和 A_{n+1},可以求出在对角线 x_1x_n 上所作的顶角等于 $360°-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$ 的等腰三角形在顶点 A.这就把我们的问题化成按在 n 边形 $x_1x_2\cdots x_n$ 边上所作具有已知顶角 α_1、α_2、…、α_{n-1}、$360°-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$ 的等腰三角形的顶点 A_1、A_2、…、A_{n-1}、A,求作这个 n 边形.根据归纳法的假设,n 边形 $x_1x_2\cdots x_n$ 可以作出,此后就不难作出所求的 $(n+1)$ 边形 $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$ 了.

当 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=360°\cdot k$ 时,解法是不可能的,或是不定的(为什么?).

题 12 在平面上给出 n 个点.试作 n 边形,使这些点是在它的边上所作三角形的顶点,这些三角形的顶角已知,而且两腰的比也已知.

提示 这道题是上题的特殊情形.它的解法和上题类似,只是不研究绕已知点 A_1 转已知角 α_1 的旋转,而考察由转角 α_1 的旋转和一个中心相似变换(位似变换)组成的相似变换;这个中心相似变换的中心在 A_1,而相似系数等于三角形的边的比(对于其余的已知点也类似).两个这样的变换相继施行,等于第三个这样的变换.因而,如果用跟上例解法中采用的类似的记号,那么按三角形 $x_1x_2A_1$ 和 $x_2x_3A_2$ 的顶点 A_1 和 A_2,可以求出三角形 x_1x_3A 的顶点 A—— 三角形 x_1x_3A 是在线段 x_1x_3 上作的,它的顶角与两腰的比都是已知的.

按点 A 和 A_3 作三角形 $x_1x_2x_3$ 的边 x_1x_3,举例来说,可以用下述方法来进行.中心在 A 和 A_3 的两已知相似变换的相继施行,把 x_1 变成自己本身(x_1 先变成 x_3,然后 x_3 又变成 x_1).但这两个变换的相继施行等于中心在某可以作出来的点 B 的一个相似变换,因为点 B 变成自己本身,所以它和所求的点 x_1 重合.如果已知顶角的和是 $360°$ 的倍数,而边的比的积等于一,那么问题的解是不可能的或不定的.

例 18 在平面上给出一个圆和 n 个点.试在圆内作一内接 n 边形,使它的边经过已知点.

解 这个问题是困难的.要解它,必须以完全出乎意外的方式来应用数学归纳法.也就是说,这儿不能利用关于多边形的边数 n 的归纳法,而必须考察更一般的问题.试作 n 边形,使它的 k 条相邻边经过 k 个给定点,而其余的 $n-k$ 条边平行于给定的直线(当 $n=k$ 时这个问题就化成所考察的问题),并且要按数 k 来进行归纳.

(1) 当 $k=1$ 时,我们有这样的一个问题:试作圆的内接 n 边形,使它的边 A_1A_n 经过已知点 P,而其余的 $n-1$ 边形 A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{n-1}A_n$ 平行于已知直线 l_1、l_2、…、l_{n-1}.

假设问题已被解出,所求的多边形已经作出来了(图 39(a) 和(b)).在圆上取任意点 B_1,并作内接多边形 $B_1B_2\cdots B_n$,使它的边 B_1B_2、B_2B_3、…、$B_{n-1}B_n$ 各平行于直线 l_1、l_2、…、l_{n-1}.于是弧 A_1B_1、A_2B_2、…、A_nB_n 彼此相等,而且弧 A_1B_1 和 A_2B_2、A_2B_2 和 A_3B_3 等等在圆上有相反的方向.因而当 n 是偶数时,弧 A_1B_1 和 A_nB_n 方向相反,而且四边形 $A_1B_1B_nA_n$ 是底 A_1A_n 和 B_1B_n 方向相反,而且四边形 $A_1B_1B_nA_n$ 是底 A_1A_n 和 B_1B_n 的等腰梯形(图 39(a)).所以所求多边形的边 A_1A_n 平行于 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的边 B_1B_n,因而在这种情形,应当经过点 P 引平行于 B_1B_n 的直线,此后决定 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的其余的顶点就没

有困难了(试进行研究).

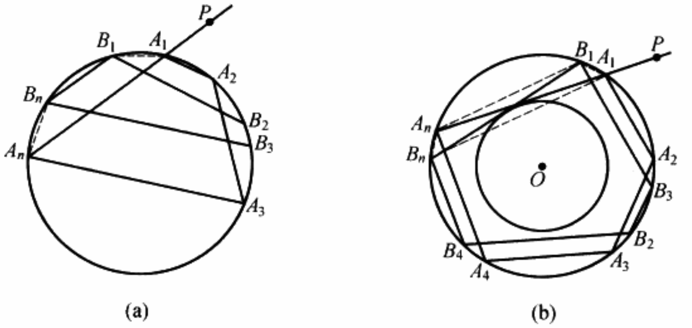


图 39

当 n 是奇数时,弧 A_1B_1 和 A_nB_n 有相同的方向,而且四边形 $A_1B_1A_nB_n$ 是底 A_1B_n 和 B_1A_n 的等腰梯形(图 39(b)).因为梯形的两条对角线 A_1A_n 和 B_1B_n 相等,所以在这种情形必须经过点 P 引直线,使跟已知圆交截的弦 A_1A_n 等于已知弦 B_1B_n,也就是引和已知圆同心且和 B_1B_n 相切的圆的切线(试作研究!).

(2) 假设我们已经会解下述问题:作圆的内接 n 边形,使它的 k 条相邻边经过 k 个给定点,而其余的 $n-k$ 条边平行于给定的直线,并设要求在圆内作一内接 n 边形,使它的 $k+1$ 条相邻边 A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{k+1}A_{k+2}$ 经过 $k+1$ 个已知点 P、P'_2、…、P_{k+1},而其余 $n-k-1$ 条边平行于已知的直线.

假设问题已经解出,而且所求的 n 边形已经作出来了(图 40).考察这个多边形的边 A_1A_2 和 A_2A_3.经过顶点 A_1 引直线 $A_1A'_2$ 平行于 P_1P_2,并且用 A'_2 表示这条直线跟圆的交点,用 P'_2 表示直线 A'_2A_3 跟 P_1P_2 的交点.因为 $\angle A_2P_1P_2=\angle A_2A_1A'_2=\angle A_2A_3P'_2$,而且 $\angle A_2P_2P_1=\angle P'_2P_2A_3$,所以三角形 $P_1A_2P_2$ 跟 $P'_2P_2A_3$ 相似.因而 $\dfrac{P_1P_2}{A_3P_2}=\dfrac{A_2P_2}{P'_2P_2}$,由此

$$P'_2P_2=\frac{A_3P_2\cdot A_2P_2}{P_1P_2}$$

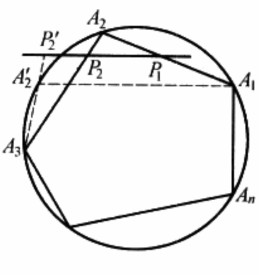


图 40

因为积 $A_3P_2\cdot A_2P_2$ 只跟已知点 P_2 和圆有关(但是跟点 A_2 和 A_3 的选择无关!),所以它能被确定;因此线段 P'_2P_2 的量可以求出,从而点 P'_2 可以作出来.这样我们就知道了 k 个点 P'_2、P_3、…、P_{k+1},n 边形 $A_1A'_2A_3\cdots A_n$ 的 k 条相邻边 A'_2A_3、A_3A_4、…、$A_{k+1}A_{k+2}$ 经过这些点;而它的其余 $n-k$ 条边 $A_{k+2}A_{k+3}$、…、A_nA_1、$A_1A'_2$ 平行于已知直线.根据归纳法的假设,我们能作 n 边形 $A_1A'_2A_3\cdots A_n$,此后就不难作出所求的 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 了.

题 15 试在已知圆内作一内接 n 边形,使 k 条边(不必是相邻的)经过 k 个已知点,而其余的 $n-k$ 条边平行于已知直线.

提示 设所求多边形的边 A_1A_2 经过点 P,而边 A_2A_3 平行于直线 l(图 41).用 P' 表示对于圆的(垂直于直线 l 的)直径跟点 P 对称的点,并且用 A'_2 表示直线 $P'A_3$ 跟圆的交

点，n 边形 $A_1A'_{2}{}_3\cdots A_n$ 的边 $A_1A'_2$ 平行于已知直线 l，而边 A'_2A_3 经过已知点 P'. 这种作图进行适当次，我们就把这个问题化成：作 n 边形，使它 k 条相邻边经过已知点，而其余 $n-k$ 条边平行于已知直线.

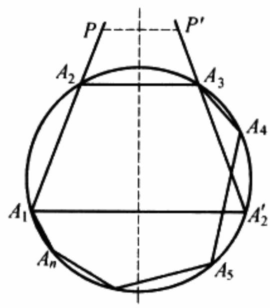


图 41

例 19 给出两条平行直线 l 和 l_1. 试用一根直尺把直线 l 的一段 AB 分成 n 等份.

解 (1) 设 $n=2$. 把平面上不在直线 l 和 l_1 上的任意点 S 跟点 A 和 B 连起来(图 42(a)). 并用 C 和 D 表示直线 AS 和 BS 跟直线 l_1 的交点. 直线 AD 和 BC 的交点用 T_2 来表示，直线 ST_2 和 l 的交点用 P_2 来表示. 现在来证明：点 P_2 就是所求的点，也就是 $AP_2=\dfrac{1}{2}AB$.

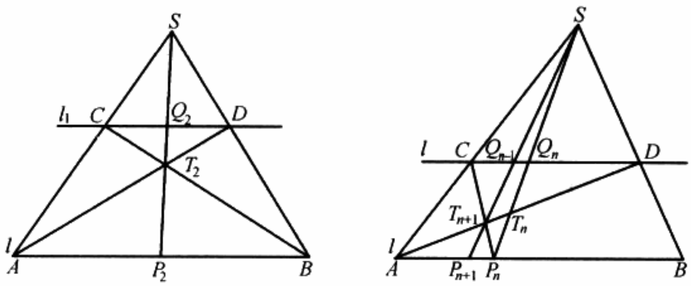


图 42

用 Q_2 表示直线 ST_2 和 l_1 的交点. 容易看出

$$\triangle T_2P_2B \backsim \triangle T_2Q_2C,\quad \triangle ABT_2 \backsim \triangle DCT_2$$
$$\triangle SAP_2 \backsim SCQ_2,\quad \triangle SAB \backsim \triangle SCD$$

由此

$$\frac{P_2B}{Q_2C}=\frac{T_2B}{T_2C}=\frac{AB}{CD},\quad \frac{P_2A}{Q_2C}=\frac{SA}{SC}=\frac{AB}{CD}$$

因而

$$\frac{P_2B}{Q_2C}=\frac{P_2A}{Q_2C}$$

所以

$$P_2A=P_2B,\quad AP_2=\frac{1}{2}AB$$

(2) 假设我们已会只用直尺作线段 AB 上的点 P_n，使 $AP_n=\dfrac{1}{n}AB$. 在 l 和 l_1 的外部取任意一点 S，并用 T_n 和 Q_n 表示直线 SP_n 分别跟 AD 和 l_1 的交点(图 42(b)). 连结直线 AB 和 CP_n 的交点 T_{n+1} 和 S，并用 Q_{n+1} 和 P_{n+1} 表示 ST_{n+1} 跟直线 l_1 和 l 的交点.

现在我们来证明：P_{n+1} 就是所求的点，也就是 $AP_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}AB$.

事实上，由于三角形 $CQ_{n+1}T_{n+1}$ 和 $P_nP_{n+1}T_{n+1}$ 相似，$CT_{n+1}D$ 和 $P_nT_{n+1}A$ 相似，我们有

$$\frac{P_{n+1}P_n}{CQ_{n+1}} = \frac{P_nT_{n+1}}{CT_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD} \qquad ⑥$$

由于三角形 SPA_{n+1} 和 SCQ_{n+1} 相似，SAB 和 SCD 相似，我们有

$$\frac{AP_{n+1}}{CQ_{n+1}} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} \qquad ⑦$$

由等式⑥和⑦推出 $\frac{P_{n+1}P_n}{AP_{n+1}} = \frac{AP_n}{AB}$，或者因为 $P_{n+1}P_n = AP_n - AP_{n+1}$ 和 $AP_n = \frac{1}{n}AB$，而有

$$\frac{\frac{1}{N}AB - AP_{n+1}}{AP_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}AB}{AB}, \quad \frac{1}{n}AB - AP_{n+1} = \frac{1}{n}AP_{n+1}$$

由此最后得

$$AP_{n+1} = \frac{1}{n+1}AB$$

题 14　试利用脚距等于 a 的两脚规和直尺作一线段，等于 $\frac{a}{n}$.

提示　在半径 a 的圆上标出正六角形的顶点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6. 假设我们已经知道半径 OA_n 上的一个点 B_n，而 $OB_n = \frac{1}{n}OA_n = \frac{a}{n}$（这儿对任意的 m 和 $k = 1、2、3、4、5、6$，认为 $A_{6m+k} = A_k$；$B_1 = A_1$），用 B_{n+1} 表示直线 OA_{n+1} 和 B_nA_{n+2} 的交点，那么 $OB_{n+1} = \frac{a}{n+1}$.

4　用归纳法求轨迹

在这一节里，我们来考察几个用数学归纳法求轨迹的问题.

例 20　在凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边上截取线段 B_1C_1、B_2C_2、…、B_nC_n. 试求这个多边形的内点 M 的轨迹，条件是：三角形 MB_1C_1、MB_2C_2、…、MB_nC_n 的面积的和是常量（等于和 $S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0B_2C_2} + \cdots + S_{\triangle M_0B_nC_n}$，这里的 M_0 是多边形内部的一个定点）.

解　(1) 设 $n = 3$（图 43(a)）. 在三角形 $A_1A_2A_3$ 的边 A_3A_2 和 A_3A_1 上截取线段 $A_3P = B_2C_2$ 和 $A_3Q = B_3C_3$. 那么[①]

$$S_{\triangle M_0B_2C_2} + S_{\triangle M_0B_3C_3} = S_{\triangle M_0PA_3} + S_{\triangle M_0QA_3} = S_{\triangle PQA_3} + S_{\triangle M_0PQ}$$

因而

$$S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0B_2C_2} + S_{\triangle M_0B_3C_3} = S_{\triangle PQA_3} + (S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0PQ})$$

同样

$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MB_2C_2} + S_{\triangle MB_3C_3} = S_{\triangle PQA_3} + (S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MPQ})$$

① 这里我们认为点 M_0 在四边形 A_1A_2PQ 的内部；在别的情形讨论稍有不同.

我们看出来,所求的轨迹是由下面的条件确定的

$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0PQ}$$

现在设 N 是直线 A_1A_2 和 PQ 的交点(如果这两条直线平行,那么所求的轨迹显然是和它们平行的直线段).在角 A_2NP 的边上截取线段 $NR = PQ$ 和 $NS = B_1C_1$,那么

$$S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0PQ} = S_{\triangle M_0NS} + S_{\triangle M_0NR} = S_{\triangle NRS} + S_{\triangle M_0RS}$$

同样

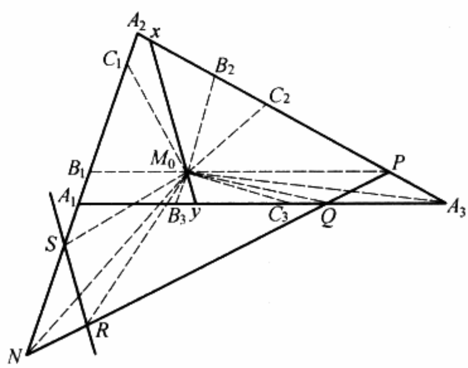
$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle NRS} + S_{\triangle MRS}$$

因而所求的轨迹由三角形内部使 $S_{\triangle MRS} = S_{\triangle M_0RS}$ 的点 M 所组成,也就是说所求的轨迹是经过点 M_0(且平行于直线 RS①)的直线段 XY.

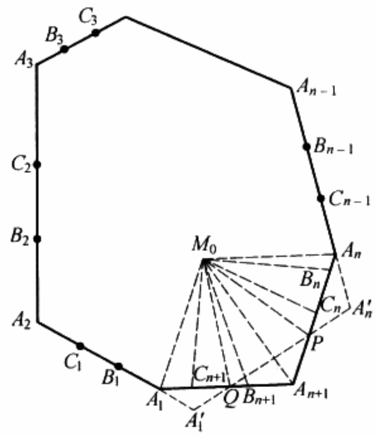
(2)假设我们已经知道:对于 n 边形,所求的轨迹是直线段(当然经过点 M_0).现在考察 $(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$;令 B_1C_1、B_2C_2、$\cdots$、B_nC_n、$B_{n+1}C_{n+1}$ 是在它的边上截取的线段,而 M_0 是 $(n+1)$ 边形内部的一点(图 43(b)).在顶点 A_{n+1} 的角 $A_1A_{n+1}A_n$ 的边上截取线段 $A_{n+1}P = B_nC_n$ 和 $A_{n+1}Q = B_{n+1}C_{n+1}$.那么

$$S_{\triangle M_0B_nC_n} + S_{\triangle MB_{n+1}C_{n+1}} = S_{\triangle MA_{n+1}P} + S_{\triangle MA_{n+1}Q} = S_{\triangle A_{n+1}}PQ + S_{\triangle MPQ}$$

因而对于所求轨迹的点 M,有



(a)



(b)

图 43

$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MB_2C_2} + \cdots + S_{\triangle MB_{n-1}C_{n-1}} + S_{\triangle MPQ} =$$

$$S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0B_2C_2} + \cdots + S_{\triangle M_0B_{n-1}C_{n-1}} + S_{\triangle M_0PQ}$$

根据归纳法的假设,所求的轨迹是经过点 M_0 的直线段.

由问题的解法,不难看出这个轨迹的作图法.

题 15 给出 n 条直线 l_1、l_2、$\cdots$、l_n 与一个点 M_0,并且在这些直线上分别给出线段

① 归纳法可以从 $n=2$ 的情形开始,这时"n 边形"只是有两条边的一个角.

B_1C_1、B_2C_2、…、B_nC_n. 如果点 M 和点 M_0 在直线 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的同侧，那么三角形 MB_iC_i 的面积取正号；如果 M 和 M_0 在直线 l_i 的不同侧，那么它取负号. 试求点 M 的轨迹，条件是：三角形 MB_1C_1、MB_2C_2、…、MB_nC_n 的面积的代数和，等于对于点 M_0 的对应和.

提示 所求的轨迹是直线，证明跟例 20 的解法类似.

题 16 试证明：圆的外切四边形的对角线的中心和圆心在同一直线上（图 44）.

提示 用图 44 的记号，我们有

$$S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle ADF}=$$
$$S_{\triangle BCO}+S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}S$$

这里 S 是四边形的面积，由此根据例 20（或题 15）的结果推出：E、F 和 O 在同一直线上.

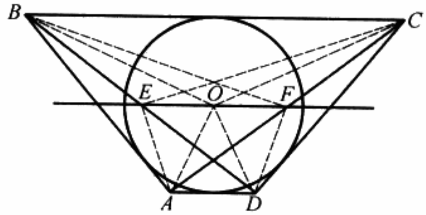


图 44

题 17 试证明：连结凸四边形（不是平行四边形，也不是梯形）两对角线中点的直线，平分连结两双对边交点的直线（图 45）.

提示 用图 45 的记号（里面的 P 是线段 EF 的中点），有

$$S_{\triangle ABM}+S_{\triangle CDM}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle CDN}=$$
$$S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CDP}=\frac{1}{2}S$$

这里 S 是四边形的面积. 由此根据题 15 的结果推出：点 M、N 和 P 在一直线上.

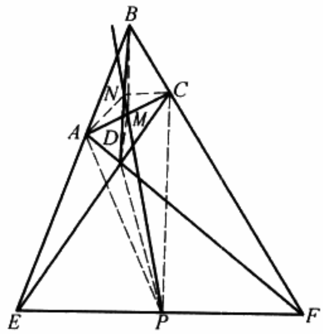


图 45

例 21 给出 n 个点 A_1、A_2、…、A_n 和 n 个（正的或负的）数 a_1、a_2、…、a_n. 试求使

$$a_1\cdot MA_1^2+a_2\cdot MA_2^2+\cdots+a_n\cdot MA_n^2$$

是常量的点 M 的轨迹.

解 (1) 设 $n=2$. 为确切起见，我们先假设两个数 a_1 和 a_2 都是正的.

在线段 A_1A_2 上取一个把它分成比 $a_2:a_1$ 的点 O，也就是取点 O 使 $OA_1=\dfrac{a_2}{a_1+a_2}A_1A_2$，$OA_2=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}A_1A_2$.

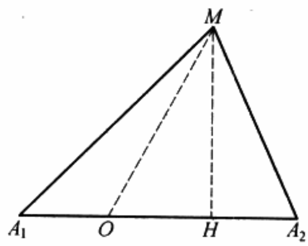


图 46

设 M 是平面上的任意点，而 H 是由 M 到直线 A_1A_2 的垂足（图 46）. 于是有

$$MA_1^2=MO^2+A_1O^2\pm 2A_1O\cdot HO$$
$$MA_2^2=MO^2+A_2O^2\mp 2A_2O\cdot HO$$

第一个等式乘上 A_2O，第二个等式乘上 A_1O，然后逐项相加，就得到

$$MA_1^2\cdot A_2O+MA_2^2\cdot A_1O=MO^2(A_2O+A_1O)+A_1O^2\cdot A_2O+A_2O^2\cdot A_1O=$$
$$MO^2\cdot A_1A_2+A_1O\cdot A_2O\cdot A_1A_2$$

现在把 A_1O 和 A_2O 的值代入,就得到

$$MA_1^2\frac{a_1\cdot A_1A_2}{a_1+a_2}+MA_2^2\frac{a_3\cdot A_1A_2}{a_1+a_2}=MO^2\cdot A_1A_2+\frac{a_1}{a_1+a_2}\frac{a_2}{a_1+a_2}A_1A_2^3$$

即

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2=(a_1+a_2)MO^2+\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}A_1A_2^2$$

因此,如果

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2=R^2$$

那么

$$MO^2=\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2=常量$$

由此推出,如果 $\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2>0$,那么圆心在点 O 而半径为 $\sqrt{\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2}$ 的圆就是所求的轨迹.如果 $\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2=0$,那么所求的轨迹是唯一的一点 O;最后,如果 $\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2<0$,那么轨迹就一个点也没有了.

当 a_1 和 a_2 两个都是负的时,显然可以化成上述情形.在 $a_1>0$、$a_2<0$ 而且 $a_1+a_2\neq0$(例如 $a_1+a_2>0$)的情形,点 O 应选在线段 A_1A_2 向 A_2 的右方延长的线上,且使 $A_2O=\left|\frac{a_1}{a_1+a_2}\right|$,$A_1O=\left|\frac{a_2}{a_1+a_2}\right|$.进一步的讨论跟上面的就没有什么不同了.最后,如果 $a_1+a_2=0$,那么 $a_1=-a_2$,而我们的问题化成了下面的问题:试求与两已知点 A_1 和 A_2 的距离的平方差是常量的点的轨迹.设 H 是由点 M 给直线 A_1A_2 所作的垂线的足(图 46),那么 $MA_1^2=MH^2+A_1H^2$,$MA_2^2=MH^2+A_2H^2$,因而 $MA_1^2-MA_2^2=A_1H^2-A_2H^2$.如果 $MA_1^2-MA_2^2=R^2$,那么 $A_1H-A_2H=\frac{R^2}{A_1A_2}$,这完全确定了点 H;从这里可以知道,所求的轨迹在这种情形是经过点 H 且垂直于 A_1A_2 的直线.

(2) 假设我们已经证明了:给出 n 个点时对应的轨迹,当 $a_1+a_2+\cdots+a_n\neq0$ 时是圆,当 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 时,是直线.现在我们考察 $n+1$ 个点 A_1、A_2、…、A_{n+1} 与 $n+1$ 个数 a_1、a_2、…a_{n+1}.假设 $a_n+a_{n+1}\neq0$(如果 $a_n+a_{n+1}=0$,那么我们就把这两个数换成数 a_{n-1} 和 a_{n+1} 或数 a_{n-1} 和 a;如果同时 $a_n+a_{n+1}=0$,$a_{n-1}+a_{n+1}=0$,并且 $a_{n-1}+a_n=0$,那么 $a_{n-1}=a_n=a_{n+1}=0$,而且可以直接利用归纳法的假设,因为这时候问题已经化成 $n-2$ 个点 A_1、A_2、…、A_{n-2} 和 $n-2$ 个数 a_1、a_2、…、a_{n-2} 的情形了).

像第 1 部分中一样,我们来证明在线段 A_nA_{n+1} 上可以求得点 O,使对于平面上的任意的点 M

$$a_nMA_n^2+a_{n+1}MA_{n+1}^2=(a_n+a_{n+1})MO^2+\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}A_nA_{n+1}^2$$

这使我们的问题化成求点 M 的轨迹,使

$$a_1MA_1^2 + a_2MA_2^2 + \cdots + a_{n-1}MA_{n-1}^2 + (a_n + a_{n+1})MO^2$$

是常量.

根据归纳法的假设,这个轨迹当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \neq 0$ 时是圆,当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 0$ 时是直线.

题 18 试求与平面上 n 个已知点的距离的平方和是常量的点的轨迹.

提示 只要在例 21 的条件里命 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 就可以了.

题 19 试求与 n 个已知点的距离的平方和最小的点的轨迹.

提示 题 18 中所求的轨迹是一个圆.它的圆心就是本问题的轨迹.

题 20 试求与两已知点的距离的比是常量的点的轨迹.

提示 如果 M 是所求轨迹的点,那么 $\frac{AM}{BM} = c$,因而 $AM^2 - CBM^2 = 0$,所以我们的问题化成了例 21.

题 21 给出 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$.试求点 M 的轨迹,使以 M 在已知多边形的边上的射影为顶点的多边形具有定面积 S.

提示 可以证明:以点 M 在三角形 $A_1A_2A_3$ 的边上的射影为顶点的三角形的面积等于 $\frac{1}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right| S_{\triangle A_1A_2A_3}$,这里 R 是三角形 $A_1A_2A_3$ 的外接圆 Σ 的半径,d 是由点 M 到圆 Σ 的圆心的距离.由此推出:当 $n = 3$ 时,所求的轨迹是与 Σ 同心的圆(或一对这样的圆).其次,利用关于多边形边数的归纳法可以证明:对于任意的 n,一般来说,所求的轨迹也是圆(或一双同心圆).

5 用归纳法下定义

在几何学里,有些问题中包含着用"由 n 到 $n+1$"这种过程来定义的概念.这些问题提供了应用数学归纳法的有趣的例子.在这一节里讲一讲这种问题.

例 22 n 边形的中线和重心的定义.

(1) 我们把线段的中点叫做它的重心(图 47(a)).

在这种情形,三角形 $A_1A_2A_3$ 的中线可以定义为连结三角形的顶点和对边的重心的线段(图 47(b)).大家知道,三角形的中线交于一点,而且被这个点分成比 2 : 1,由顶点算起.三角形三条中线的交点叫做三角形的重心.

我们现在约定,把连结四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_1、A_2、A_3、A_4 跟其余三个顶点所成三角形的重心 O_1、O_2、O_3、O_4 的线段叫做四边形的中线(图 47(b)).我们现在来证明:四边形的中线交于一点,而且被这个点分成比 3 : 1,由顶点算起.事实上,用 S 表示边 A_1A_2 的重心(中点),用 O_4 和 O_3 表示三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $A_1A_2A_4$ 的重心;更令 O 是四边形的中线 A_3O_3 和 A_4O_4 的交点.因为 SA_3 和 SA_4 是三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $A_1A_2A_4$ 的中线,所以

$$\frac{SA_3}{SO_4} = \frac{3}{1} \quad 和 \quad \frac{SA_4}{SO_3} = \frac{3}{1}$$

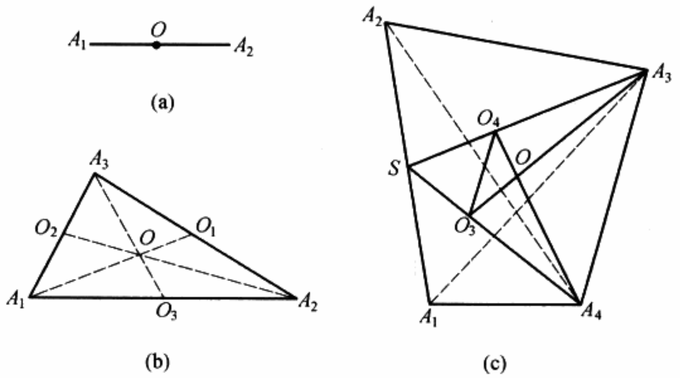


图 47

因而

$$\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{SA_4}{SO_3}$$

由此推出 $O_3O_4 /\!/ A_3A_4$ 和$\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1}$.其次,因为三角形 OO_3O_4 和 OA_3A_4 相似,所以

$$\frac{OA_4}{OO_4}=\frac{OA_3}{OO_3}=\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{3}{1}$$

这样,四边形的任意两条相邻的(也就是由相邻顶点所作的)中线被交点分成比 3 : 1. 由此推出:四边形的所有的中线经过一个点 O,在这个点上中线都被分成比 3 : 1. 四边形四条中线的交点 O 叫做四边形的重心.

(2) 假设:对于所有的 $k<n$,我们已把 k 边形的中线定义为连结 k 边形的顶点与其余 $k-1$ 个顶点所成的 $(k-1)$ 边形的重心的线段,而且对于所有的 $k<n$ 把 k 边形的重心定义为它的中线的交点. 我们还假设已经证明了:当 $k<n$ 时, k 边形的中线被交点(k 边形的重心)分成比 $(k-1):1$(由顶点算起).

现在我们把 n 边形的中线定义为连结 n 边形的顶点和其余 $n-1$ 个顶点所成 $(n-1)$ 边形的重心的线段. 我们现在来证明: n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的所有中线交于一点,而且被这个点分成比 $(n-1):1$(由顶点算起). 事实上,设 S 是 $(n-2)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-2}$ 的重心,那么直线 SA_{n-1} 和 SA_n 是 $(n-1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 和 $A_1A_2\cdots A_{n-2}A_n$ 的中线(图 48). 如果 O_n 和 O_{n-1} 是这两个 $(n-1)$ 边形的重心,那么根据归纳法的假设,有

$$\frac{SA_{n-1}}{SO_n}=\frac{SA_n}{SO_{n-1}}=\frac{n-1}{1}$$

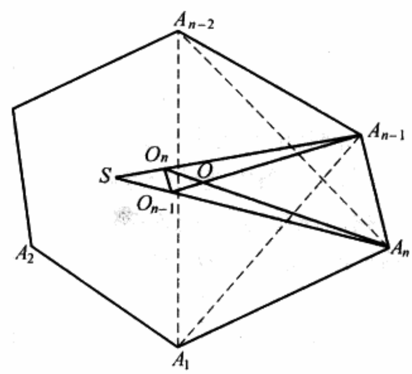


图 48

因而 $O_{n-1}O_n \parallel A_nA_{n-1}$,而且$\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}$.用 O 表示n边形$A_1A_2\cdots A_n$的中线$O_{n-1}A_{n-1}$和 O_nA_n 的交点.由三角形 $OO_{n-1}O_n$ 和$OA_{n-1}A_n$ 的相似,推出

$$\frac{OA_{n-1}}{OO_{n-1}}=\frac{OA_n}{OO_n}=\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}$$

因此,n边形的任意两相邻中线被交点分成比$(n-1):1$.由此推出:n边形的所有中线交于一点,而且被这个点分成比$(n-1):1$.

现在可以把 n 边形的重心定义为它的中线的交点,然后把$(n+1)$边形的中线定义为$(n+1)$边形的顶点跟其余 n 个顶点所成的n边形的重心连成的线段.数学归纳法使我们断定:我们的 n 边形的中线和重心的定义对于任意的n有意义.

题 22　在 n 边形$A_1A_2\cdots A_n$中用O_1表示$(n-1)$边形 $A_2A_3\cdots A_n$ 的重心,用 O_2 表示$(n-1)$边形 $A_1A_3A_4\cdots A_n$ 的重心,…,用 O_n 表示$(n-1)$边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 的重心.试证明:n 边形 $O_1O_2\cdots O_n$ 和已知n边形$A_1A_2\cdots A_n$ 相似.

提示　像例 22 中证明的,$O_1O_2\parallel A_1A_2$ 而且$\frac{O_1O_2}{A_1A_2}=\frac{1}{n-1}$.同样地,$O_2O_3\parallel A_2A_3$而且$\frac{O_2O_3}{A_2A_3}=\frac{1}{n-1}$,其余类推.

连结n边形的任意k个顶点所成的k边形的重心和其余$n-k$个顶点所成的$(n-k)$边形的重心的线段叫做n边形的k阶中线$(k<n)$.这样,k阶中线同时也是$(n-k)$阶中线.例 22 中定义的 n 边形的中线可以叫做一阶中线.

题 23　试证明:n边形的所有k阶中线交于一点,且被分成比$(n-k):k$.

提示　设 S_1 和 S_2 是$(k-1)$边形 $A_2A_3\cdots A_k$ 和$(n-k-1)$边形 $A_{k+2}A_{(k+3)}\cdots A_n$ 的重心,O_1 和 O_2 是k边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 和 $A_2A_3\cdots A_{k+1}$ 的重心,O_3 和 O_4 是$(n-k)$边形 $A_{k+1}\cdots A_n$ 和$A_{k+2}\cdots A_nA_1$ 的重心(图 49).那么$\frac{O_1S_1}{O_1A_1}=\frac{O_2S_1}{O_2A_{k+1}}=\frac{1}{k-1}$而且 $O_1O_2\parallel A_1A_{k+1}$;$\frac{O_3S_1}{O_3A_{k+1}}=\frac{O_4S_1}{O_4A_1}=\frac{1}{n-k-1}$而且 $O_3O_4\parallel A_1A_{k+1}$.现在如果 O 是k阶中线O_2O_4和 O_1O_3 的交点,那么由三角形 OO_1O_2 和 OO_3O_4 的相似,就有

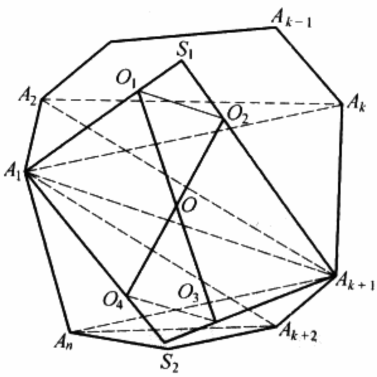


图 49

$$\frac{OO_1}{OO_3}=\frac{OO_2}{OO_4}=\frac{O_1O_2}{O_3O_4}=\frac{\frac{1}{k}A_1A_{k+1}}{\frac{1}{n-k}A_1A_{k+1}}=\frac{n-k}{k}$$

可以证明:对于任意的 k,n 边形的k阶中线的交点和它的重心重合.

题 24　试表述当 $n=4$、$k=2$ 时问题 23 的断定.

答　连结任意四边形的对边中点的线段跟连结对角线中点的线段相交于一点,且被那个点平分.

经过三角形三边中点的圆(图 50)叫做三角形的欧拉圆.它有一系列有趣的性质(例如,三角形 ABC 的欧拉圆,除经过三边的中点 D、E、F 外,还经过三个高 AP、BQ、CR 的垂足 P、Q、R 和三个高的交点跟顶点间的那部分 AH、BH、CH 的中点[①],所以欧拉圆也叫做三角形的九点圆).因为三角形 ABC 的欧拉圆外接于三角形 DEF,而 DEF 与三角形 ABC 相似,相似系数为 1/2,所以它的半径等于 $R/2$,这里 R 是原来三角形 ABC 的外接圆的半径.欧拉圆的概念可以用下述方法推广于圆的任意内接多边形的情形.

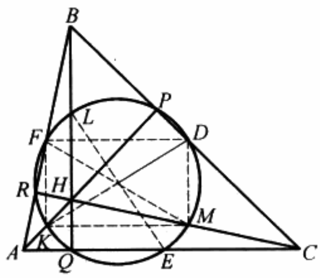


图 50

题 25 (1) 半径 R 的圆 S 的弦 A_1A_2 的欧拉圆,指的是半径等于 $R/2$、圆心在弦 A_1A_2 的中点的圆(图 51(a)).内接于圆 S 的三角形 $A_1A_2A_3$ 的边的欧拉圆交于一点 O,它是经过三个欧拉圆的圆心、半径等于 $R/2$ 的圆的圆心.最后这个圆叫做三角形 $A_1A_2A_3$ 的欧拉圆(图 51(b)).

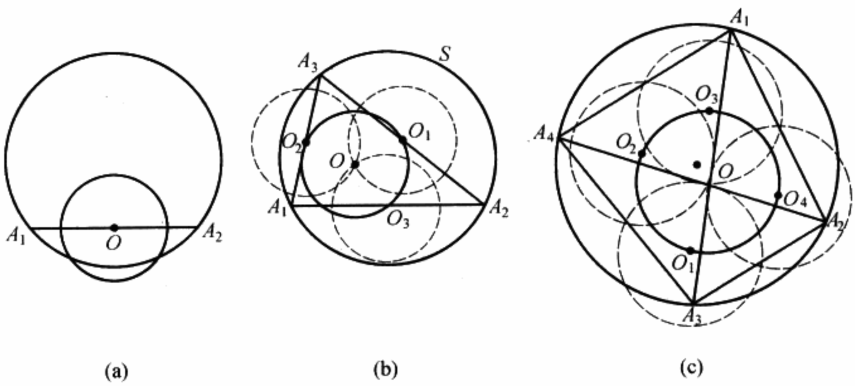


图 51

(2) 假设我们已经会定义内接于圆 S 的 n 边形的欧拉圆,而且知道它的半径等于 $R/2$(R 是圆 S 的半径).我们现在来考察内接于圆 S 的 $(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$.在这种情形,n 边形 $A_2A_3\cdots A_{n+1}$、$A_1A_3\cdots A_{n+1}$、$\cdots$、$A_1A_2\cdots A_n$ 的 $n+1$ 个欧拉圆交于一个点,它是经过所有 $n+1$ 个欧拉圆圆心、半径等于 $R/2$ 的圆的圆心;这个圆叫做 $(n+1)$ 边形

---

① 因为四边形 $KFDM$(图 50)是矩形(因为 $FK \parallel BH \parallel DM$,这是由于 KF 和 DM 是具有公共底边 BH 的三角形 ABH 和 CBH 的均线;$FD \parallel AC \parallel KM$,这是由于 FD 和 KM 是具有公共底边 AC 的三角形 ABC 和 AHC 的均线;$BH \perp AC$),所以线段 FM 和 DK 相等而且有公共中点.这也证明了:线段 EL 也跟 FM 和 DK 相等,而且 EL 的中点跟 FM 和 KD 的中点重合.由此出:经过点 D、E 和 F 的欧拉圆还经过 K、L 和 M(这个圆的圆心跟 DK、EL 和 FM 的公共中点重合,直径等于这些线段的公共长度).

其次,因为已证明过 K 和 D 在欧拉圆的直径的两端,而且 $\angle KPD = 90°$,所以欧拉圆也经过点 P;同样可以证明它也经过点 Q 和 R.

$A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 的欧拉圆(参看图 51(b),图上画出了四边形的欧拉圆).

提示 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是圆 S 的任意内接多边形.举例来说,因为三角形 $A_1A_2A_3$ 的欧拉圆经过线段 H_4A_1、H_4A_2、H_4A_3 的中点,这里 H_4 是三角形 $A_1A_2A_3$ 三个高的交点(见上),所以它跟圆 S 中心相似(位似),而相似中心在点 H_4,相似系数是 1/2;所以线段 H_4A_4 的中点在这个圆上.现在就只剩下指出:线段 H_1A_1、H_2A_2、H_3A_3 和 H_4A_4(其中 H_1、H_2、H_3 是相应三角形的高的交点)的中点重合;举例来说,这由下述事实可以推出:四边形 $A_1H_2H_1A_2$ 是平行四边形(因为 $A_1H_2 \parallel A_2H_1 \perp A_3A_4$ 而且 $A_1H_2 = A_2H_1 =$ 从圆 S 的圆心到 A_3A_4 的距离的两倍).

现在假设:边数 k 不大于 $n \geqslant 4$ 的所有 k 边形都有欧拉圆这件事已经证明了,而来考察圆 S 的内接 $(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$.我们必须证明:n 边形 $A_2A_3\cdots A_{n+1}$、$A_1A_3A_4\cdots$、A_{n+1}、$\cdots$、$A_1A_2\cdots A_n$ 的欧拉圆交于一点.为此,只要证明:其中每三个,例如 S_1、S_2、S_3,交于一点,就可以了[①].用 S_{12}、S_{13}、S_{23} 表示 $(n-1)$ 边形 $A_3A_4\cdots A_{n+1}$、$A_2A_4A_5\cdots A_{n+1}$、$A_1A_4A_5\cdots A_{n+1}$ 的欧拉圆,O_{12}、O_{13}、O_{23} 表示它们的圆心.更命 O_1、O_2、O_3 是圆 S_1、S_2、S_3 的圆心,而 O_{123} 是 $(n-2)$ 边形 $A_4A_5\cdots A_{n+1}$ 的欧拉圆 S_{123} 的圆心.在这种情形,我们得到图 52,由这个图不难看出,三角形 $O_1O_2O_3$ 和 $O_{23}O_{13}O_{12}$ 全等.(要证明这两个三角形的 O_1O_2 和 $O_{23}O_{13}$ 相等,只考察三角形 $O_1O_2O_{12}$ 和 $O_{23}O_{13}O_{123}$ 就可以了.在这两三角形里,有

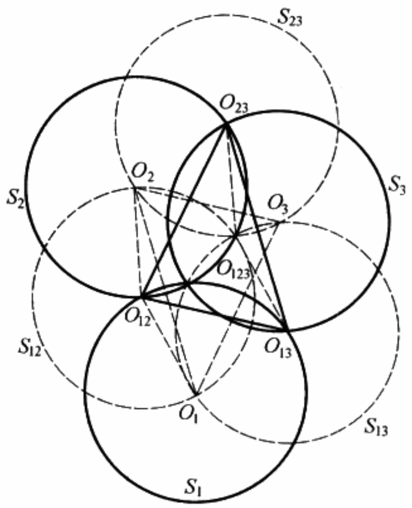


图 52

$$O_{12}O_1 = O_{12}O_2 = O_{123}O_{23} = O_{123}O_{13} = \frac{R}{2}$$

$$\angle O_1O_{12}O_2 = \angle O_1O_{12}O_{123} + \angle O_{123}O_{12}O_2 = 2\angle O_{13}O_{12}O_{123} + 2\angle O_{123}O_{12}O_{23} = 2\angle O_{13}O_{12}O_{23}$$

而且

$$\angle O_{23}O_{123}O_{13} = 2\angle O_{13}O_{12}O_{23}$$

因为它们是 $O_{12}O_{13}O_{23}$ 的外接圆的对同弧的中心角和圆周角,同样可证明 $O_1O_3 = O_{23}O_{12}$ 和 $O_2O_3 = O_{13}O_{12}$.)因为 $\triangle O_1O_2O_3 = \triangle O_{23}O_{13}O_{12}$,而且圆 S_{23}、S_{13} 和 S_{12} 交于同一点 O_{123},所以圆 S_1、S_2 和 S_3 也交于一点.

题 26 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是圆 S 的任意内接 n 边形.试证明:n 边形的重心(参看例 22)在连结 S 的圆心跟 n 边形的欧拉圆心的线段上,而且把这个线段分成比 $(n-2):2$.

---

① 因为如果在 $n \geqslant 5$ 个圆(其中任何两个都不重合)中,每三个都相交于一点,那么所有的圆也交于一点(对于 $n = 4$,这就不对了).

例 23 (1) 设 l_1、l_2、l_3、l_4 是一般布置的,也就是任何两条都不平行、任何三条都不共点的四条直线,O_1 是直线 l_2、l_3、l_4 所成三角形的外接圆心,O_2 是直线 l_1、l_3、l_4 所成三角形的外接圆心,其余依次类推.那么四点 O_1、O_2、O_3 和 O_4 共圆,这个圆叫做四直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的心圆(图 53).

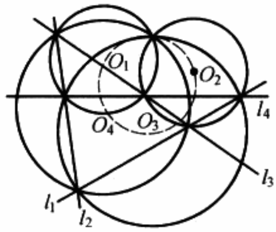


图 53

(2) 设已经定义 n 条直线的心圆,并设已经给出 $n+1$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{n+1}.用 O_1 表示 n 条直线 l_2、l_3、…、l_{n+1} 的心圆的圆心,用 O_2 表示 n 条直线 l_1、l_3、l_4、…、l_{n+1} 的心圆的圆心,等等.那么 $n+1$ 个点 O_1、O_2…、O_{n+1} 在一个圆上,这个圆叫做 $n+1$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{n+1} 的心圆.

证明 (1) 设 l_1、l_2、l_3、l_4 是一般布置的四条直线(图 54),A_{12} 是 l_3 和 l_4 的交点,A_{13} 是 l_2 和 l_4 的交点,其余类推;O_1 是直线 l_2、l_3 和 l_4 所成三角形的外接圆 C_1 的圆心,其余类推.我们首先来证明:圆 C_1、C_2、C_3、C_4 交于一个点 M.事实上,如果 M 是 C_1 和 C_2 的异于 A_{12} 的交点,那么

$\angle A_{13}MA_{12} = \angle A_{13}A_{14}A_{12} = l_2$ 和 l_3 的夹角;

$\angle A_{12}MA_{23} = \angle A_{12}A_{24}A_{23} = l_3$ 和 l_1 的夹角.

由此可见 $\angle A_{13}MA_{23} = l_2$ 和 l_1 的夹角 $= \angle A_{13}A_{34}A_{23}$,就是圆 C_3 经过 M;完全同样可以证明 C_4 也经过 M.

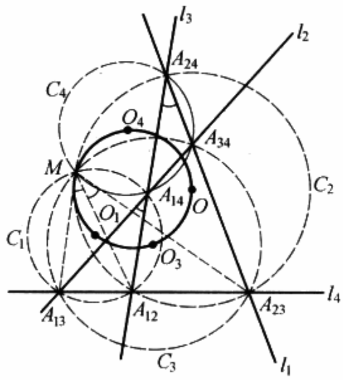


图 54

现在我们已经能够证明:点 O_1、O_2、O_3 和 O_4 在同一圆上.考察经过一个点 M 的圆 C_1、C_2 和 C_3;C_1 和 C_3 还交于点 A_{13},C_2 和 C_3 还交于点 A_{23}.由此可见①:

$\angle O_1O_3O_2 = \angle A_{13}MA_{23} = \angle A_{13}A_{34}A_{23} = l_2$ 和 l_1 的夹角.完全同样也可以证明 $\angle O_1O_4O_2 = l_2$ 和 l_1 的夹角 $= \angle O_1O_3O_2$,由此推出所求的结论.

(2) 假设:对于 n 条直线,我们的断定已经证明了;同时我们还认为已经证明了:n 条直线 l_1、l_2、…、l_n 的心圆在 $n-1$ 条直线 l_2、l_3、…、l_n 跟 $n-1$ 条直线 l_1、l_3、l_4、…、l_n 的心圆的圆心 O_1 和 O_2 间的弧等于直线 l_1 和 l_2 的夹角的两倍.现在考察 $n+1$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{n+1};命 O_1 是 n 条直线 l_2、l_3、…、l_{n+1} 的心圆 C_1 的圆心,其余依此类推,O_{12} 是 $n-1$ 条直线 l_3、l_4、…、l_{n+1} 的心圆 C_{12} 的圆心,其余依此类推.试证明:圆 C_1、C_2、…、C_{n+1} 交于一个点 M.事实上,设 M 是圆 C_1 和 C_2 的不同于 O_{12} 的交点.在这种情形,有②

$$\angle O_{13}MO_{12} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{O_{13}O_{12}} = l_2 \text{ 和 } l_3 \text{ 的夹角;}$$

① 更精确地说,这些角相等或它们的和等于 180°.一般地,要使以下的讨论跟图无关,必须利用有向角的概念.

② ① 参看上页的脚注.

$$\angle O_{12}MO_{23} = \frac{1}{2}\ \widehat{O_{12}O_{23}} = l_3 \text{ 和 } l_1 \text{ 的夹角}.$$

由此推出 $\angle O_{13}MO_{23} = l_2$ 和 l_1 的夹角 $= \angle O_{13}O_{34}O_{23}$，也就是圆 C_3 经过 M. 完全同样可以证明：其余的圆 C_4、C_5、…、C_{n+1} 都经过 M.

现在考察经过同一点 M 的三个圆 C_1、C_2 和 C_3. C_1 和 C_3 还交于点 O_{13}，C_2 和 C_3 还交于 O_{23}. 我们有①

$$\angle O_1O_3O_2 = \angle O_{13}MO_{23} = \angle O_{13}O_{43}O_{23} = l_2 \text{ 和 } l_1 \text{ 的夹角}$$

完全同样可以证明：对于任意的点 $O_i(i = 4、5、\cdots、n+1)$，$\angle O_1O_iO = l_2$ 和 l_1 的夹角. 由此推出：所有的点 O_1、O_2、…、O_{n+1} 在同一圆上.

在例 23 的表述中也可以把所有的外接圆都换成内切圆. 不过这儿出现了一个新的困难，因为三角形的外接圆（经过三角形所有的顶点的圆）只有一个，但是它的切圆（跟三角形所有的边相切的圆）可以有四个（一个内切圆和三个傍切圆）. 要克服这个困难，可以如下处理. 我们在每条线上用箭头标出沿着它运动的方向，来考察有向的直线和圆；其次，有向的直线和圆只当它们在切点的方向相同时才算作是相切的. 这时，就只能有唯一的有向圆，跟三条不交于一点的已知有向直线 l_1、l_2 和 l_3 相切（图 55a 和 b）——l_1、l_2 和 l_3 作成的三角形的切圆.

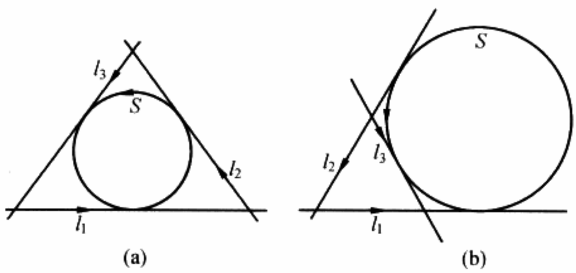


图 55

题 27 （1）设 l_1、l_2、l_3 和 l_4 是一般布置的四条有向直线，也就是每两条都相交、任何三条都没有公共点的四条有向直线；O_1、O_2、O_3 和 O_4 是 l_2、l_3 和 l_4，l_1、l_3 和 l_4 等等作成的三角形的有向切圆的圆心. 那么四个点 O_1、O_2、O_3 和 O_4 在一个圆上，这个圆叫做四条有向直线 l_1、l_2、l_3 和 l_4 的心圆（图 56）.

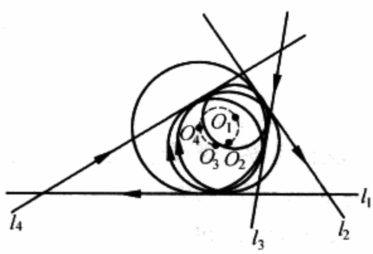


图 56

（2）假设已经定义了 n 条有向直线的心圆，并给定了 $n+1$ 条一般布置的有向直线 l_1、l_2、…、l_n、l_{n+1}. 用 O_1、O_2、…、O_n、O_{n+1} 表示由我们的 $n+1$ 条直线每次取 n 个所得到的 $n+1$ 个组合的心圆. 在这种情形，$n+1$ 个点 O_1、

① 参看上页的脚注.

O_2、…、O_{n+1} 在一个圆上，这个圆叫做 $n+1$ 条有向直线的心圆.

题 27 的解法跟例 23 的解法相近，留给读者去解.

题 28 (1) 两条(相交的) 直线的交点叫做它们的中央点(图 57a).

一般布置的(参看例 23) 三条直线的中央圆指的是经过这三条直线中每两条的中央点的圆(图 57(b)).

现在假设给定了四条一般布置的直线 l_1、l_2、l_3、l_4. 用 S_1 表示三条直线 l_2、l_3、l_4 的中央圆，用 S_2 表示三条直线 l_1、l_3、l_4 的中央圆，其余类推. 那么四个圆 S_1、S_2、S_3、S_4 交于一点 O，它叫做四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的中央点(图 57(b)).

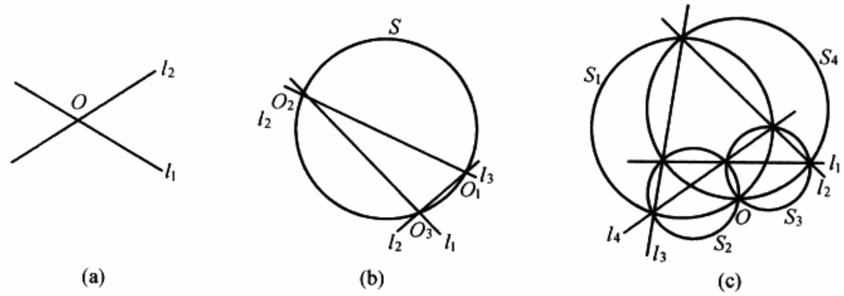


图 57

(2) 假设已经定义了 $2n-1$ 条直线的中央圆和 $2n$ 条直线的中央点，并给出 $2n+1$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{2n}、l_{2n+1}. 用 A_1 表示 $2n$ 条直线 l_2、l_3、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央点，用 A_2 表示 $2n$ 条直线 l_1、l_3、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央点，…，用 A_{2n+1} 表示 $2n$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n} 的中央点. 于是点 A_1、A_2、…、A_{2n+1} 在一个圆上，它叫做 $2n+1$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央圆.

最后，假设给出了 $2n+2$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{2n+1}、l_{2n+2}. 用 S_1 表示 $2n+1$ 条直线 l_2、l_3、…、l_{2n+1}、l_{2n+2} 的中央圆，用 S_2 表示 $2n+1$ 条直线 l_1、l_3、…、l_{2n+1}、l_{2n+2} 的中央圆，…，用 S_{2n+2} 表示 $2n+1$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n+1} 的中央圆. 于是圆 S_1、S_2、…、S_{2n+1}、S_{2n+2} 交于一个点，它叫做 $2n+2$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n+1}、l_{2n+2} 的中央点.

题 29 (1) 给出一般布置的三条直线 l_1、l_2、l_3. 它们作成的三角形的外接圆的圆心，叫做三条直线的中央点.

现在考察一般布置的四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4. 用 A_1 表示三条直线 l_2、l_3、l_4 的中央点，用 A_2 表示三条直线 l_1、l_3、l_4 的中央点，等等. 那么四点 A_1、A_2、A_3、A_4 在一个圆上(参看上面例 23)，这个圆叫做四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的中央圆.

(2) 假设已经定义了 $2n-1$ 条直线的中央点和 $2n$ 条直线的中央圆，并给出 $2n+1$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{2n}、l_{2n+1}. 用 S_1 表示 $2n$ 条直线 l_2、l_3、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央圆，用 S_2 表示 $2n$ 条直线 l_1、l_3、l_4、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央圆，…，用 S_{2n+1} 表示 $2n$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n} 的中央圆. 这时圆 S_1、S_2、…、S_{2n+1} 交于一个点，我们把它叫做 $2n+1$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n}、l_{2n+1} 的中央点.

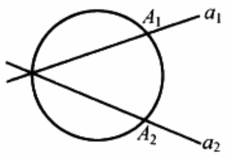
最后，假设给出 $2n+2$ 条一般布置的直线 l_1、l_2、…、l_{2n+2}. $2n+1$ 条直线 l_2、l_3、…、

l_{2n+2} 的中央点用 A_1 表示，$2n+1$ 条直线 l_1、l_3、l_4、…、l_{2n+2} 的中央点用 A_2 表示，…，$2n+1$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n+1} 的中央点用 A_{2n+2} 表示. 那么点 A_1、A_2、…、A_{2n+2} 在一个圆上，我们把它叫做 $2n+2$ 条直线 l_1、l_2、…、l_{2n+2} 的中央圆.

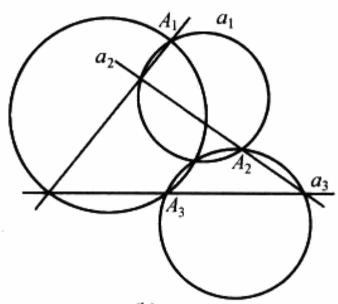
提示 这里表述的命题的证明，跟题 28 中命题的证明完全类似.

点 A 与在它上面用经过它的直线 a 确定的已知方向合起来叫做线性元素. 线性元素用记号 (A,a) 表示. 如果直线 a_1、a_2、…、a_n 是一般布置的直线（参看上面例 23），而且 n 个点 A_1、A_2、…、A_n 在一个圆上，那么 n 个线性元素 (A_1,a_1)，(A_2,a_2)，…，(A_n,a_n) 叫做共圆的线性元素.

题 30 (1) 如果点 A_1 和 A_2 不重合，而直线 a_1 和 a_2 相交，那么经过点 A_1、A_2 且经过 a_1 和 a_2 的交点的圆叫做两个线性元素 (A_1,a_1) 和 (A_2,a_2) 的准圆（图 58(a)）. 三对线性元素 (A_1,a_1) 和 (A_2,a_2)、(A_1,a_1) 和 (A_3,a_3)、(A_2,a_2) 和 (A_3,a_3)（点 A_1、A_2、A_3 都不重合，而直线 a_1、a_2、a_3 是一般布置的）准圆交于一点，这个点叫做三个线性元素 (A_1,a_1)、(A_2,a_2) 和 (A_3,a_3) 的准点（图 58(b)）.



(a)



(b)

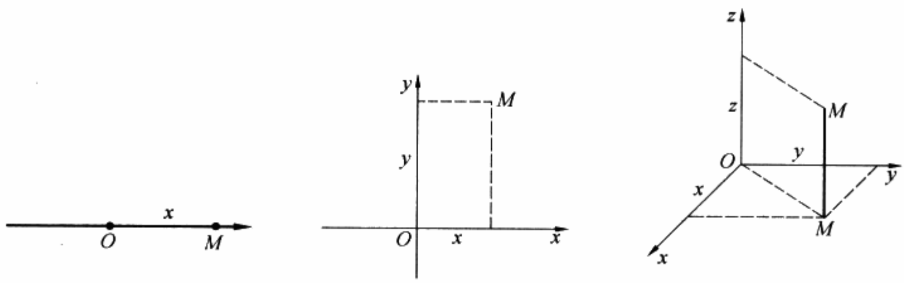
图 58

(2) 假设我们已经定义了 $2n-2$ 个共圆线性元素的准圆和 $2n-1$ 个共圆线性元素的准点. 考察 $2n$ 个共圆线性元素，在这种情形，由它们每次取 $2n-1$ 个得到的所有可能的组合的 $2n$ 个准点在一个圆上，这个圆叫做 $2n$ 个共圆线性元素的准圆. 其次，如果考察 $2n+1$ 个共圆线性元素，那么由它们每次取 $2n$ 个，得到的一切可能的组合确定 $2n+1$ 个准圆，这些准圆交于一个点，叫做 $2n+1$ 个共圆线性元素的准点.

6 关于维数的归纳法

在研究立体几何课程时，常见立体几何跟平面几何定理之间的显著的类似性. 例如，平行六面体的性质在种种方面跟平行四边形的性质类似（例如，请比较定理：“平行六面体的对面相等且平行，对角线交于一点且为交点所平分”与“平行四边形的对边相等且平行，对角线交于一点且为交点所平分”），球的性质跟圆的性质类似（例如，请比较定理：“球的切面垂直于过切点的半径”与“圆的切线垂直于过切点的半径”）. 但是此外平面图形和立体图形之间还存在着本质的差别. 这里主要的区别是在：平面图形有两度（“长度”

和“宽度”),而空间物体却有三度(“长度”、“宽度”和“高度”).相应地,平面上点的位置用两个坐标 x 和 y 可以完全确定(图 59(b)),但是要确定空间一点的位置,就必须知道它的三个坐标 x、y 和 z(图 59(b)).所以我们往往把一般的空间叫做三度空间(“三维空间”),而关于平面,就说它是二度空间(“二维空间”).



(a) (b) (c)

图 59

这个术语还可以进一步扩充.直线上点的位置,由一个唯一的坐标 x 可以完全确定(图 59(a)).这跟下列事实有关:在直线上所有的图形(线段)只有一度(“长度”).所以直线叫做一维空间.由此可以认为:空间的维数可能等于一、二或三.

立体几何的定理通常比相应的平面几何命题要复杂些,而平面图形的性质,当然要比直线上图形(线段)的性质复杂得多.同时,“三维的”(就是立体几何的)定理的证明,本质上常要依赖相应的“二维的”(就是平面几何的)命题的知识.例如,平面六面体的对角线被交点平分这件事的证明,就要利用平行四边形的相应的性质.而“二维的”定理的证明,有时要根据类似的“一维的”定理.这种情况使我们在某些几何问题里有可能利用维数归纳法,也就是利用依次由一维到二维,然后再到三维空间的过程.这一节里,选择了几个这种例子.这时候,维数归纳法常与平常的归纳法同时应用,有时候它也可以用普通的归纳法来替代.

在研究这一节的例子与解问题时,应当注意:与平面上圆(就是与一已知点 O 等距离的点的轨迹)对应的,在空间是球面(图 60(b)),在直线上是与已知点 O 等距离的两点(图 60(a));与平面上圆面对应的,在空间是球体,而在直线上是线段;最后,与平面上三角形 ABC(图 61(b))对应的,在空间是四面体(就是有四个顶点 A、B、C、D 的任意三角维,图 61(b)),而在直线上是有两个“顶点”A 和 B 的线段 AB(图 61(a)).

与已知的平面几何定理对应的,究竟是怎样的立体几何命题?必须指出,这个问题的答案,一般说来,并不是唯一的.有的时候为方便计,我们认为与平面上三角形对应的不是四面体(维数多一的图形),而仍是三角形,只不过是位于空间而已.与这类似,我们认为:在空间与平面上直线对应的可以是直线,也可以是平面.这时,由同一平面几何的定理,可以得到不同的“立体几何的类似物”.例如,与定理“从中心在 O 且内接于半径 R 的圆的正 n 边形的所有顶点到平面上一点 M 的距离的平方和等于 $n(R^2+OM^2)$”对应的,有下列两个立体几何的定理:“从中心在 O 且内接于半径 R 的圆的正 n 边形的所有顶点到

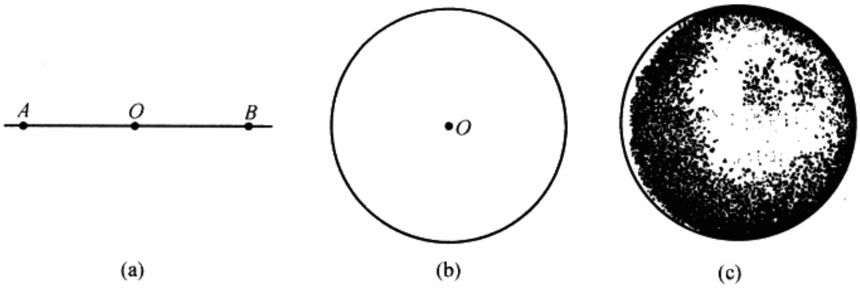


图 60

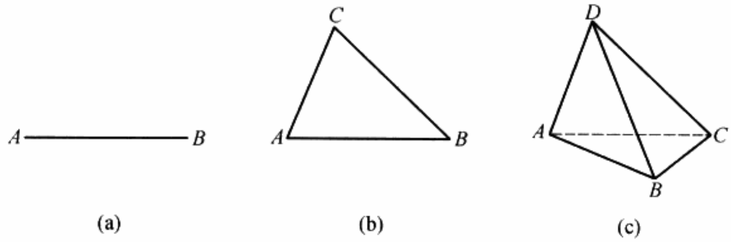


图 61

空间一点M的距离的平方和$n(R^2+OM^2)$”,“内接于球心O、半径R的球面且具有n个顶点的正多面体的所有顶点到空间一点M的距离的平方和等于$n(R^2+OM^2)$”;这两个定理都正确,而且都可以由对应的“二维的”的定理推出来,所以当推导这两个定理时,可以利用维数归纳法.我们不详细地谈论这个问题,只建议读者自己比较由“一维的”定理到“二维的”定理和到“三维的”定理的过程.

这一节由四部分组成:① 用维数归纳法计算;② 用维数归纳法证明;③ 用维数归纳法求轨迹;④ 用维数归纳法下定义.这里不再谈用维数归纳法解作图题,因为空间作图问题本身并不是十分确定的.在所有的情形,我们都把“三维的”(立体几何的)命题看成是基本的,虽然“二维的”(平面的)情形的对应结果常常是最有趣的.在这些情形,只指出由二维情形到三维情形的过程,而不作全面的推导.

在近代数学与物理里,n维空间起着很大的作用.在这种空间里,点的位置由n个坐标确定,这里n是任意的正整数(特别是可能$n>3$)①.n维空间图形的性质常用空间维数的数学归纳法来证明,特别是,这个方法能把这一节中所有的结果都推广到n维空间去.但是这已经超出我们的范围了.

(1) 用维数归纳法计算

例 24 每三个都相交,而任何四个都无公共点的n个平面(我们把这种平面叫做“一般布置的”平面),把空间分成几部分?

---

① 例如,参看“初等数学全书”第二卷(有丁寿田的中译本,商务印书馆出版.——译者注)中岛兹科夫(А.И. Уэков)的“向量空间与线性变形”.不过应当声明:这篇文章需要有一定的数学水平才能看懂,它并不是为中学生写的.

我们依次考虑下列问题：

甲 试确定 n 个点把直线分成几部分？

解 用 $F_1(n)$ 表示这个数，显然 $F_1(n)=n+1$.

乙 每两条都相交，而任何三条都无公共点的 n 条直线（n 条“一般布置的”直线），把平面分成几部分？

解 (1) 一条直线把平面分成两部分.

(2) 假设我们已经知道 n 条一般布置的直线把平面所分成的部分数 $F_2(n)$，考察一般布置的 $n+1$ 条直线．其中前 n 条把平面分成 $F_2(n)$ 部分．按条件，第 $(n+1)$ 条直线 l 与其余 n 条直线相交于 n 个不同的点，这些点把直线 l 分成 $F_1(n)=n+1$ 部分（见甲）．因而直线 l 从以前得到的那些平面部分上又截下来 $n+1$ 部分，就是说，给 $F_2(n)$ 部分又增加上 $F_1(n)=n+1$ 部分．这样，有

$$F_2(n+1)=F_2(n)+F_1(n)=F_2(n)+(n+1) \qquad ⑧$$

把值 $n-1$、$n-2$、…、2、1 代入等式 ⑧ 中的 n，得到

$$\begin{aligned} F_2(n) &= F_2(n-1)+n \\ F_2(n-1) &= F_2(n-2)+(n-1) \\ &\vdots \\ F_2(3) &= F_2(2)+3 \\ F_2(2) &= F_2(1)+2 \end{aligned}$$

把所有这些等式加起来，因为 $F_2(1)=2$，我们得到

$$F_2(n)=F_2(1)+[n+(n-1)+\cdots+2]= \\ 1+[n+(n-1)+\cdots+2+1]$$

最后

$$F_2(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

丙 这个例子开头表述的问题.

解 (1) 一个平面把空间分成两部分.

(2) 假设我们知道 n 个一般布置的平面分空间成部分数 $F_3(n)$，考察 $n+1$ 个一般布置的平面．其中前 n 个把空间分成 $F_3(n)$ 部分；第 $(n+1)$ 个平面 π 与这 n 个平面相交于 n 条一般布置的直线，因而第 $(n+1)$ 个平面被直线分成 $F_2(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$ 部分（见乙）．这样，得到关系式

$$F_3(n+1)=F_3(n)+F_2(n)=F_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2} \qquad ⑨$$

把等式 ⑨ 中的 n 换成 $n-1$、$n-2$、…、2、1，那就有

$$F_3(n) = F_3(n-1) + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2}$$
$$F_3(n-1) = F_3(n-2) + \frac{(n-2)^2 + (n-2) + 2}{2}$$
$$\vdots$$
$$F_3(3) = F_3(2) + \frac{2^2 + 2 + 2}{2}$$
$$F_3(2) = F_3(1) + \frac{1^2 + 1 + 2}{2}$$

把所有这些等式加起来,得到

$$F_3(n) = F_3(1) + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2] + \frac{1}{2}[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] + \frac{1}{2}\underbrace{[2 + 2 + \cdots + 2]}_{n-1\text{次}}$$

最后,考虑到 $F_3(1) = 2$,就有

$$F_3(n) = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + (n-1) = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

题 31 每两个都相交的 n 个球面把空间分成几部分?

提示 依次考察下列问题:

甲 n 个“一维”圆,就是 n 对点,把直线分成几部分?

答 $2n$ 个点把直线分成 $2n+1$ 部分.

甲′ 试求圆上 n 对点把圆分成的部分数 $\Phi_1(n)$.

答 $\Phi_1(n) = 2n$.

乙 试求两两相交的圆把平面分成的部分数 $\Phi_2(n)$.

解 因 n 个圆交第 $(n+1)$ 个圆于 n 对点,因而把它分成 $\Phi_1(n) = 2n$ 部分(见甲′),所以第 $(n+1)$ 个圆又从被 n 个圆分平面所成的 $\Phi_2(n)$ 部分上截分了 $\Phi_1(n) = 2n$ 部分.由此得到等式

$$\Phi_2(n+1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) = \Phi_2(n) + 2n$$

利用这个等式和 $\Phi_2(1) = 2$,有

$$\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$$

乙′ 球面上 n 个两两相交的圆把球面分成几部分?

答 分成 $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ 部分.

丙 原来的问题.

解 因为 n 个球面交第 $(n+1)$ 个球面于 n 个圆,因而把这个球面分成 $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ 部分(见乙′),所以如果 n 个两两相交的球面把空间分成 $\Phi_3(n)$ 部分,那么 $n+1$ 个球面把空间分成

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

部分.由此,因为 $\Phi_3(1) = 2$,所以可以求得

$$\Phi_3(n)=\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$$

(2) 用维数归纳法的证明

例 25 把顶点用数字 1、2、3 和 4 标记的四面体分成小四面体，使分成的小四面体的每两个或者毫无公共点，或者有一个公共顶点，或者有一个公共棱(但非棱的一部分)，或者有一个公面(但非面的一部分). 得到的一切小四面体也用数字 1、2、3 和 4 来标记，而且所有在大四面体面上的顶点用标记这个面的顶点的那三个数字来标记，而在大四面体的棱 上的所有顶点都有标记这个棱的端点的那两个数字来标记. 试证明：至少可以求出一个小四面体，它的四个顶点是用不同的数字标记的.

依次来考察下列问题.

甲 把端点用数字 1 和 2 标记的线段分成几个不相交的小线段，分点用数字 1 或 2 来标记(图 62(a)). 试证明：至少可以找到一个分成的线段，它的端点是用不同的数字标记的.

解 我们来证明用数字 12 表示的线段的个数是奇数. 由此也就推出：至少有一个这样的线段存在(因为零是偶数). 用 A 表示分线段的用数字 1 标记的端点的个数. 这个数显然是奇数，因为大线段内部的每个数字 1(这种数字的个数用 k 来表示) 是 2 个小线段的端点，而只有用来标记大线段的端点的唯一数字 1 属于一个小线段，因而

$$A=2k+1$$

另一方面，设 p 是我们的小线段中线段 11 的个数，而 q 是线段 12 的个数. 那么顶点 1 的个数 A 等于

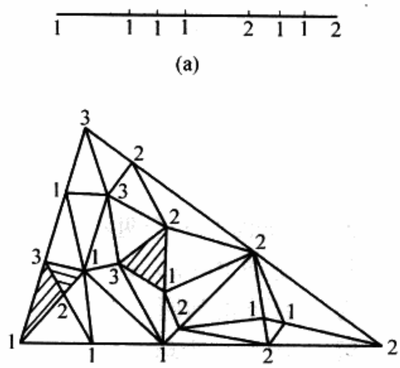
$$A=2p+q$$

由等式

$$2k+1=2p+q$$

推出 q 是奇数.

乙 把顶点用数字 1、2 和 3 标记的三角形分成小三角形，使两个小三角形或者毫无公共点，或者有一个公共顶点，或者有一条公共边(但并不是边的一部分). 小三角形的一切顶点都用数字 1、2 和 3 标记，而且在大三角形的边上的顶点用标记这个边的数字之一来标记(图 62(b)). 试证明：至少能求出一个分三角形，它的顶点是用不同的数字来标记的.



(a)

(b)

图 62

解 我们来证明：三角形 123 的个数是奇数. 为此，我们来计算分三角形的用数字 12 标记的边的总数. 在基本三角形内部的线段 12 的个数用 k 表示，而在大三角形的边 12 上的这种线段 12 上的这种线段的个数用 l 表示(在基本三角形的别的边上根本不能有线段 12). 因为前 k 个分

线段各属于两个分三角形,而后 l 个线段各属于一个三角形,所以

$$A = 2k + l$$

另外一方面,设 p 是顶点用 122 或 121 标记的分三角形的个数,而 q 是三角形 123 的个数.因为前 p 个三角形都各有两条边 12,而后 q 个三角形都各有一条这样的边,所以

$$A = 2p + q$$

由等式

$$2k + l = 2p + q$$

推出:q 和 l 同时是偶数或奇数.但是根据命题甲,数 l 是奇数,因而 q 也是奇数.

丙　这个例子开头表述的命题.

解　设 A 是分四面体的用数字 123 表示的面的个数.如果 k 个这样的面在基本四面体的内部,而 l 个这样的面在它的面 123 上,那么

$$A = 2k + l$$

另一方面,如果 p 是用数字 1123、1223 和 1233 表示的分四面体的个数,而 q 是用数字 1234 表示的分四面体的个数,那么显然

$$A = 2p + q$$

由等式

$$2k + l = 2p + q$$

推出:数 q 和 l 同时是偶数或奇数.但是根据命题乙,数 l 是奇数,因而 q 也是奇数.

在这一节的引言里,我们曾经说过:维数归纳法有时候可以变换成普通归纳法.这里举几个有关的例子.

例 26　试用关于分线段的个数 n 的归纳法,证明例 25 甲表述的命题.

解　(1) 当 $n = 1$ 时断定是显然的.

(2) 假设当把线段任意分成 n 个小线段时,我们的断定已经证明了.现在给出一种分法,把线段 12 分成 $n + 1$ 个小线段.如果并不是所有这些线段都用数字 12 表示,那么就能找到一个线段,它的端点是用相同数字例如 11 来表示的.把这个线段缩成一个点,那么我们就得到把线段 12 分成 n 个小线段的一种分法.根据归纳法的假设,在这个分法里,也就是在原来的分法里,至少能找到一个线段是用数字 12 表示的,这就是要证明的.

例 27　试用关于三角形个数 n 的归纳法,证明例 25 乙中所表述的命题.

解　(1) 当 $n = 1$ 时,断定是明显的;当 $n = 2$ 时,它是容易验证的.

(2) 假设当用任意方法把三角形 123 分成 n 个或较小个三角形时,我们的断定已经证明了.假设我们有一种分法,把三角形分成 $n + 1$ 个三角形.如果并不是所有的这些三角形都是用数字 123 表示的,那么我们就能求出一个三角形,它的两个顶点有相同的号码,例如 1.跟边 11 连接的,或者是两个分三角形(如果这个边在基本三角形内部,图 63(a)),或者是一个三角形(如果这个边在基本三角形边上,图 63(b)).使线段 11 缩成一点,我们就得到一个新的分法,把三角形 123 分成 $n - 1$ 个三角形(在第一种情形,图 63(b))或 n 个三角形(在第二种情形).根据归纳法的假设,在这种分法里(也就是在原来的分法里)至少可以找到一个三角形,它的边是用数字 123 表示的.

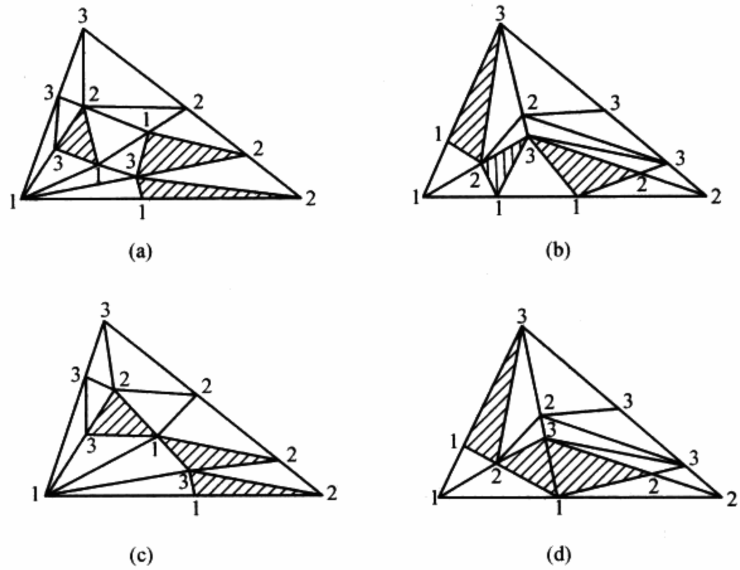


图 63

题 32　试用关于分四面体的个数 n 的归纳法,证明例 25 丙的定理.

提示　证明跟例 27 中断定的证明类似.

还可以使例 25 的命题更明确.我们引进顶点用数字 1234 标记的四面体的"有向"概念:沿着面 123 由顶点 1 到顶点 2、然后再到 3 这种绕行,从顶点 4 来看,可能是顺时针的,也可能是逆时针的.我们把这种绕行方向不同的四面体看成是不同的四面体.在这种情形,下面的命题成立.

题 33　试证明,在例 25 的条件下,用数字 1234 标记而且与大四面体定向相同的分四面体的个数,等于定向相反的四面体 1234 的个数加一.

提示　依次考察下列问题.

甲　由例 25 甲的条件下,我们把下列两种线段 12 看成是不同的:第一种,由顶点 1 到顶点 2 的方向与基本线段由 1 到 2 的方向相同;第二种,由 1 到 2 的方向与基本线段的由 1 到 2 的方向相反.试证明:第一种线段的个数比第二种线段的个数多一.

乙　如果由三角形 123(见例 25 乙)的顶点 1 到顶点 2、然后再到顶点 3 是按顺时针方向(或按逆时针方向)绕行的,那么我们就说这三角形的定向是顺时针(或逆时针)的.试证明:用数字 123 标记且与基本三角形有相同定向的分三角形的个数,等于用数字 123 标记的其余分三角形的个数加一.

丙　本题条件里开头表述的命题.

例 28　在空间给出每四个都相交的 n 个球体.试证明:所有这些球体都相交,也就是存在一个点,属于所有的球体.

依次考察下列问题.

甲　在直线上给出每两条都相交的 n 条线段.试证明:所有这些线段都相交,也就

是存在一个点,属于所有的线段.

解 (1) 当 $n=2$ 时,断定是显明的.

(2) 假设:对于任意的 n 条线段,我们的断定已经证明了,并设在直线上给出 $n+1$ 条两两相交的线段 l_1、l_2、…、l_{n+1}.根据归纳法的假设,n 条线段 l_1、l_2、…、l_n 相交.用 l 表示它们的公共部分(它显然是点或线段).现在来证明:线段 l_{n+1} 和 l 相交.假设不是这样,那么就存在一个点 A,它把 l_{n+1} 和 l 相交.假设不是这样,那么就存在一个点 A,它把 l_{n+1} 和 l 公开(图 64(a)).但是在 l_1、l_2、…、l_n 里面每条线都含有 l,而且按条件还和 l_{n+1} 相交,因而这些线段中的每一条都含着点 A,也就是点 A 属于 l.发生的这个矛盾证明了:l_{n+1} 和 l 相交;它们的公共点属于所有给出的线段 l_1、l_2、…、l_{n+1}.

乙 在平面上给出 n 个圆面,它们每三个都相交.试证明:至少存在一个点,属于所有这些圆面.

解 (1) 当 $n=3$ 时,断定是显明的.

(2) 假设:我们的断定对于任何 n 个圆面已经证明了.在平面上给出 $n+1$ 个圆面 C_1、C_2、…C_n、C_{n+1}.根据归纳法的假设,n 个圆面 C_1、C_2、…、C_n 相交;用 C 表示它们的公共部分(图 64(b);"圆弧多边形" C 可能是个完整的圆面,也可能只是一个点).我们必须证明:图形 C 和圆面 C_{n+1} 相交.假设不是这样,那么在这种情形,就可以引一条直线 l,把图形 C_{n+1} 和 C 分开:例如,AB 的垂直平分线 l 就是这样的一条直线,这儿 A 是 C 上距 C_{n+1} 的圆心 O 最近的点,B 是线段 OA 和圆面 C_{n+1} 的境界的交点(图 64b).①

因为圆面 C_1、C_2、…C_n 中的每一个都包含了图形 C,而且按条件又都与圆面 C_{n+1} 相交,所以也和直线 l 相交.用 a_1 表示圆面 C_1 和直线 l 交截的线段,用 a_2 表示圆面 C_2 和直线 l 交截的线段,等等.那么在直线 l 上我们将有 n 个线段 a_1、a_2、…、a_n.这些线段中的任何两个都相交.事实上,考察其中的两个,例如 a_1 和 a_2.设 M 是图形 C 上的任意点(这时点 M 属于两个圆面 C_1 和 C_2).其次,因已知圆面中的任何三个都相交,因此存在点 N,同时属于圆面 C_1、C_2 和 C_{n+1}.于是线段 MN 整个属于圆面 C_1 和 C_2,也就是说,它跟直线 l 的交点是线段 a_1 和 a_2 的公共点.

由命题甲推出:在直线 l 上存在一个点,它属于所有的线段 a_1、a_2、…、a_n.这个点应当属于所有的圆面 C_1、C_2、…、C_n,因而也就属于图形 C,这跟直线 l 的作法矛盾.所以图形 C_{n+1} 和 C 至少应当有一个公共点,它就是所有圆面 C_1、C_2、…、C_n、C_{n+1} 的公共点.

丙 本例开头表述的命题.

解 (1) 当 $n=4$ 时,断定是显明的.

(2) 假设断定对于任意的 n 个球体已经证明了.给出 $n+1$ 个球体 Φ_1、Φ_2、…、Φ_n、Φ_{n+1}.用 Φ 表示 n 个球体 Φ_1、Φ_2、…、Φ_n 的公共部分(按照归纳法的假设,它是存在的).那

---

① 事实上,如果直线 l 不把图形 C_{n+1} 和 C 分开,那么在它上面就能求得一个点 K,属于图形 C.在三角形 OAK 中,角 OAK 是锐角.此外,按 A 点的定义,$OA \leqslant OK$.因而由 O 给直线 AK 所作的垂线的足 L 在点 A 和 K 之间.因为两个点 A 和 K 都属于所有的圆面 C_1、C_2、…、C_n 中的每一个,也就是说 L 属于 C.所以应当有 $OL \geqslant OA$.得到的这个矛盾("垂线大于斜线")证明了我们的断定.

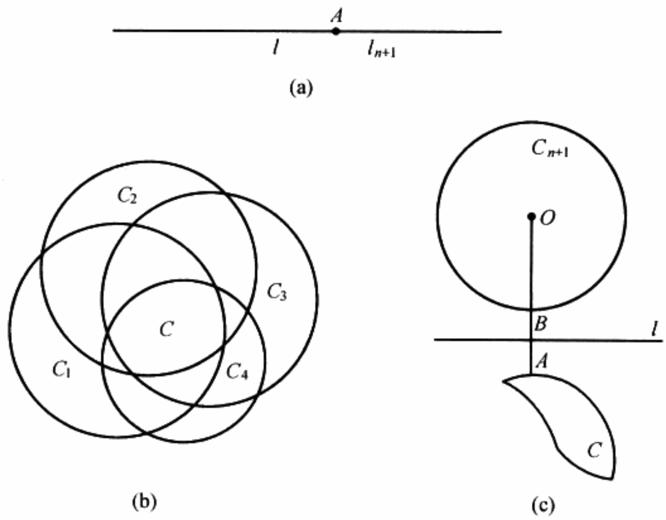


图 64

么,完全跟在例28乙中一样,可以证明:如果球体 Φ_{n+1} 和 Φ 不相交,就存在一个把它们分开的平面 π.球体 Φ_1、Φ_2、$\cdots\Phi_n$ 和平面 π 各交截成圆面,这些圆面中的每三个都相交,因而在平面 π 上存在有一个点,属于所有这些圆面,也就是说,属于 Φ,这跟平面 π 的定义矛盾.

例 28 的命题也可以不用维数归纳法,而用关于图形数的直线归纳法来证明.

例 29　用关于圆面数的归纳法,证明例 28 乙的命题.

解　对于圆弧多边形,就是有限个圆面相交而成的图形,来证明相应的命题;从这里,在特殊情形,就推出我们原来的断定.

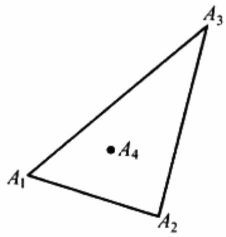
(1) 对于 $n=3$,断定是显然的.

给出四个圆弧多边形 C_1、C_2、C_3、C_4,其中每三个都相交.用 A_1 表示图形 C_2、C_3 和 C_4 的公共点,用 A_2 表示 C_1、C_3 和 C_4 的公共点,其余依此类推.有两种情形可能发生:

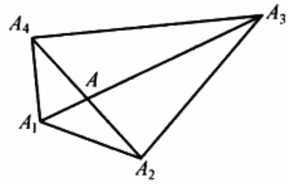
(甲) 点 A_1、A_2、A_3 和 A_4 之一,例如 A_4 属于其余三个点作成的三角形(图 65a).这时候,因为整个三角形 $A_1A_2A_3$ 属于 C_4,所以点 A_4 也属于 C_4,因而 A_4 是所有四个图形 C_1、C_2、C_3、C_4 的公共点.

(乙) 点 A_1、A_2、A_3、A_4 中的任何一个都不属于其余三个点作成的三角形.在这种情形,(凸) 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的对角线的交点 A,作为三角形 $A_1A_2A_3$、$A_1A_2A_4$、$A_1A_3A_4$ 和 $A_2A_3A_4$ 的公共点,是所有四个图形 C_1、C_2、C_3、C_4 的公共点(图 65(b)).

(2) 假设对于 n 个圆弧多边形,我们的断定已经证明了.考察 $n+1$ 个圆弧多边形 C_1、C_2、$\cdots$、C_n、C_{n+1}.用 C 表示图形 C_n 和 C_{n+1} 相交而成的图形(显然 C 也是圆弧多边形).我们来证明 n 个圆形 C_1、C_2、$\cdots$、C_{n-1}、C 中任意三个都相交.事实上,从这 n 个图形里任意取三个,如果其中不包含 C,那么按条件,它们应当相交;如果所取的三个图形中有 C,例如,如果所取的三个图形是 C_1、C_2、C,那么因为四个图形 C_1、C_2、C_n、C_{n+1} 中任意三个都相交,所以根据第 1 部分,这四个图形有一个公共点,它就是图形 C_1、C_2 和 C 的公共



(a)



(b)

图 65

点.

因为 n 个图形 C_1、C_2、…、C_{n-1}、C 中的任意三个都相交，所以根据归纳法的假设，所有这些图形有一个公共点，它也就是 $n+1$ 个图形 C_1、C_2、…、C_n、C_{n+1} 的公共点.

题 35 试用关于球体的个数 n 的归纳法，证明例 28 丙的命题.

提示 试对于"球多面体"，就是有限个球体的公共部分，证明相应的命题. 这个命题的证明可以仿照例 29 断定的证明来进行.

题 35 在平面上给出 n 个点 A_1、A_2、…、A_n，每两个的距离都不大于一. 试证明：所有这些点可以包围在半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的圆内(荣格①定理).

提示 首先证明这些点中的任意三个都可以包围在半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的圆内. 然后把每个已知点当圆心，作一个半径是 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的圆，并且证明这些圆中的任何三个都相交，根据例 28 乙的结果，所有这些圆的公共点存在，且是半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的圆的圆心，这个圆包含所有已知点.

题 36 在空间给出 n 个点 A_1、A_2、…、A_n，每两个点的距离都不大于一. 试证明：所有这些点都可以包围在半径 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 的球内.

提示 证明跟题 35 的解法类似.

例 30 考察某有限个半空间②，它们充满整个空间. 试证明：可以选出四个(或更少个)半空间，它们就已充满整个空间.

依次考察下列问题：

甲 整条直线被某有限条射线盖住. 试证明：由这些射线中可以选出两条把整条直线盖住的射线.

解 设 A 是所有向左射线的最右的顶点，而 B 是所有向右射线的最左的顶点. 因为按条件，射线盖住整条直线，所以点 B 不在 A 的右边，从而顶点是 A 和 B 的那两条射线就

① 荣格(G. Jung)是十九世纪英国的数学家.

② 空间在某一平面一侧的那一部分叫做半空间.

完全盖住了整条直线.

乙　整个平面被某有限个(n 个)半平面[①]盖住.试证明:由这些半平面中可以选取两个或三个盖住整个平面的半平面.

解　我们用关于半平面的个数 n 的归纳法来证明.

(1) 当 $n=3$ 时,断定是显然的.

(2) 假设我们的断定对于 n 个半平面已经成立.给出 $n+1$ 个半平面 F_1、F_2、…、F_n、F_{n+1},盖住了整个平面.用 l_1、l_2、…、l_n、l_{n+1} 分别表示这些半平面的境界.

可能有两种情形发生:

第一种情形　直线 l_{n+1} 全部包含在某个已知半平面内,例如 F_n 内.这时直线 l_n 和 l_{n+1} 平行.如果半平面 F_n 和 F_{n+1} 在自己境界的不同侧(图 66(a)),那么 F_n 和 F_{n+1} 这两个半平面就已经盖住了整个平面.如果在同侧,那么这两个半平面之一必定全部包含在另一个之内(例如 F_{n+1} 包含在 F_n 内,图 66(b)),这时候定理由归纳法的假设可以推出,因为在这种情形,n 个半平面(在我们的情形是 F_1、F_2、…、F_n)就已经盖住了整个平面.

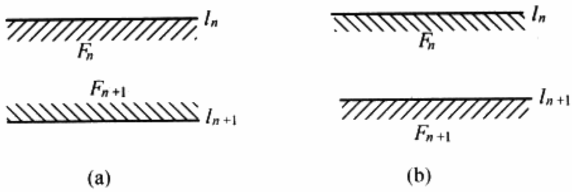


图 66

第二种情形　直线 l_{n+1} 不包含在半平面 F_1、F_2、…、F_n 的任何一个之内.这时候它被这些半平面完全盖住,这些半平面跟它相交成 $m\leqslant n$ 条射线,盖住整条直线.像我们在甲里看到的,由这些射线中可以选出两条也把整条直线盖住的射线.设相应的半平面是 F_{n-1} 和 F_n.半平面 F_{n-1}、F_n 和 F_{n+1} 的互相布置有两种可能情形,现在我们分别来考察.

(甲) 半平面 F_{n+1} 包含直线 l_{n-1} 和 l_n 的交点(图 67(a)).在这种情形,三个半平面 F_{n-1}、F_n 和 F_{n+1} 已经把整个平面盖住了.

(乙) 半平面 F_{n+1} 不包含直线 l_{n-1} 和 l_n 的交点(图 67(b)).在这种情形,平面被 n 个半平面 F_1、F_2、…、F_n 盖住,而定理由归纳法的假设可以推出.

丙　在问题条件里表述的命题.

解　我们用关于已给半空间的个数 n 的归纳法来证明.

(1) 当 $n=4$ 时,断定是明显的.

(2) 假设:我们的断定对于 n 个半空间是正确的.给出 $n+1$ 个半空间 V_1、V_2、…、V_n、V_{n+1}.分别用 π_1、π_2、…、π_n、π_{n+1} 来表示这些半空间的境界.有两种可能情形:

第一种情形　平面 π_{n+1} 全部包含在半空间 V_1、V_2、…、V_n 之一,例如 V_n 内.

在这种情形,平面 π_{n+1} 和 π_n 平行.如果半空间 V_{n+1} 和 V_n 在自己境界的不同侧,那么

---

① 平面的某一条直线一侧的那一部分叫做半平面.

经典重温

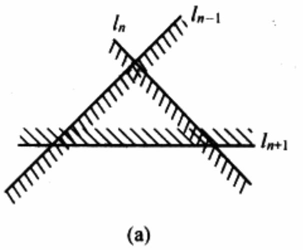


图 67

这两个半空间就已经把整个空间充满了.如果在同侧,那么这两个半空间 V_{n+1} 和 V_n 之一全部包含在另一个之内,而定理由归纳法的假设可以推出.

第二种情形　平面 π_{n+1} 不包含在半空间 V_1、V_2、…、V_n 的任何一个里.这时它被这些半空间完全盖住,而且跟这些半空间相交成 $m \leqslant n$ 个半平面 F_1、F_2、…、F_n.

根据乙的结果,由这些半平面中可以选出两个或三个,也把整个平面盖住(图 66(a)和图 67(a)).现在我们来分别考察在这里可能发生的各种情形.

(甲)平面 π_{n+1} 被两个半平面盖住(图66(a)),例如被 F_1 和 F_2 盖住,而且相应的平面 π_1 和 π_2 平行(图 68(a)).在这种情形,整个空间被两个半空间 V_1 和 V_2 所充满.

(乙)平面 π_{n+1} 被两个半平面 F_1 和 F_2 盖住,而相应的平面 π_1 和 π_2 相交(图68(b)).如果半空间 V_{n+1} 包含 π_1 和 π_2 的交线,那么三个半空间 V_1、V_2 和 V_{n+1} 就充满整个空间.如果不包含,那么半空间 V_{n+1} 被半空间 V_1 和 V_2 盖住,定理可以由归纳法的假设推出来.

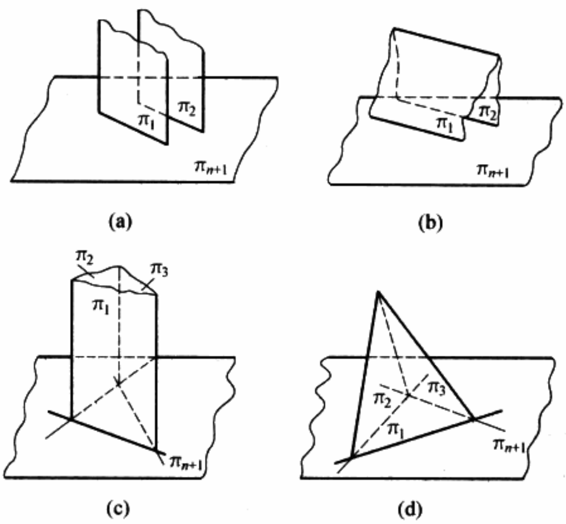


图 68

(丙)平面 π_{n+1} 被三个半平面(图67(a)),例如 F_1、F_2 和 F_3 盖住,而且平面 π_3 平行于 π_1 和 π_2 的交线(相应的平面作成"三角柱";见图 68(b)).在这种情形,三个半空间 V_1、V_2 和 V_3 充满整个空间.

(丁)平面 π_{n+1} 被三个半平面 F_1、F_2 和 F_3 盖住,而且 π_3 不平行于 π_1 和 π_2 的交线(相应的平面作成"三角锥";见图68(d)).如果半空间 V_{n+1} 包含平面 F_1、F_2 和 F_3 的交点,那么四个半空间 V_1、V_2、V_3 和 V_{n+1} 就充满整个空间;如果不包含,那么半空间 V_{n+1} 被半空间 V_1、V_2、V_3 盖住,定理可以由归纳法的假设推出来.

题 37 试证明:在空间不可能存在四条以上两两作成钝角的射线.

提示 在空间给出一组有限条两两作成钝角的射线,并且假设它们的数目已达到最大,意思就是再没有一条射线能和给出的射线都作成钝角了.给每条射线附一半空间,它以垂直于这条射线的平面为界,而与射线在这个平面的同一侧.由于我们的射线组是最大的,所以这些半空间充满了整个空间,于是我们的断定可以由例30的结果推出.

例 31 试证明有这样一个数 C_3 存在,当把边长不大于1的每个空间多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边重排时(不改变它们的大小和方向),可以使重排结果得到的多边形容纳进半径 C_3 的球内.

像这节里其他例子一样,我们先来考察相应的"一维"和"二维"问题.

甲 在直线上给出 n 个点 A_1、A_2、$\cdots$、A_n,而且线段 A_1A_2、A_2A_3、$\cdots$、$A_{n-1}A_n$、A_nA_1 的长度都不大于1.试证明有一个数 C_1(跟点的位置和数 n 都无关!)存在,把线段 A_1A_2、A_2A_3、$\cdots$、$A_{n-1}A_n$、A_nA_1 重新布置在直线上时能使得到的"折线"$B_1B_2\cdots B_nB_1$(它的环节大小和方向都跟"折线"$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nA_1$ 的环节相同)全部在长度是 $2C_1$ 的线段内部.

解 我们约定:如果点 A_{i+1} 在 A_i 的右边(假定载负所有点的直线是水平的),就认为我们的"折线"$A_1A_2\cdots A_nA_1$ 的环节 A_iA_{i+1}($i=1$、2、$\cdots$、n;点 A_1 取作 A_{n+1})的长度 a_i 是正的;如果是相反的情形,就认为是负的.显然,a_1+a_2 是线段 A_1A_3 的长度(按我们的约定它可能是正的,也可能是负的),$a_1+a_2+a_3$ 是线段 A_1A_4 的长度,$\cdots$,$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ 是线段 A_1A_n 的长度,$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$(这是"线段 A_1A_1"的长度).因为折线 $B_1B_2\cdots B_nB_1$ 的每一环节都等于原来折线 $A_1A_2\cdots A_nA_1$ 的某一环节,所以我们的命题可以表达如下:

已知 n 个正数和负数 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-1}、a_n,它们的绝对值都不大于1,并且它们的和等于0.试证明:这些数可以排列成次序 ai_1、ai_2、$\cdots$、ai_{n-1}、ai_n(i_1、i_2、$\cdots$、i_{n-1}、i_n 是按某种次序重新排列的号码1、2、$\cdots$、$n-1$、n),使所有的和 ai_1、ai_1+ai_2、$ai_1+ai_2+ai_3$、$ai_1+ai_2+\cdots+ai_{n-1}$ 的绝对值都不大于某一个数 C_1(跟数列 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 无关,甚至跟数 n 也无关).

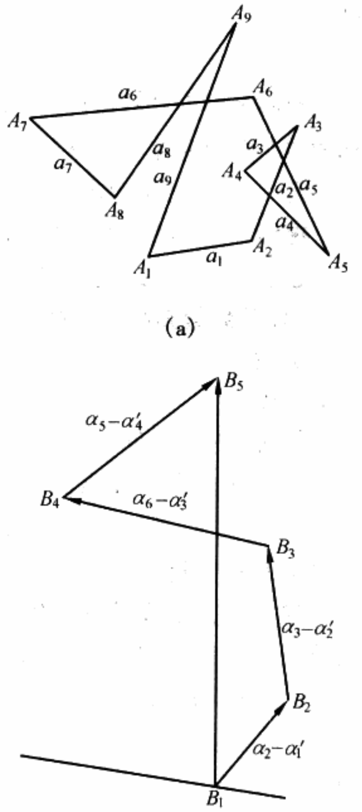
我们来证明:可以取1当作 C_1.设 a'_1、a'_2、$\cdots$、a'_p 是数列 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 中的所有正数,而 a''_1、a''_2、$\cdots$、a''_q 是所有的负数($p+q=n$).取前几个正数 a'_1、a'_2、$\cdots$、a'_k($k\leqslant p$),使它们的和不大于1(例如,取一个数 a'_1),然后取几个负数 a''_1、a''_2、$\cdots$、a''_l($l\leqslant q$),使所有取出的数的和是负的,但是绝对值不大于1.其次,再取正数,等等,直到把所有的数取完为止,这时得到的数列

$$a_1^*=a'_1,a_2^*=a'_2,\cdots,a_k^*=a'_k,a_{k+1}^*=a''_1,a_{k+2}^*=a''_2,\cdots,a_{k+l}^*=a''_l,\cdots$$

显然具有所要求的性质.

乙 在平面上给出多边形 $A_1A_2\cdots A_n$(它可以是凹多边形,甚至于是有自交点的),这

个多边形各边的长度都不大于 1(图 69(a)).试证明:存在一个数 C_2(跟多边形无关),把多边形的边重新排列而不改变它们的大小和方向,可以使得到的多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 完全容纳进半径是 C_2 的圆内.



(b)

图 69

解 我们来证明:可以取数$\sqrt{5}$ 当作 C_2.用 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 表示多边形 $A_1A_2\cdots A_nA_1$ 的连带长度和方向的各边,也就是把它们看成向量.从它们里面选取某几个向量 $\boldsymbol{a'}_1$、$\boldsymbol{a'}_2$、…、$\boldsymbol{a'}_s$,使它们作成的折线的封闭向量$\overline{B_1B_s}$ 有最大可能的长度(图 69(b)).这时向量 $\boldsymbol{a'}_1$、$\boldsymbol{a'}_2$、…、$\boldsymbol{a'}_s$ 在封闭向量$\overline{B_1B_s}$ 上的射影跟向量$\overline{B_1B_s}$ 的方向相同(如果某一个向量的射线的方向相反,那么消除这个向量等于增大封闭向量的长度).恰相反,所有其余的向量 $\boldsymbol{a''}_1$、$\boldsymbol{a''}_2$、…、$\boldsymbol{a''}_{n-s}$ 在$\overline{B_1B_s}$ 上的射影都有相反的方向.换句话说,可以认为向量 $\boldsymbol{a'}_1$、$\boldsymbol{a'}_2$、…、$\boldsymbol{a'}_s$ 在$\overline{A_1A_s}$ 的方向上的射影α'_1、α'_2、…、α'_s 是正的($0 \leqslant \alpha'_i \leqslant 1, i = 1$、2、…、$s$),而向量 $\boldsymbol{a''}_1$、$\boldsymbol{a''}_2$、…、$\boldsymbol{a''}_{n-s}$ 在同一方向上的射影 α''_1、α''_2、…、α''_{n-s} 是负的($-1 \leqslant \alpha''_j \leqslant 0, j = 1$、2、…、$n-s$).用 β_1、β_2、…、β_n 表示向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 在 B_1B_s 的垂线 l(在它上面选取一个"正"向)上的(正的或负的)射影,显然,$\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_s = 0$ 而且 $\beta''_1 + \beta''_2 + \cdots + \beta''_{n-s} = 0$(这儿 β'_1 是向量 $\boldsymbol{a'}_1$ 的射影,β''_1 向量 $\boldsymbol{a''}_1$ 的射影,等等);同时 $|\beta'_1| \leqslant 1, |\beta'_2| \leqslant 1, \cdots, |\beta'_s| \leqslant 1$,而且 $|\beta''_1| \leqslant 1, |\beta''_2| \leqslant 1, \cdots, |\beta''_{n-s}| \leqslant 1$.根据甲,可以排列数 β'_1、β'_2、…、β'_s 和数β''_1、β''_2、…、β''_{n-1},使对于任意的 v,不等式 $\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_v \leqslant 1$ 和 $\beta''_1 + \beta''_2 + \cdots + \beta''_v \leqslant 1$ 成立.现在如果所有的数 β'_1、β'_2、…、β'_s 和$\beta''_1 + \beta''_2 + \cdots + \beta''_{n-s}$ 联合成一个总的数列,使以上建立的数 β'_1、β'_2、…、β'_s 的前后次序和数β''_1、β''_2、…、β''_{n-s} 的前后次序不变,那么所得数列的前有限个项的和不大于 2.

现在把数 α'_1、α'_2、…、α'_s 和α''_1、α''_2、…、α''_{n-s} 排成一个总的数列,使这个数列前任意个项的和的绝对值不大于 1.像甲中讨论里见到的,这可以做到,并且不破坏数 α'_1、α'_2、…、α'_s 和数α''_1、α''_2、…、α''_{n-s} 之间的前后次序.设我们的向量的相应排列是 α_1^*、α_2^*、…、α_n^*.那么对于任意 v,有

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_v^* \leqslant 1, \quad \beta_1^* + \beta_2^* + \cdots + \beta_v^* \leqslant 2$$

这里 α_k^* 和β_k^* 是$\boldsymbol{a}_k^*$($k = 1$、2、…、n)在 B_1B_s 和 l 上的射影.因为向量 $\boldsymbol{a}_1^*$、$\boldsymbol{a}_2^*$、…、$\boldsymbol{a}_v^*$($v = 1$、2、…、n)所成的折线的封闭向量在直线 B_1B_s 和 l 上的射影等于$\alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_v^*$ 和$\beta_1^* + \beta_2^* + \cdots + \beta_v^*$,所以如果这个封闭向量的长度等于 C_v,那么

$$C_v^2 = (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_v^*) + (\beta_1^* + \beta_2^* + \cdots + \beta_v^*)^2$$

也就是

$$C_v^2 \leqslant 5, \quad C_v \leqslant \sqrt{5}$$

我们求出了:得到的向量折线的任意顶点到定点 A_1 的距离不大于$\sqrt{5}$.由此推出:得到的整个多边形在半径$\sqrt{5}$ 的圆内.

丙 例子开头所表述的命题.

提示 试证明:可以把$\sqrt{21}$ 取作 C_3.在这种情形的讨论跟乙中的类似;β_1、β_2、…、β_n 是向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 在垂直于封闭向量$\overline{B_1B_s}$ 的平面 π 上的射影.

(3) 用维数归纳法的轨迹

例 32 试在空间求与 n 个已知点 A_1、A_2、…、A_n 的距离的平方和是常数(等于 d^2)的点的轨迹.

依次考察下列问题.

甲 在直线上给出 n 个点 A_1、A_2、…、A_n.试在直线上求一点 M,使

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = d^2$$

这里 d 是已知数.

解 把我们的直线当作数轴.设跟点 A_1、A_2、…、A_n 对应的数是 a_1、a_2、…、a_n,而跟所求点 M 对应的是数 x.在这种情形,线段 MA_1、MA_2、…、MA_n 的长等于$(x-a_1)$、$(x-a_2)$、…、$(x-a_n)$,因而

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

但是

$$\begin{aligned}
&(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2 = \\
&x^2 - 2a_1x + a_1^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2 + \cdots + x^2 - 2a_nx + a_n^2 = \\
&nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) = \\
&n\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}
\end{aligned}$$

如果用 A 表示跟数$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 对应的点,那以

$$\begin{aligned}
&MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = \\
&nMA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}
\end{aligned} \tag{⑩}$$

这样,有

$$nMA^2 = d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$$

就是

$$MA = \sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}\right]}$$

这个等式一般说来(当根号下的式子是正的时候)确定两个满足问题条件的点

M(点 A 的两边各有一点).

乙　试求平面上跟 n 个已知点 A_1、A_2、…、A_n 的距离的平方和是常数(也等于 d^2)的点的轨迹.

解　在平面上取某一个(任意的)直角坐标系,并分别用 A'_1、A'_2、…、A'_n 和 A''_1、A''_2、…、A''_n 表示点 A_1、A_2、…、A_n 在 x 轴和 y 轴上的射影;用 M' 和 M'' 表示点 M 在坐标轴上的射影.在这种情形,有

$$MA_1^2 = M'A'^2_1 + M''A''^2_1$$
$$MA_2^2 = M'A'^2_2 + M''A''^2_2$$
$$\vdots$$
$$MA_n^2 = M'A'^2_n + M''A''^2_n$$

因而

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = (M'A'^2_1 + M'A'^2_2 + \cdots + M'A'^2_n) + (M''A''^2_1 + M''A''^2_2 + \cdots + M''A''^2_n)$$

但是根据公式⑩

$$M'A'^2_1 + M'A'^2_2 + \cdots + M'A'^2_n = nM'A'^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$$

$$M''A''^2_1 + M''A''^2_2 + \cdots + M''A''^2_n = nM''A''^2 + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{n}$$

这里 a_1、a_2、…、a_n 和 b_1、b_2、…、b_n 是点 A_1、A_2、…、A_n 的横坐标和纵坐标,A' 和 A'' 是 x 和 y 轴上坐标是 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 和 $\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$ 的点.这样,有

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = nMA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} - \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{n}$$

(A 是平面上的点,它在坐标轴上的射影是点 A' 和 A'')从这里,有

$$nMA^2 = d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} + \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{n}$$

也就是说

$$MA = \sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} + \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{n}\right]}$$

这就是说,如果

$$d > (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} - \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{n}$$

那么所求的轨迹是半径

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}+\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{n}\right]}$$

的圆;如果

$$d=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}-\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{n}$$

那么所求的轨迹是一个点;如果

$$d<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}-\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{n}$$

那么所求的轨迹一个点也没有.

丙 例题开头所表述的命题.

提示 考察空间的直角坐标系 x、y、z,并把所有的点都射影到 xOy 平面为 Oz 轴上;其次再利用公式 ⑩ 和 ⑪.

(4) 用维数归纳法下定义

例 33 试定义四面体的中线和重心.

甲.线段的中点叫做线段的重心.

乙.连结三角形任意顶点和对边中点的线段叫做三角形的中线.大家知道,三角形的中线相交于一点,这个点叫做三角形的重心.

丙.连结四面体的任意顶点和对面的重心的线段叫做四面体的中线.

我们来证明:四面体的中线相交于一点.

考察四面体 $ABCD$(图 70),命 O_1、O_2、O_3 和 O_4 是三角形 DBC、ACD、ABD 和 ABC 的重心.因为直线 BO_1 和 AO_2 交于线段 CD 的中点 P,所以直线 AO_1 和 BO_2 也交于某一个点 O_{12};同样,AO_1 和 CO_3、AO_1 和 DO_4、BO_2 和 CO_3、BO_2 和 DO_4、CO_3 和 DO_4 交于点 O_{13}、O_{14}、O_{23}、O_{24} 和 O_{34}.我们来证明所有这些点都重合(在图中的点 O).事实上,如果真有两个点不重合,例如 O_{12} 和 O_{13} 不重合,那么直线 AO_1、BO_2 和 CO_3 就要在一个平面 π(在平面 $O_{12}O_{13}O_{23}$)上,但是这时跟 AO_1、BO_2 和 CO_3 相交的直线 DO_4 就要在那个平面上了,也就是说,四面体的四个顶点就要在一个平面 π 上了.因为这不直确,所以点 O_{12} 和 O_{13} 应当重合;所有其余的点 O_{14}、O_{23}、O_{24}、O_{34} 也跟这个点重合.

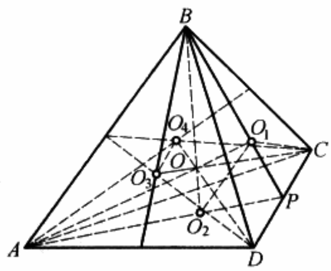


图 70

四面体的中线的交点叫做四面体的重心.

数学奥林匹克中的切比雪夫逼近问题

文集编辑部

1 切比雪夫小传

对于像Chebychev这样世界级的数学大师,自然会有许多传记材料,为了保持材料准确我们选择两个反映Chebychev不同侧面的传记文章,一篇是陈惟勇先生译自前苏联Г.И.林科夫所著《中学数学的课外活动》一书.

它侧重于介绍Chebychev的生平及贡献.

П.Л.切比雪夫在1821年5月26日生于卡鲁士斯基港的欧卡托夫村.他被人们认为是19世纪最伟大的数学家和应用力学家之一,俄国自立的数学学校和俄国机械科学的奠基人.

入莫斯科大学前的初等教育,他是在家里受到的.教育家、一本著名课本的作者坡高列里斯基,是切比雪夫的教师之一.

关于坡高列里斯基的《代数学》切比雪夫曾说,它以自己的简明性而是俄国书籍中最好的一本.

切比雪夫在童年时就对机械和机械玩具发生了兴趣,并喜欢亲手制作它们.

在几次的几何课堂里,他注意了这门科学跟他的玩具之间的联系,并且热心地从事这种联系的研究.

切比雪夫于1837年人大学.在从一年级转入二年级的时候,他写出了《论方程的根之计算》这部著作,为此他获得了银质奖章.切比雪夫以自己的热心和成就,使著名的大学教授Н.Д.布拉什曼的注意力转向了自己,布拉什曼教授开始帮助切比雪夫研究,劝导他将自己献给数学.切比雪夫对自己的老师,永远怀着最深切的敬意.

大学毕业后又过了五年,切比雪夫在莫斯科大学以《概率论初等分析实验》论题考受了专家学位.

过了三年,他在彼得堡大学以《同余式论》论题被授于了博士学位.

在1853年切比雪夫被选为研究生,而在1859年被选为科学院的普通院士.

切比雪夫的教授生涯大部分是在彼得堡大学里度过的,并继续到整整是35年——从1847年到1882年.到1882年,切比雪夫停止了讲课,全力投入了科学研究工作.

为了参观各种工厂和研究实用力学,在1852年切比雪夫曾出差到国外去,他同欧洲

各国的一些著名的学者们交谈，出席了一些学术会议.

从1856年到1873年，切比雪夫是学校总局学术委员会(后更名为人民教育部学术委员会)的会员.

切比雪夫在数学和应用方面卓越的成就，生来就给他带来了作为世界上最伟大的学者之一的荣誉.他被数个外国科学院：法国的、意大利的以及英国的皇家协会等选为院士.他还是许多俄国的以及外国的大学学术团体的名誉会员.在费拉捷里费亚和在契卡果的两次国际展览会上，切比雪夫以其自己的机械模型获得了奖状.

切比雪夫以73岁的年纪，在1894年12月8日逝世于彼得堡，埋葬在欧卡托夫村.

切比雪夫的著作，是经A. A. 马尔科夫和H.Я.索宁两位院士编纂后由科学院出版的，它分为两卷且印成两种文字：俄文和法文.

切比雪夫的科学兴趣所及，几乎包括了数学的一切主要部门.

他在数论和概率论方面进行了研究，他解决了积分学上的许多复杂问题，他研究了用连分数的插补问题，特别是用最小二乘法研究了插补问题.

切比雪夫的数学研究，不仅在成就上是出色的，而且那些用来获得这些成就的新颖方法的深奥和优美也是出色的.

力求以最少限度的一些最简单的方法而获得一些成就，这也是切比雪夫的特点.

切比雪夫在数论中的一些主要成就，是关于质数在自数数列中的分布问题.

这是一个直到今天尚未彻底解决的问题，它有好几个世纪之久了.很早，欧几里得就证明了，质数的集合是无限的.后来经验证明了，质数在自数数列中的分布是不均匀的.例如，在第一个一百万中质数的个数是78499，而在第二个一百万中质数的个数是70433，但是质数分布的精确定律的建立却未成功.

贝特兰说出了一个命题，在两个自然数 x 和 $2x-2(x>3)$ 之间含有一个质数.

法国数学家列日安得尔以及其他的一些数学家们，在经验所知的基础上，试图建立表示不超过一已知数 x 的质数个数的一些近似公式.

切比雪夫证明了别尔特蓝命题的正确性，从而建立了关于质数在整个自然数列中的分布定律的第一个意义重大的命题.

切比雪夫进一步证明了，若 $\pi(x)$ 是表示小于 x 的质数个数的函数，则 $0.92129\leqslant\frac{\pi(x)}{x/\ln x}\leqslant 1.10555$，并且，若当 $x\to\infty$ 时比式 $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 的极限存在，则这个极限应等于1.因而，对于充分大的 x 值，有近似等式 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}$.

这些著作——C.H.别尔什金院士指出——一下子就把切比雪夫在全世界人们的面前列入了现代最伟大的数学家的行列中.而这是很自然的：在切比雪夫建立了科学基础并获得了最初的一切巨大成果以后，罗巴切夫斯基就解决了几个世纪以来的平行问题，它(指平行问题——译者)是如此的古老，因而，或许比质数问题还要难些.

切比雪夫在概率论方面的研究，首先是关于它的基本原理——大数法则与对于独立事件的量之和的极限定理.

在相当广泛的一些假定之上的这些定理的准确公式和严整的数学证明，都是切比雪

夫做的.

切比雪夫发展了最良近似函数理论和正交多项式(切比雪夫多项式)理论,后者在近代数学分析以及其邻近的各科中起着重大的作用.在切比雪夫的一本数学分析著作中,阐述无理函数积分的研究也占据着一个主要的位置.在这里他大大地发展了在他以前为挪威数学家阿贝尔所获得一些结果.

切比雪夫的求问于实践而使其满足的方针,是他的科学著作的一个最大的特点.

建立一种为适于最最有效地利用自然力的技术,发展一些为保障达到此目的的数学方法——这就是切比雪夫的基本思想,他在生活中坚持不懈地贯彻这种思想,并在自己的一些言论中强调它.

切比雪夫说过:理论跟实践的接近产生了一些最良好的结果,且不唯独是实践因此有所收获,而科学本身在它的影响下发展起来:它给科学发现了一些新的研究对象或早已知道了事物中的一些新方面.如果一种理论从旧理论的新应用中或从旧理论的新发展中获得很多.

切比雪夫特别热心地从事了所谓机械平行四边形理论的研究,它是专供蒸汽转动机用的.燃料的节约以及机器的坚固,都是以这些机械的合理制造为转移.正是这些研究,将切比雪夫引向了一个新的、极其有用的数学理论——与零成最小规避的函数理论.切比雪夫在机械学上的研究是有其具体的体现的:他制作了许多的机械模型.这些模型被保存在苏联科学院里.

人们公正地认为,切比雪夫是俄国数学的导师,俄国自立的数学学校(原文并无'数学'一词,而与前文相对照可看出是应该有的——译者)的创建者.对于这些,俄国科学不仅应当感谢切比雪夫的天才,而且也应当感谢他的惊人的教育才能和智慧.切比雪夫的令人永记不忘的一个事迹是,他在一些学术谈话中,以其自己的著作和指示将自己的学生们引向探求本质的一些有用问题上,并使他们注意这样的一些问题,即对它们的研究总会或多或少地得出一些重要的结果.

例如,他曾向自己最亲近的一个学生里亚普诺夫(后来是科学院院士)提出了这样的一个问题,它关系着绕轴旋转的同类液体质量形态的研究.里亚普诺夫在这个问题上研究了整个一生,并获得了一些卓越的成就,这些成就大大地超过了在这方面为著名的法国数学家A.普安卡尔所作出的一切.

切比雪夫关于各种数学问题的讲演,都利用了很大程度的通俗性,生动而又诱人的叙述,是他讲演的特色,它们是穿插着许多有趣的见解,即关于这些或另一些问题,或一些科学方法的意义和重要性.

苏维埃各界,都在虔诚地追忆着伟大的俄国数学家切比雪夫.在今天,许多俄国的数学学校和应用力学学校,都在发展着他的思想.

1944年12月,苏联人民委员会发布了一项决议《关于纪念科学院院士П.Л.切比雪夫逝世50周年的措施》.

前苏联人民委员会决定:

(1)同意苏联科学院关于出版科学院院士П.Л.切比雪夫的全集的决议.

(2) 以科学院院士 П.Л.切比雪夫命名设立两项为数 20 000 卢布的奖金,它们是每三年奖给在数学方面以及在机械学和机器理论方面有优秀著作的人.

(3) 以科学院院士 П.Л.切比雪夫命名在莫斯科大学和列宁格勒大学为研究生和候补博士们设立若干奖学金,而在苏联科学院数学研究所里是以斯切科洛夫命名的.

(4) 在列宁格勒大学的校舍前立起一尊切比雪夫的半身铜像.

别外一篇是在《切比雪夫全集》(第一卷) 数论部分中前苏联著名数学家维诺格拉杂夫为切比雪夫写的一个小传,以数学家的视角对切比雪夫进行了评介.

切比雪夫于 1821 年 5 月 26 日(俄历 5 月 14 日)诞生于鲁什克省伯洛夫斯克县奥加托伏小村(自己)父亲的领地上.切比雪夫的家庭是属于古老的贵族之一,他父亲在那时是个有教养而富于资财的人.

切比雪夫初期所受的教育,即入大学前的教育,是在家中获得的.他的母亲奥格拉芬娜・伊万诺芙娜教他读书认字,其他别的几门功课,包括算术和法文,则是她的堂姊妹苏哈列娃一位颇有教养而对切比雪夫起着重大作用的人.

1832 年,为了准备送切比雪夫和他的哥哥上大学,切比雪夫举家迁居莫斯科.为了达到这个目的,家里还给他们聘请了莫斯科卓越的教师,其中有当时著名的教育家,数学教师伯格烈利斯基.关于他的"代数" 一书,切比雪夫后来谈起过,认为这是那时俄文版本最好的一本,因为它阐述得"最简明".在这个时期,切比雪夫对数学的才华已经显示出来了.因而,他后来给自己选择了物理数系.

切比雪夫于 1837 年考进了莫斯科大学.当他升上二年级的时候,他已经完成了"方程根计算法" 一文的写作,这篇论文使他获得了银质奖章.他对功课孜孜不倦,认真钻研的精神立刻引起了卓有声望的伯拉什曼教授的注意.教授已经预见到自己这位新学生未来在数学上的光辉前途,因而特意地指导他的学业,特别地谆谆善诱他把自己贡献给数学.对于这位学者,切比雪夫始终保持着最深厚的敬意.他把很迟才得到的伯拉什曼的照片当作圣物似的一直保藏到他临死前为止.1841 年切比雪夫念完了大学的课程.

1840 年的时候,俄国大部分地方闹饥荒,许多地主,包括切比雪夫的双亲在内都遭到了破产,他们不得不阖家迁往乡村作久居之计,这时切比雪夫的父亲已经无力帮助儿子.为了不受贫困的威胁,这个刚出校门的青年人看来必须去工作或者做个诲人不倦的教书匠,但是,由于他正确地考虑到这样做将会使他离开心爱的数学研究,因此他宁可忍受贫困的生活也不愿撇下自己的事业.在这个时候,他只分到父亲在柏列兹斯清卡房产的一所住宅,他就在那儿安居下来,同时还和两个弟弟及另外两个青年同住.这些年青人和他的弟弟一同一起准备着投考学校.切比雪夫还亲自抽出一些时间为他们试教数学,但不久就停止了.据切比雪夫自己承认,他是一个没有涵养的教育家,因为他常常生气和大声叱责自己的学生.

这段时期,切比雪夫的第一批学术著作出版了.1846 年他曾在莫斯科大学答辩的"概率论的初等分析的经验" 的学位论文也写完了.

切比雪夫在他的"对数积分论" 学位论文答辩后,因为获得了彼得堡大学教授助理

的职位,接替离职的安库多维奇教授的位置.所以,于 1847 年迁居到彼得堡.这篇论文的内容出现在切比雪夫以后的著作里,而这篇论文的手稿连同他的当选词的手稿还保存下来,其中的原理部分则已刊印出来了.这篇论文使切比雪夫获得在大学讲课的权利,1849 年切比雪夫由于第三篇著名的学位论文"等于论"而荣获博士学位.

与切比雪夫几乎同时以常任教授身份进入彼得堡大学的布良柯夫斯基是俄国最有名的数学家之一.那时他已经是科学院的常任院士了.另外一位是应用数学教研室的非常任教授,当时极为闻名的数学家沙莫夫.这两位学术昭著、品德高尚的杰出的学者是切比雪夫迁居彼得堡后最先接近而意气相投的良友.他跟他们之间的最友好的关系一直保持到他俩去世为止.他跟布良柯夫斯基尤为亲密,后者赏识到切比雪夫巨大的科学潜力,很快就把他引进科学院开始作为自己出版尤拉名著的助手,以后升为正式会员(1853 年切比雪夫被选为助理员,而 1859 年已经是科学院的常任院士了).

切比雪夫居住彼得堡后的物质生活极为恶劣.这个时期他家里破产得更厉害,唯一维持生活的就是靠他那份不多的教授助理的薪金了.

贫乏的物质条件使他成为一个俭朴自持的人,一直到他死去为止.他从来毫不吝惜金钱的唯一的东西就是制造他所发明的机械模型;为了制造模型,他曾花了数以千百的卢布.从童年时代起切比雪夫就喜爱制造各种各样的仪器:最初从用小摺刀做一些玩具开始,一直发展到后来构造复杂的计算机(该机保存在巴黎技术保存所).他所设计的许多仪器现在还保存在圣彼得堡大学(即现今的列宁格勒大学)和科学院里.

切比雪夫所接交的人物为数不多.他多半爱到布良柯夫斯基的家里去,那儿常有许多数学家聚谈,著名的数学家奥司特罗格拉茨基也是其中之一.

在青年时代,切比雪夫常常爱上沙莫夫那儿去叙谈自己的发现,借助这位科学前辈的渊博知识的同行者,他了解这个发现从前是否已经有人完成,听从院士的指示,结果有时也正与事实相符合.当然,这只是指切比雪夫尚未开始研究那一类在他以前还没有人涉及过数学问题的活动时期而言,这一类问题是不可能遭遇到有人抢先完成的任何危险的.必须指出,比起研究其他数学家的著作,特别是当代的著作,切比雪夫更为喜爱自己独立钻研.他深入地研究尤拉、拉果蘭诸、加高斯、亚贝尔等伟大数学家的名著.切比雪夫对于研读当前的数学著作并不予以特殊的重视,他认为过多的钻研别人的作品会对自己工作的独立性产生不良的影响.

国外旅行是切比雪夫喜爱的娱乐之一.在学术活动的初期切比雪夫并不把这些旅行用于休养,而是用之于研究重大的科学为目的.在他的 1852 年出国报告书中可以找到叙述他的旅行,和以研究实用力学为目的的对各个工厂的访问;他常出席学术界的会议,与各国著名的学者交谈科学上的各种问题.到了晚年,切比雪夫虽然仍不忽视自己探求科学的旅行目的,但由于他的学识不断的增长而把旅行用之于休息了.他最爱到法国去,那里有许多他熟悉的科学家.他常列席国际学术会议,并在会上报告自己的发现.切比雪夫最初几次访问巴黎时,由于他那种俭朴的特性使然,常下榻于最简陋的旅馆,在最经济的饭店用餐,出入只乘坐公共马车.这样一直到了晚年,他才稍稍放纵一下自己的习惯,竟也设宴招待他的法国朋友们.当切比雪夫在国内度假的时候,他常常喜欢住在烈维尔附

近的耶卡切林涅达尔.

从 1847 年到 1882 年,切比雪夫的全部学术活动届满了 35 年(1847 ~ 1853 为教授助理,1853 ~ 1857 升为非常任教授,1857 年起为常任教授).如果在亚历山大洛夫国立中学短期任教力学的时间不算在内的话,切比雪夫的全部活动毫无例外地是在彼得堡大学度过的.他在各个时期里讲授过解析几何、高等代数、数论、积分学、概率论、有限差分法、椭圆函数论和定积分论等多门课程.

切比雪夫对待自己的教学工作是严谨的,他几乎从来没有缺过课,也没有迟到过,但下课铃响后他也从不在课室里多留一分钟,虽然这样有时会使他的讲解中断;对于课堂上尚未得出结论的课题,只要所讲的并不是紧接着前一课的话,他常常在下一次从头再讲起.对于所有较为复杂的算题,他总是先阐明它的目的和解决的一般步骤,然后才把大部分在黑板上默默地计算出来.同时要求学生用眼睛去看,而不是用耳朵听.他的演算极为迅速详尽,使学生看起来很容易接受.在讲授的过程中,切比雪夫常系统地阐述本课程,说出自己的观点和与此课程有关的别的数学家交谈的意见,然后把这些论点加以比较,指出数学中各个不同问题之间的相互联系.这种论述使他讲授生色不少,使紧张注意的听众得到休息,引起他们在更为广泛的范围内去研究该门科学的兴趣.

按范围而论,切比雪夫所任教的课程是不多的,但是内容丰富,易于使人接受和理解.对于考试,切比雪夫既不要求过严,也不失之过宽,他的态度是极为谨慎而客气的.在学位论文辩论会上他所提出的相反意见常具有巨大的巧妙与机智,因为它所牵涉到的并不是该文的细枝末节,而往往是与该文论旨有关的一般问题.

切比雪夫作为教授的功绩永远保留在有幸获得他的教诲的人们的记忆里.他常把自己的学生一直教到他们大学毕业为止.

切比雪夫享年74岁,度过了自己学术活动的25及50周年纪念日,但他自己没有一次庆祝过.他的门徒和崇敬他的人当时曾打算用社会上最流行的方式为他祝贺,但都遭到了他坚决的拒绝.

在切比雪夫临终前的几天里,大家只知道他染上了轻型的流行性感冒.虽然他自己感到十分不适,但仍不愿躺下.去世前夕,他还照常接见宾客,那时候谁也没有想到他的终期已经这么近了.1894 年 12 月 8 日(即俄历 11 月 26 日)早晨,切比雪夫坐在书桌旁进茶的当儿,他突然感到眩晕,经过短时的弥留状态之后,即因心脏麻痹而逝世.

2　什么是逼近

先看一个例子:

例 1　设函数 $f(x)=|\cos x+\alpha\cos 2x+\beta\cos 3x|$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.求 $M=\min\limits_{\alpha,\beta}\max\limits_{x}f(x)$.(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

解　显然 $f(\frac{\pi}{6})=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|$, $f(\frac{5}{6}\pi)=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|$.从而

$$\max f(x)\geqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|+\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

于是得到

$$M \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ①$$

另一方面,令 $\alpha = 0,\beta = -\frac{1}{6}$,则

$$f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\right| = \left|\frac{3}{2}\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\right|$$

易知

$$\max_x f(x) = \max_{-1\leqslant y\leqslant 1} | g(y) | = \max_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y)$$

其中 $g(y) = \frac{3}{2}y - \frac{2}{3}y^3$,因为

$$g(y) - g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = (y - \frac{\sqrt{3}}{2})\left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3}(y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4})\right]$$

所以,当 $0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,由 $y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4} \leqslant \frac{9}{4}$,可得

$$g(y) - g(\frac{\sqrt{3}}{2}) \leqslant 0$$

当$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant y \leqslant 1$ 时,由 $y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4} \geqslant \frac{9}{4}$,可得

$$g(y) - g(\frac{\sqrt{3}}{2}) \leqslant 0$$

于是得到$\max\limits_x f(x) = \max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y) = g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得

$$M \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ②$$

综合 ① 和 ② 可知 $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

下面我们介绍线性最佳逼近多项式的求法以及切比雪夫多项式在函数逼近中的一些应用.

(1) 线性最佳逼近多项式 $p_1^*(x)$ 的构造

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的零次最佳逼近多项式为

$$p_0^*(x) = \frac{1}{2}[\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) + \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)]$$

即函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的零次最佳一致逼近多项式是其在该区间上最大值与最小值的算术平均值,这是显然的.

一次最佳逼近多项式 $p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$ 的求法:

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有二阶导数,且$f''(x)$ 在$[a,b]$上不变号,则根据切比雪夫定理,存在点 $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$,使

$$f(x_k) - p_1^*(x_k) = (-1)^k\sigma \cdot \max_{a\leqslant x\leqslant b} | f(x) - p_1^*(x) |$$

其中 $\sigma=\pm1,k=1,2,3$.

由于$f''(x)$在$[a,b]$上不变号,则由②可知区间$[a,b]$的两个端点 a,b 都属于 $f(x)-p_1^*(x)$ 的交错点组,即有 $x_1=a,x_3=b$.而另一交错点 x_2 必位于$[a,b]$的内部,且它是函数 $f(x)-p_1^*(x)$ 的极值点.故

$$f'(x_2)-p_1^{*\prime}(x_2)=f'(x_2)-a_1=0$$

即$f'(x_2)=a_1$.又因为$f''(x)$在$[a,b]$上不变号,所以$f'(x)$在$[a,b]$上严格单调函数.从而 $f(x)-p_1^*(x)$ 在(a,b)内有且仅有一个极值点 x_2.由此可得

$$f(a)-p_1^*(a)=-[f(x_2)-p_1^*(x_2)]=f(b)-p_1^*(b)$$

即

$$\begin{cases}f(a)-p_1^*(a)=f(b)-p_1^*(b)\\ f(a)-p_1^*(a)=-[f(x_2)-p_1^*(x_2)]\end{cases}$$

由 $p_1^*(x)=a_0+a_1x$,从上述方程组可解得

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ a_0=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(x_2)]-\dfrac{a+x_2}{2}\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{cases}$$

其中 x_2 由 $f'(x_2)=a_1$ 解得.因此 $f(x)$ 在$[a,b]$上的线性最佳逼近多项式为

$$p_1^*(x)=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{2}\left(x-\frac{a+x_2}{2}\right)$$

线性最佳逼近的几何意义是:直线 $Y=p_1^*(x)$ 一定与过两点$(a,f(a))$与$(b,f(b))$的直线平行.

例 2 求 $f(x)=\arctan x$ 在$[0,1]$上的线性最佳逼近多项式.

解 由于 $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}<0$,故 $x_1=0,x_3=1$,有

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\arctan 1-\arctan 0}{1-0}=\frac{\pi}{4}\approx0.785\ 4$$

由 $f'(x_2)=\dfrac{1}{1+x_2^2}=\dfrac{\pi}{4}$,得 $x_2=\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}\approx0.522\ 7$.又 $f(x_2)=\arctan 0.522\ 77\approx0.481\ 66$,故

$$a_0=\frac{1}{2}[f(0)+f(x_2)]-a_1\frac{0+x_2}{2}=\frac{1}{2}[0.481\ 66-0.785\ 4\times0.522\ 7]=0.035\ 6$$

故 $f(x)=\arctan x$ 在$[0,1]$上的线性最佳逼近多项式为

$$p_1^*(x)=0.035\ 6+0.785\ 4x$$

(2) 切比雪夫多项式的应用

我们知道切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的最高次项 x^n 的系数为 $2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$.令

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

则 $\tilde{T}_n(x)$ 的最高次项系数为 1.由切比雪夫零点与极点性质可知当

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

时有

$$\tilde{T}_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

用 $\tilde{P}_n(x)$ 表示最高次项系数为1的 n 次多项式的全体,我们有如下的切比雪夫多项式极性定理.

定理1 在区间$[-1,1]$上,最高次项系数为1的一切 n 次多项式集合 $\tilde{P}_n(x)$ 中,$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 与零的偏差最小,且其偏差为$\frac{1}{2^{n-1}}$.即对于任何 $p(x)\in\tilde{P}_n(x)$,有

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\tilde{T}_n(x)-0| \leqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)-0|$$

证明 反证法.若存在最高次项系数为1的另一个 n 次多项式$p(x)\neq\tilde{T}_n(x)$,它与零的偏差比 $\tilde{T}_n(x)$ 与零的偏差还小,即有

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)-0| < \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\tilde{T}_n(x)-0| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

令 $q(x) = \tilde{T}_n(x) - p(x)$.由于 $\tilde{T}_n(x)$,$p(x)$ 均属于 $\tilde{P}_n(x)$,则 $q(x)$ 是一个次数不超过 $n-1$ 次的多项式.

在 $T_n(x)$ 的交错点组 $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}(k = 0,1,2,\cdots,n)$ 处,由于 $|p(x_k)|\leqslant\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$,即

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < p(x_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\tilde{T}_n(x)$ 在 x_k 处轮流取到$(-1)^k\frac{1}{2^{n-1}}$,因此

$$q(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x_k)$$

显然,$q(x)$ 在 $n+1$ 个交错点处轮流取正负值.由连续函数的介值性质知 $q(x)$ 应当具有 n 个零点,而 $q(x)$ 至多是 $n-1$ 次多项式,所以 $q(x) = 0$,$p(x)\equiv\tilde{T}_n(x)$,矛盾.故定理结论成立.

此定理表明,任何最高次项系数为1的 n 次多项式在区间$[-1,1]$上的最大值都满足 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$.而切比雪夫正交多项式 $\tilde{T}_n(x)$ 是最大值最小的多项式,因此 $\tilde{T}_n(x)$ 成为逼近其他函数的一种重要多项式,有很广泛的应用.下面介绍多项式插值余项的极小化.

设在$[-1,1]$上给定 $n+1$ 个互异的插值节点:$x_0,x_1,\cdots,x_n$,函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有 $n+1$ 阶连续导数 $f^{(n+1)}(x)$,对 $f(x)$ 作插值多项式,由拉格朗日插值的余项表示式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

其中 ξ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之间.若

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$$

则有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$$

显然余项 $|R_n(x)|$ 的大小取决于 $\prod\limits_{i=0}^{n}|x-x_i|$ 的大小.问题是如何在 $[-1,1]$ 内选取节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$,使 $\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 最小.

由于 $\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 是一个 $n+1$ 次且最高次系数为1的多项式,由切比雪夫极性定理知,当 x_i 满足

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$$

时,$\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|=\frac{1}{2^n}$ 取得极小值.也就是只要插值节点 x_i 取成 $n+1$ 次切比雪夫多项式的零点

资料包

$$x_k=\cos(2k+1)\frac{\pi}{2(n+1)}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

则插值余项在全区间 $[-1,1]$ 上的最大绝对值极小,且有

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|=$$

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{|T_{n+1}(x)|}{2^n}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}$$

此式表明用切比雪夫多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

作为插值节点的插值多项式 $L_n(x)$,其插值余项具有极小化性质,即 $L_n(x)$ 可作为 $f(x)$ 的近似最佳一致逼近多项式.

对于一般区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$,可通过变换 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$,把函数变换成

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\xlongequal{\triangle}g(t)$$

其中 $-1\leqslant t\leqslant 1$.即将定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 化成定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $g(t)$.因而,应选取

$$t_k=\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

即插值节点为

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

可使 $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |R_n(x)|$ 达到极小，并有

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{1}{2^n} T_{n+1}(t) \right| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \qquad ③$$

例 3 用多项式插值余项极小化方法求函数 $f(x) = e^{-x}$ 在 $[0,1]$ 上的近似最佳一致逼近多项式，要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

解 由 $a = 0, b = 1$ 及式 ③ 可得

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |R_n(x)| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$$

而

$$M_{n+1} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |(-1)^{n+1} e^{-x}| = 1$$

当 $n = 3$ 时有

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |R_3(x)| \leqslant \frac{1}{2^7 \times 4!} = 0.000\,325\,5 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

因此取插值节点为

$$x_k = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{2k+1}{8}\pi\right) \quad (k = 0,1,2,3)$$

即 $x_0 = 0.961\,939\,8, x_1 = 0.691\,341\,7, x_2 = 0.308\,658\,3, x_3 = 0.038\,060\,23$，得到三次拉格朗日插值多项式为

$$L_3(x) = 0.999\,77 - 0.992\,90x + 0.463\,23x^2 - 0.102\,40x^3$$

它可作为 $f(x) = e^{-x}$ 在 $[0,1]$ 上的近似最佳一致逼近多项式.

利用切比雪夫多项式还可以降低逼近多项式的次数，这种方法称为缩减幂级数方法. 我们在一个区间上用多项式逼近函数 $f(x)$，在一定误差范围内逼近的多项式其次数越低越好.

由于 $\{x^k\}$ 也可用切比雪夫多项式 $\{T_n(x)\}$ 表示，如

$$1 = T_0, x = T_1(x), x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2), \cdots \qquad ④$$

若把一般 n 次多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 中的所有 $x^k (k = 0,1,2,\cdots,n)$ 用上述式 ④ 中的切比雪夫多项式去代替，即 $p_n(x)$ 可写成

$$p_n(x) = b_0 + b_1 T_1(x) + b_2 T_2(x) + \cdots + b_n T_n(x)$$

在满足一定误差要求下，可用切比雪夫多项式的极值性质，把 $p_n(x)$ 的高次幂项缩减下来，使它成为 $m(m \leqslant n-1)$ 次多项式. 这个 m 次多项式可以作为在已给精度要求下 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的近似最佳一致逼近多项式.

例 4 设在区间 $[-1,1]$ 上找一个低次多项式 $p(x)$ 来代替函数 $f(x) = e^x$，使误差

$\varepsilon < 10^{-2}$.

解　因为

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

若取前六项之和

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

作为 $f(x)$ 的近似,则其截断误差为

$$|R_5(x)| = \left|\frac{1}{6!}e^{\xi} \cdot x^6\right| \leqslant \frac{1}{6!}e = \frac{1}{720}e < 0.003\ 775 < 0.01$$

即在满足误差要求下 $p_5(x)$ 可作为近似最佳一致逼近多项式.利用$\{x^k\}$ 与$\{T_n(x)\}$ 之间的关系,$p_5(x)$ 可表示为

$$p_3(x) = \frac{81}{64}T_0 + \frac{217}{192}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{17}{384}T_3 + \frac{1}{194}T_4 + \frac{1}{1\ 920}T_5$$

由此式可见,T_k 的下标 k 越大,其 T_k 的系数越小.由于当 $x \in [-1,1]$ 时,$|T_k(x)| \leqslant 1$ $(k = 0,1,2,\cdots)$,故可以略去高次项 $T_k(x)$ 以降低逼近多项式的次数.若用

$$p_3(x) = \frac{81}{64}T_0 + \frac{217}{192}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{17}{384}T_3$$

来近似代替 e^x,与 $p_5(x)$ 相比所增加的误差为$\frac{1}{192} + \frac{1}{1920} < 0.005\ 737$,故用 $p_3(x)$ 代替 e^x 总的误差不超过 $0.003\ 775 + 0.005\ 737 = 0.009\ 512 < 0.01$,也满足要求.从而根据$\{T_k(x)\}$ 和$\{x^k\}$ 之间的关系可知

$$p_3(x) = \frac{1}{384}(382 + 383x + 208x^2 + 68x^3)$$

即用 x 的一个三次多项式来代替 e^x 比原来用 x 的五次多项式来近似代替 e^x,从次数上来说降低了 2 次,计算工作量大为减少.这种方法称为缩减幂级数方法.

чебышев 多项式一些重要的性质:

i) 它满足二阶常微分方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{⑤}$$

ii)
$$T_n(1) = T'_n(1) = 1 \tag{⑥}$$

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)\cdots(n^2 - (k-1)^2)}{(2k-1)!!}, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{⑦}$$

事实上,$T_n(1) = \cos(n\arccos 1) = 1$,得到

$$\lim_{x\to1}(Q'_n(x))^2 = \lim_{x\to1}\frac{n^2(E_{n-1} - Q_n^2(x))}{(1-x)(1-x)} = \lim_{x\to1}\frac{-2Q_n(x)Q'_n(x)}{-2x} = Q_n(1)Q'_n(1)$$

由此得到 $Q'_n(1) = Q_n(1)$,因而有

$$T'_n(1) = T_n(1) = 1$$

iii) 对所有的 $k = 0,1,\cdots,n$ 有

$$|T_n^{(k)}(x)| \leqslant T_n^{(k)}(1), x \in [-1,1] \tag{⑧}$$

资料包

事实上,由 $T_n(x)=\cos nt, t=\arccos x$,得到

$$T'_n(x)=n\frac{\sin nt}{\sqrt{1-x^2}}=n\frac{\sin nt}{\sin t}=2n[\cos(n-1)t+\cos(n-3)t+\cdots]$$

容易证明,将上式不断微商,就有

$$T_n^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j(k)\cos jt, \lambda_j(k)\geqslant 0$$

由此得到

$$|T_n^{(k)}(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j(k)=T_n^{(k)}(1), x\in[-1,1]$$

特别地,令 $k=1$,从 ⑦ 得到

$$|T'_n(x)|\leqslant T'_n(1)=n^2, x\in[-1,1] \qquad ⑨$$

iv) 对所有的 $n=2,3,\cdots$,有

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) \qquad ⑩$$

事实上,由三角恒等式

$$\cos nt+\cos(n-2)t=2\cos t\cos(n-1)t$$

令 $t=\arccos x$ 代入就得 ⑩.

由于 $T_0(x)=1, T_1(x)=x$,由此从递推公式 ⑩ 可以依次地写出所有的 чебышев 多项式,如

$$T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$
$$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$$

由公式 ⑩,还容易看出,当 n 是奇数时,$T_n(x)$ 是奇次多项式;当 n 是偶数时,$T_n(x)$ 是偶次多项式.

3 切比雪夫多项式

在区间 $[a,b]$ 上与零有最小偏差的

$$p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

型多项式称为切比雪夫多项式.我们可以给出它们的解析表示以及证明它们的唯一性.就是说,我们来证明,n 次代数多项式

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x \qquad ⑪$$

即为在区间 $[-1,1]$ 上的切比雪夫多项式.至于 $T_n(x)$ 为 n 次代数多项式一事显然.剩下

来要证明,这多项式的最高项系数为一(么首的)并且它在区间[-1,1]上与零有最小偏差.首先不去证明第一事实而建立第二个.为此,我们指出多项式 $T_n(x)$ 的某些性质.首先指出,这些多项式的范在区间[-1,1]上等于$\frac{1}{2^{n-1}}$,这是由于 $\|\cos n\arccos x\| = 1$.现在我们来求多项式在区间上达到其范的那些点,并且考察多项式在这些点的符号.于是,我们要求出满足

$$\cos n\arccos x = 1 \quad 或 \quad \cos n\arccos x = -1$$

的点.解这些方程中的第一个,得到

$$n\arccos x = 2k\pi, \quad \arccos x = \frac{2k\pi}{n}, \quad x_k = \cos\frac{2k\pi}{n}$$

我们指出,$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$,因而数 k 不能任意值,而必须仅限于取值 $k = 0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$($[x]$ 表 x 的整部).解第二个方程,得到

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{\pi}, k = 0,1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

把求得的一切值 x 写成递减的顺序

$$x_0 = \cos 0 = 1, \quad x_1 = \cos\frac{\pi}{n}, x_2 = \cos\frac{2\pi}{n}, \quad x_3 = \cos\frac{3\pi}{n}, \cdots \qquad ⑫$$

资料包

我们求得的一切点 x_k 共有多少?它们的个数等于

$$1 + \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right] = 2 + \left[\frac{2n-1}{2}\right] = 2 + n - 1 = n + 1$$

用这些点可以把区间[-1,1]分成 n 部分,使得在每一区间的端点上多项式 $T_n(x)$ 按绝对值言取达了范而符号相异

$$T_n(x_0) = T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}, T_n(x_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$T_n(x_2) = \frac{1}{2^{n-1}}, T_n(x_3) = -\frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}, \cdots, T_n(x_n) = -\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

当以后证明切比雪夫多项式为在一切么首多项式中于区间[-1,1]上与零有最小偏差时,我们将用到这个重要性质.

预先证明关于连续函数零点的一个引理.

引理 1 若在实轴上连续的函数 $\lambda(x)$ 满足

$$(-1)^k\lambda(x_k) \geqslant 0, x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

则函数 $\lambda(x)$ 在区间$[x_0, x_n]$上的零点个数不小于 n,这里对每个二重零点,当经过它时函数不改号,均作二个计算.

证明 我们将称数 $d_{i,k} = k - i, k > i$ 为区间$[x_i, x_k]$的"长".如果我们建立函数 $\lambda(x)$ 在任何区间$[x_i, x_k]$上的零点个数不小于其"长",则引理将被证明.

我们引用数学归纳法来证明.首先指明引理当区间$[x_i, x_k]$的"长"为一亦即 $k = i +$

1时为真. 于此情形据引理条件,或者数 $\lambda(x_i)$ 与 $\lambda(x_{i+1})$ 异号从而连续函数 $\lambda(x)$ 在区间内部变为零,或者这两数中之一为零. 不论在哪一种情形 $\lambda(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的零点个数都不小于这区间的"长". 现在假定函数 $\lambda(x)$ 在每一"长"为 m 的区间上的零点个数不小于 m, $m \leqslant n$, 而往证明, 在区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ 上函数有不小于 $n+1$ 个零点. 为此考察区间 $[x_i, x_k]$ 与 $[x_k, x_{i+n+1}]$, $i < k < i+n+1$, 它们之中的第一个的"长"都不超过 n. 据假定函数在这两区间中第一个上的零点个数不小于 $k-i$, 而在第二个上不小于 $i+n+1-k$. 若在这些区间的唯一公共点 x_k 函数 $\lambda(x)$ 不为零, 则在区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ 上函数的零点个数将不小于

$$k - i + i + n + 1 - k = n + 1$$

亦即引理已获证. 现在考虑当 $\lambda(x_k) = 0$, $k = i+1, i+2, \cdots, i+n$ 情形. 此时我们已得知函数 $\lambda(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ 上有 n 个零点. 若函数在这区间还有异于所列举的零点, 则引理获证. 于是, 剩下来我们要考察当 $\lambda(x)$ 没有其他零点的情形. 特别, $\lambda(x_i) \neq 0$, $\lambda(x_{i+n+1}) \neq 0$. 由于当经过简单零点函数的符号要变化, 所以当经过 n 个简单零点时函数的符号要变化 n 次. 若函数 $\lambda(x)$ 的零点 x_k 为单重的, 则数

$$\lambda(x_i), (-1)^n \lambda(x_{i+n+1}) \qquad (*)$$

的符号相同. 但按引理条件

$$\frac{(-1)^i \lambda(x_i)}{(-1)^{i+n+1} \lambda(x_{i+n+1})} = \frac{-\lambda(x_i)}{(-1)^n \lambda(x_{i+n+1})} > 0$$

亦即数 $(*)$ 的符号相反. 由我们所得的矛盾便指明, 在函数 $\lambda(x)$ 的零点 x_k 之中有多重的, 因而这函数在区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ 上零点的总数不小于 $n+1$. 这就完全证明了引理 1.

我们转向多项式 ⑪ 为于一切幺首 n 次多项式中在区间 $[-1,1]$ 与零有最小偏差的证明. 为此目的, 假定不然, 亦即假定存在另一幺首 n 次多项式 $p_n(x)$, 其范在 $[-1,1]$ 上不超过 $\frac{1}{2^{n-1}}$, 那么我们来考察函数 $\lambda(x) = T_n(x) - p_n(x)$. 这函数为次数不高于 $n-1$ 的多项式, 这是由于多项式 $T_n(x)$ 与 $p_n(x)$ 的最高项系数相同. 在点集 ⑫ 中每一点函数 $\lambda(x)$ 满足上述引理的条件. 其实

$$(-1)^k \lambda(x_k) = T_n(x_k)(-1)^k - p_n(x_k)(-1)^k \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} - \| p_n(x) \| \geqslant 0$$

这是由于 $\| p_n(x) \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 根据引理在区间 $[-1,1] = [x_n, x_0]$ 上可知函数 $\lambda(x)$ 的零点个数不少于 n 并且由于它为次数不高于 $n-1$ 的多项式, 所以 $\lambda(x) \equiv 0$, 亦即 $p_n(x) \equiv T_n(x)$.

剩下来还要证明, $T_n(x)$ 为幺首的. 这问题很简单. 记住棣莫佛公式, 得到

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) + \frac{1}{2}(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta) =$$

$$\frac{1}{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n + \frac{1}{2}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

令 $\theta = \arccos x$ 并利用等式

$$\cos \arccos x = x, \quad \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$$

得到

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}\{(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n + (x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n\} \tag{13}$$

把这等式除以 x^n 并令 x 趋于 ∞，得到多项式 $T_n(x)$ 的最高项系数为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{T_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n}\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)^n + \left(1-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)^n\right\} = \frac{2^n}{2^n} = 1$$

于是，我们不仅证明了与零有最小偏差的多项式存在，而且建立了它的唯一性，并且尤其重要的是，指出了这样的多项式的解析表示，以便于把它们写成通常的代数的形式且有助于进而研究它们的深刻的性质. 对于为切比雪夫所研究过的与其他问题相关连的所有那些性质，我们将不加讨论而只提出其中对于内插理论有用的一个性质.

所指的是在区间 $[a,b]$ 上与零有最小偏差的切比雪夫多项式的范的数量. 当 $a = -1, b = 1$ 的情形，我们已证明了多项式 $T_n(x)$ 的范为 $\frac{1}{2^{n-1}}$. 为了要求出它在任意区间 $[a,b]$ 上的范，必须采用把区间 $a \leqslant y \leqslant b$ 映射到区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 的线性变换 $x = \frac{2}{b-a}y - \frac{a+b}{b-a}$. 此时我们得到多项式

$$p(y) = T_n\left(\frac{2}{b-a}y - \frac{a+b}{b-a}\right) = \left(\frac{2}{b-a}y - \frac{a+b}{b-a}\right)^n + \cdots$$

它的最高项系数非 1 而为 $\frac{2^n}{(b-a)^n}$. 把 $p(y)$ 用这个数来除，我们得到区间 $[a,b]$ 上的切比雪夫多项式

$$\tilde{T}_n(y) = \frac{(b-a)^n}{2^n}T_n\left(\frac{2}{b-a}y - \frac{a+b}{b-a}\right)$$

它的最高项系数已为 1 了. 如所易见，它的范等于

$$\|\tilde{T}_n(y)\| = \frac{(b-a)^n}{2^n}\|T_n(x)\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \tag{14}$$

寻找切比雪夫多项式的零点并无困难. 限于区间 $[-1,1]$ 情形，我们由方程

$$\cos n \arccos x = 0$$

求出切比雪夫多项式的零点为

$$x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0,1,\cdots,n-1 \tag{15}$$

着重指出，切比雪夫多项式的零点位于那样的区间上，那里多项式有定义，并且此外，它们两两互异. 正因切比雪夫多项式零点分布的这一特性才使我们把它作为这样的内插多项式来考虑，即取内插基点阵的第 n 列为多项式 $T_{n+1}(x)$ 的根. 相应的内插多项式将用记号 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 来表示.

当借用多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 以求逼近论的其他重要结果之前，我们来解关于在区间 $[0,1]$ 上逼近函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 精确到 $\frac{1}{5\cdot 10^9}$ 的多项式的次数问题.

从对于多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 来解它开始，这时指的是应用在区间[0,1]上，$a=0,b=1$ 的相应切比雪夫多项式.

利用等式 ⑭，得到

$$\| L_{T_{n+1}}(f;x)-f(x)\| \leqslant \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{\| f^{(n+1)}(x)\|}{(n+1)!} \tag{16}$$

由于 $f(x)=\mathrm{e}^x, f^{(n+1)}(x)=\mathrm{e}^x$，所以在区间[0,1]上 $\| f^{(n+1)}(x)\| \leqslant \mathrm{e}$，因而

$$\| L_{T_{n+1}}(f;x)-f(x)\| \leqslant \frac{2\mathrm{e}}{4^n(n+1)!} \tag{17}$$

有趣的是把这结果与所述函数按 x 乘幂展开的泰勒公式的余项相比较. 由于对泰勒公式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

所以当 $x=1$ 时得到

$$R_n(1)=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}>\frac{1}{(n+1)!} \tag{18}$$

比较不等式 ⑰ 与 ⑱ 表明，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 用多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 逼近的阶较同一函数用泰勒级数的部分和所给的要好 4^n 倍. 这一情况对于某些其他的函数也成立，这由比较泰勒级数与多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 的余项所推出的. 诚然，如果把泰勒级数取为按区间中点为中心展开的，则它的部分和所给逼近的阶要低 2^n 倍，那么在多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 与泰勒级数部分和所给逼近的阶之间的差异已不能用 4^n 倍而用 2^n 倍来描述.

现在，设 $n=9$，得到

$$\frac{2\mathrm{e}}{4^9\cdot 10!}<\frac{\mathrm{e}}{46\cdot 10^{10}}<\frac{1}{16\cdot 10^{10}}$$

从而并由 ⑰ 推得

$$\| L_{T_{10}}(f;x)-f(x)\| <\frac{1}{16\cdot 10^{10}}$$

这样，当 $n=9$ 时多项式 $L_{T_{n+1}}(f;x)$ 达到了所要求的逼近估值.

我们来求泰勒级数

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

的部分和而对函数给出同一逼近的阶的次数.

有

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}>\frac{1}{(n+1)!}$$

不等式

$$(n+1)!>5\cdot 10^9$$

当 $n=12$ 时首次达到.

设 $A_n(f;x)$ 为最快收敛于函数的线性正多项式算子，由于这函数的二阶导数为正，所以它用算子 $A_n(f;x)$ 逼近的阶为$\frac{1}{n^2}$. 为了实现我们所要的逼近函数 e^x 的阶，所以必须

取 $n \approx 70\ 000$.

最后,利用瓦隆诺夫斯卡娅定理,容易求得,多项式 $B_n(f;x)$ 当 $n = 10^9$ 时实现了这样的逼近的阶.

在下列表中引进类似于上述关于与函数的偏差不超过$\frac{1}{5 \cdot 10^9}$ 的多项式的次数.表 1 和表 2 的第一列,是作者借用关于用多项式逼近解析函数的阶的重要的伯恩斯坦定理而得到的.

表 1　$f(x) = e^x, 0 \leqslant x \leqslant 1$

多项式的名称	次　数
$t_n(f;x)$;$L_{T_{n+1}}(f;x)$	9
泰勒级数部分和	12
$A_n(f;x)$	约 70 000
$B_n(fx)$	约 1 000 000 000

表 2　$f(x) = \frac{2}{2-x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$

多项式的名称	次　数
$t_n(f;x)$;$L_{T_{n+1}}(f;x)$	约 12
泰勒级数部分和	32
$A_n(f;x)$	约 70 000
$B_n(fx)$	约 1 000 000 000

表 3　$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1$

多项式的名称	次　数
$t_n(f;x)$;$L_{T_{n+1}}(f;x)$	约 16
泰勒级数部分和	不存在(级数当 $x = 1$ 时发散)
$A_n(f;x)$	约 70 000
$B_n(fx)$	约 1 000 000 000

4　切比雪夫多项式与方程根的分布

例 5　已知 $p_1(x) = x^2 - 2$ 及 $p_j(x) = p_1(p_{j-1}(x)), j = 2,3,\cdots$,求证:对任何正整数 n,方程 $p_n(x) = x$ 所有的根都是实的,且各不相同.

(第 18 届 IMO 试题)

证明　首先,因为 $p_n(x) = x$ 是 2^n 次方程,故至多有 2^n 个根.其次,当 $x > 2$ 时

$$p_1(x) > x$$

$$p_2(x) = p_1(p_1(x_1)) > p_1(x) > x$$

由归纳法的假定可知

$$p_n(x) > x > 2$$

同样,当 $x < -2$ 时

$$p_1(x) > 2 > x$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) > 2 > x$$

所以 $p_n(x)$ 的实根都在闭区间 $[-2,2]$ 内.

令假定根有如下形式 $x = 2\cos t$,则

$$p_1(2\cos t) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t$$

$$p_2(2\cos t) = p_1(2\cos 2t) = 2\cos 4t$$

一般地有 $p_n(2\cos t) = 2\cos(2^n t)$,但 $2\cos(2^n t) = 2\cos t$ 有 2^n 个不同的解

$$t = \frac{2^n m\pi}{2^n - 1} \quad (m = 0,1,\cdots,2^{n-1} - 1)$$

$$t = \frac{2^n m\pi}{2^n + 1} \quad (m = 0,1,\cdots,2^{n-1} - 1)$$

它们都是实数,且互不相同.

实际上 $p_n(x)$ 就是切比雪夫多项式,而[试题]则是要证 $p_n(x)$ 的不动点各不相同.

例 6 对于 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,令

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}[(x + \sqrt{1 - x^2}\mathrm{i})^n + (x - \sqrt{1 - x^2}\mathrm{i})^n] \quad (n \in \mathbf{N})$$

(1) 求证:对于 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,$T_n(x)$ 是 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式,且 $T_n(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 假设 $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是首项系数为 1 的实系数多项式,使得对在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 内的所有 x,$p(x) > -\frac{1}{2^{n-1}}$.求证:存在 $[-1,1]$ 内 x^*,使得 $p(x^*) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

(1994 年中国台北数学奥林匹克)

证明 (1) 令

$$T^*(x) = 2^{n-1}T_n(x) \tag{19}$$

于是,有

$$T_1^*(x) = x, \quad T_2^*(x) = 2x^2 - 1 \tag{20}$$

$$2xT_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) = 2^{n-1}xT_{n-1}(x) - 2^{n-3}T_{n-2}(x) =$$

$$x[(x + \sqrt{1 - x^2}\mathrm{i})^{n-1} + (x - \sqrt{1 - x^2}\mathrm{i})^{n-1}] -$$

$$\frac{1}{2}[(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^{n-2}+(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^{n-2}]=$$

$$(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^{n-2}[x(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})-\frac{1}{2}]+$$

$$(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^{n-2}[x(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})-\frac{1}{2}] \quad ㉑$$

这里 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 3$.

由于

$$\frac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^2=\frac{1}{2}(x^2+2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{i}-(1-x^2))=x(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})-\frac{1}{2} \quad ㉒$$

$$\frac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^2=x(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})-\frac{1}{2} \quad ㉓$$

将㉒,㉓代入㉑,有

$$2xT_{n-1}^{*}(x)-T_{n-2}^{*}(x)=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{1+x^2}\mathrm{i})^n+(x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i})^n]=$$

$$2^{n-1}T_n(x)=T_n^{*}(x) \quad ㉔$$

资料包

由㉔知 $T_n^{*}(x)$ 恰是 n 次切比雪夫多项式,首项系数是 2^{n-1},由切比雪夫多项式的性质知,对任意 $x\in[-1,1]$,有

$$|T_n^{*}(x)|\leqslant 1\Rightarrow |T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}|T_n^{*}(x)|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$$

故 $\max\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 由于 $T_n(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式,则对 $[-1,1]$ 上任一个首项系数为 1 的 n 次实系数多项式 $p(x)$,一定唯一存在 n 个实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得对任意 $x\in[-1,1]$,有

$$p(x)=T_n(x)+b_1T_{n-1}(x)+\cdots+b_{n-1}T_n(x)+b_n \quad ㉕$$

取

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{n}\pi\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1) \quad ㉖$$

对于 $j=1,2,\cdots,n$. 由切比雪夫多项式的性质可知

$$T_j(x_k)=\frac{1}{2^{j-1}}\cos\frac{(2k+1)j}{n}\pi \quad ㉗$$

则

$$\sum_{k=0}^{n-1}p(x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}T_n(x_k)+b_1\sum_{k=0}^{n-1}T_{n-1}(x_k)+\cdots+b_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}T_1(x_k)+nb_n$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{n-1}T_j(x_k)=\frac{1}{2^{j-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)j}{n}\pi=\frac{1}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\frac{2(k+1)j}{n}\pi-\sin\frac{2kj}{n}\pi\right]=$$

$$\frac{1}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\sin 2j\pi = 0 \quad ㉘$$

对 $j = 1,2,\cdots,n-1$,都成立;

对 $j = n$,有

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)\pi = -\frac{n}{2^{n-1}} \quad ㉙$$

故

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(x_k) = -\frac{n}{2^{n-1}} + nb_n \quad ㉚$$

由已知及㉖可知

$$p(x_k) > -\frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} p(x_k) > -\frac{n}{2^{n-1}} \quad ㉛$$

由㉚,㉛$\Rightarrow b_n > 0$.再令

$$x_k^* = \cos\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1) \quad ㉝$$

类似地有

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(x_k^*) = \sum_{k=0}^{n-1} T_n(x_k^*) + b_1\sum_{k=0}^{n-1} T_{n-1}(x_k^*) + \cdots + b_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} T_1(x_k^*) + nb_n \quad ㉝$$

对于 $j = 1,2,\cdots,n-1$ 有

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_j(x_k^*) = \frac{1}{2^{j-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2kj}{n}\pi = \frac{1}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\frac{(2k+1)j}{n}\pi - \sin\frac{(2k-1)j}{n}\pi\right] =$$

$$\frac{1}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\left[\sin\frac{(2k-1)j}{n}\pi + \sin\frac{j\pi}{n}\right] = 0 \quad ㉞$$

利用㉜有

$$T_n(x_k^*) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(2k\pi) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad ㉟$$

将㉞,㉟代入㉝中得

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(x_k^*) = \frac{n}{2^{n-1}} + nb_n > \frac{n}{2^{n-1}}$$

故 n 个实数 $p(x_0^*),p(x_1^*),\cdots,p(x_{n-1}^*)$ 中必有一数 $p(x_l^*)$,满足

$$p(x_l^*) > \frac{1}{2^{n-1}}$$

注意到㉜显然有 $|x_l^*| = \left|\cos\frac{2l\pi}{n}\right| \leqslant 1$. (证毕)

注 在《莫斯科数学比赛大会》的139题为:

(1) 证明:表达式 $T_n(x) = \frac{1}{2^n}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n]$ 在打开括号合并同类项以后是最高次项系数为1的 n 次多项式(n 次切比雪夫多项式).

(2) $T_n(x)$ 有 n 个实根.

(3) 多项式 $T_n(x)$ 的所有根包含于 -1 和 1 之间.

(4) 恒等式 $T_n(x)-xT_{n-1}(x)+\frac{1}{4}T_{n-2}(x)\equiv 0$ 成立.

(5) 在 $T_n(x)$ 的两个相邻根之间有 $T_{n-1}(x)$ 的一个根.

5　最佳逼近多项式的特征

我们来看一道 1983 年的全国高中联赛试题:

函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关. 问 A、B 取什么值时 M 为最小?证明你的结论.

首先 $F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}+Ax+B)|$,当 $A=B=0$ 时,有

$$F(x)=f(x)=\sqrt{2}\,|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|\leqslant\sqrt{2}$$

又在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上有 $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{5\pi}{8}$, $x_3=\frac{9\pi}{8}$,使 $f(x)_{\max}=\sqrt{2}$,我们猜想 $M_{\max}=\sqrt{2}$.

下面证明,对任何 A,B 不同时为 0 时,有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}}F(x)>\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}}f(x)=\sqrt{2}$$

用反证法:假若存在 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}}F(x)\leqslant\sqrt{2}$,且 A,B 不同时为 0,则应有

$$F(\frac{\pi}{8})\leqslant\sqrt{2},\quad F(\frac{5\pi}{8})\leqslant\sqrt{2},\quad F(\frac{9\pi}{8})\leqslant\sqrt{2}$$

即

$$\begin{cases}|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B|\leqslant\sqrt{2}\\|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B|\leqslant\sqrt{2}\\|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B|\leqslant\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}\leqslant\frac{\pi}{8}A+B\leqslant 0\\2\sqrt{2}\geqslant\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0\\-2\sqrt{2}\leqslant\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant 0\end{cases}$$

由

$$\begin{cases}\frac{\pi}{8}A+B\leqslant 0\\\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow A\geqslant 0$$

又由

$$\begin{cases}\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0\\\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow A\leqslant 0$$

所以 $A=0$. 但当 $A=0$, $B\neq 0$ 时,有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}} F(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}} |\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+8| = \sqrt{2}+|B| > \sqrt{2}$$

这与假设矛盾,故猜想正确 $M_{\min} = \sqrt{2}$.

下面讲 $C[a,b]$ 中最佳逼近多项式的特征性质:

$C[a,b]$ 中最佳逼近多项式的特征性质与 $L^p[a,b]$ 中的性质有很大的不同.我们有:

定理 2 设$\{\varphi_j(x)\}(1\leqslant j\leqslant n)$在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件.对任何函数 $f(x)\in C[a,b]$,若 $P^*(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^*\varphi_j(x)$ 是 $f(x)$ 在 $C[a,b]$ 上的最佳逼近多项式,则函数 $f(x)-P^*(x)$ 在$[a,b]$上至少在 $n+1$ 个点所构成的点集 X 上以正负相间的符号取到 $|f(x)-P_n^*(x)|$ 的最大值,即

$$E_n = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-P^*(x)$$

(今后称 X 上的点为切比雪夫交错点集).

证明 为了简单起见,只就 $\varphi_j(x) = x^j(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 的情况进行证明.一般情况下的证明是类似的.

不妨假设 $E_n > 0$,否则 $f(x) = P^*(x)$,这是显然的.

利用连续函数的性质,$|f(x)-P^*(x)|$ 在$[a,b]$上达到最大值 E_n,因此必存在点 $x^*\in[a,b]$,使 $f(x^*)-P^*(x^*) = \pm E_n$.因此集合 X 是非空的.

用反证法.设集合 X 至多包含m个定理中所指出的交错点$x_1,x_2,\cdots,x_m,1\leqslant m\leqslant n$.

$$f(x_i)-P^*(x_i) = \pm(-1)^i E_n$$

$$a\leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant b$$

利用连续函数的中值定理,至少存在 $m-1$ 个点 $a_i,2\leqslant i\leqslant m$,满足

$$a\leqslant x_1 < a_2 < x_2 < \cdots < a_m < x_m \leqslant b$$

$$f(a_i)-P^*(a_i) = 0, i = 2,\cdots,m$$

不仅如此,由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是切比雪夫交错点,我们还可以认为在 m 个区间上:$[a,a_2],[a_2,a_3],\cdots,[a_m,b]$,交错地满足下列等式中的一个

$$-E_n+\mu\leqslant f(x)-P^*(X)\leqslant E_n \quad ㊱$$

或

$$-E_n\leqslant f(x)-P^*(x)\leqslant E_n-\mu \quad ㊲$$

其中 μ 为某个正数(图 5).

现构造 $m-1$ 次多项式($m-1\leqslant n-1$),有

$$P_{m-1}(x) = \delta\prod_{i=2}^{m}(x-a_i)$$

选择 δ 使其满足条件

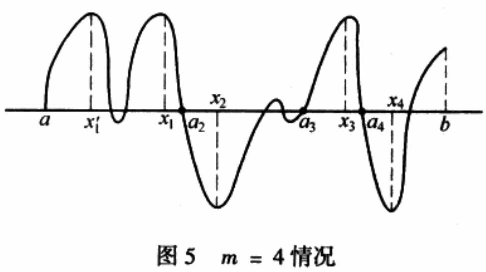


图 5 $m=4$ 情况

$$\|P_{n-1}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{\mu}{2} \tag{38}$$

$$\operatorname{sign}(P_{m-1}(x_1)) = \operatorname{sign}(f(x_1) - P^*(x_1)) \tag{39}$$

不妨认为 $f(x_1) - P^*(x_1) = E_n$,则由 ㊴ 知

$$\operatorname{sign}(P_{m-1}(x_1)) = \operatorname{sign}(f(x_1) - P^*(x_1)) = 1$$

利用 $f(x_i) - P^*(x_i) = -(-1)^i E_n$ 及 $P_{m-1}(x)$ 的构造可知,多项式 $P_{m-1}(x)$ 在区间 $[a,a_2],[a_2,a_3],\cdots,[a_m,b]$ 上取值的符号与 $f(x) - P^*(x)$ 在相应点 x_i 上取值的符号相同.

令 $Q_{n-1}(x) = P^*(x) - P_{m-1}(x)$,它也是一个次数 $\leqslant n$ 的多项式.

因为 $f(x_1) - P^*(x_1) = E_n, f(a_2) - P^*(a_2) = 0$,且由 ㊴ 知,在 $[a,a_2]$ 上 $P_{m-1}(x) \geqslant 0$,因此在 $[a,a_2]$ 上有

$$f(x) - Q_{n-1}(x) = f(x) - P^*(x) - P_{m-1}(x) < E_n$$

再利用 $f(x) - P^*(x)$ 满足 ㊱,$P_{n-1}(x)$ 满足 ㊳,因此在 $[a,a_2]$ 上有

$$f(x) - Q_{n-1}(x) = f(x) - P^*(x) - P_{m-1}(x) \geqslant -E_n + \mu - \frac{\mu}{2} = -E_n + \frac{\mu}{2}$$

这样一来,在 $[a,a_2]$ 上就有

$$|f(x) - Q_{n-1}(x)| < E_n \tag{40}$$

同样,利用 $f(x_2) - P^*(x_2) = -E_n, f(a_3) - P^*(a_3) = 0, [a_2,a_3]$ 上 $P_{m-1}(x) \leqslant 0$ 以及 $f(x) - P^*(x)$ 满足 ㊲,$P_{m-1}(x)$ 满足 ㊳,在 $[a_2,a_3]$ 上不等式 ㊵ 也成立.

依次地可以证明,在 $[a_3,a_4],\cdots,[a_m,b]$ 上不等式 ㊵ 全部成立,即在整个区间 $[a,b]$ 上不等式 ㊵ 成立.这样就违反了 E_n 是最佳逼近值的假设,因此得到矛盾.集合 X 就至少包含有 $n+1$ 个切比雪夫交错点.证毕.

现在我们再给出一个 $E_n(f)$ 的下界估计式,这个估计式不仅在理论上,而且在实际上都很有用.

定理 3(Vallée-Poussin) 设 $\{\varphi_j(x)\}(1 \leqslant j \leqslant n)$ 在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件,$f(x) \in C[a,b]$.若存在多项式 $Q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x)$,使得 $f(x) - Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 以正负相间的符号取到值 $A_0,A_1,\cdots,A_n$,则

$$E_n(f) \geqslant \lambda = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} |A_i| \tag{41}$$

证明 用反证法.设 $E_n(f) < \lambda$.此外,设 $P^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $C[a,b]$ 上的最佳逼近多项式.我们有

$$P^*(x) - Q(x) = f(x) - Q(x) - (f(x) - P^*(x)) \tag{42}$$

由 $|f(x) - P^*(x)| \leqslant E_n(f)$,及 $E_n(f) < \lambda$,从 ㊷ 可知,多项式 $P^*(x) - Q(x)$ 在 $x = x_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 处取值的符号完全由 $f(x_i) - Q(x_i)$ 决定.因此,根据定理的条件 $f^*(x) - Q(x)$ 在 $x = x_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 上交错地取正负值.根据连续函数的中值定理,在 $[a,b]$ 上多项式 $P^*(x) - Q(x)$ 至少有 n 个零点.因为函数系 $\{\varphi_j(x)\}(1 \leqslant j \leqslant n)$ 在 $C[a,b]$ 上

满足 Haar 条件,因此必须有 $P^*(x)-Q(x)=0$,即 $Q(x)=P^*(x)$.这样就有

$$E_n(f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-Q(x)|\geqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n}|A_i|\geqslant\lambda$$

而这与 $E_n(f)<\lambda$ 是矛盾的.证毕.

6 切比雪夫多项式的三角形式在几何中的应用

试题 单位圆被点 A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 分成五个等弧.证明:弦 A_0A_1 和 A_0A_2 之长满足等式

$$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5$$

(1899 年匈牙利数学奥林匹克试题)

证明 这个结论可推广到一般情况即:

如果 n 等于任何一个素数 p 或这个素数的乘幂,那么内接于单位圆的不同正 n 边形的边长乘积的平方等于 p.

本题不过是 $p=5$ 时的特例.

边 A_0A_1 和 A_0A_2 的长度可以用 $\cos\varphi$ 表示.这里 φ 是这样的角.$5\varphi=90°\cdot k,k\in\mathbf{N}$,$k=2m+1$,即 $\cos 5\varphi=0$.不失一般性,可以认为所研究的仅仅是包含在 0° ~ 180° 的范围内的角.事实上,对于任何超过 180° 的角.总可以在上面所限定的范围内找到另一个角,使得两个角的余弦相等.

我们注意到

$$\cos\frac{1}{5}90°=\cos 18°=\sin 72°=\frac{1}{2}A_0A_2$$

$$\cos\frac{3}{5}90°=\cos 54°=\sin 36°=\frac{1}{2}A_0A_1$$

$$\cos\frac{5}{5}90°=\cos 90°=0$$

$$\cos\frac{7}{5}90°=\cos 126°=-\sin 36°=-\frac{1}{2}A_0A_1$$

$$\cos\frac{9}{5}90°=\cos 162°=-\sin 18°=-\frac{1}{2}A_0A_2$$

在三角方程 $\cos 5\varphi=0$ 中作替换 $x=\cos\varphi$,我们可以得到能够求出所有上面的余弦值的方程.

为此可通过 $x=\cos\varphi$ 来表示 $\cos n\varphi$ 和 $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ 的递推关系式.设

$$T_n(x)=\cos nx,\quad U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\quad n=0,1,\cdots$$

(用 $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ 来代替 $\sin(n+1)\varphi$ 是为了避免出现二次根式)

当 $n=0$ 时

$$\cos 0=T_0(x)=1,\quad\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=U_0(x)=1$$

当 $n=1$ 时

$$\cos\varphi=T_1(x)=x,\quad \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}=2\cos\varphi=U_1(x)=2x$$

为了得到递推式,我们要利用公式

$$\cos(n+1)\varphi=\cos\varphi\cos n\varphi-\sin\varphi\sin n\varphi=\cos\varphi\cos n\varphi-(1-\cos^2\varphi)\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

即

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_{n-1}(x) \tag{43}$$

$$\frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos(n+1)\varphi+\cos\varphi\sin(n+1)\varphi]$$

即

$$U_{n+1}(x)=T_{n+1}(x)+xU_n(x) \tag{44}$$

利用㊸,㊹可计算出 $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$

方程 $T_5(x)=0$ 的根是数 $0,\pm\frac{1}{2}A_0A_1,\pm\frac{1}{2}A_0A_2$.由韦达定理立即可得

$$\frac{1}{16}(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=\frac{5}{16}$$

即

$$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5$$

周持中利用切比雪夫多项式研究了一类三角求值问题.

一、第一型切比雪夫多项式

假如我们要求 $\cos\frac{\pi}{16},\cos\frac{3\pi}{16},\cdots,\cos\frac{15\pi}{16}$ 这8个三角函数之和,每两个之积之和,…,每7个之积之和,以及这8个数之积各等于多少,我们自然地会这样设想:若能作出一个8次多项式,使其根恰为 $\cos\frac{\pi}{8},\cos\frac{3\pi}{8},\cdots,\cos\frac{5\pi}{8}$,那么由韦达定理立即得到所需的结果.这就为我们引出了一个普遍性的问题:求作一个 n 次多项式,使其根恰为 $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi(k=1,\cdots,n)$.

记 $\theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi$,则 $\cos n\theta_k=\cos\frac{2k-1}{2}\pi=0$.此说明 θ_k 为 $\cos n\theta=0$ 之根.若 $\cos n\theta$ 可展为 $\cos\theta$ 的多项式,则 x_k 就是此多项式的根了.由棣美弗公式,我们有

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}[(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)]=$$
$$\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n]$$

用二项式定理展开并化简得

$$\cos n\theta=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta$$

令 $x=\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$,得一个 n 次多项式

$$T_n(x)=\cos n(\arccos x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}(1-x^2)^k x^{n-2k},\ -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{45}$$

我们称之为第一型切比雪夫多项式.它具有如下性质:

性质 1　$T_n(x)$ 的 n 个根为

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad k = 1,\cdots,n$$

性质 2　设 $T_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_1 x^{n-i}$,则 $a_{2t+1} = 0$,而

$$a_{2t} = (-1)^t \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\binom{k}{k-t} t = 0,1,\cdots,[n/2] \qquad ㊻$$

证明　由 ㊺,$T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}x^{n-2k+2j}$,令 $n-2k+2 = n-i$,得 $j = k - i/2$.当 $i = 2t$,$j = k - t$,所以

$$a_{2t} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}(-1)^{k-t}\binom{k}{k-t}$$

由此即证.

推论 1　$a_0 = 2^{n-1}$. ㊼

证明　由 ㊻,$a_0 = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^{n-1}$.

推论 2　当 $2 \nmid n$ 时,$a_n = 0$,当 $2 \mid n$ 时 $a_n = (-1)^{n/2}$. ㊽

证明　$2 \mid n$ 时在 ㊻ 中令 $t = n/2$.因为 $k \geqslant t$,故必 $k = n/2$.由此即证.

我们以 $\sigma_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 每 i 个之积之和,$i = 1,\cdots,n$,则由韦达定理有 $\sigma_i(\cos\frac{\pi}{2n},\cos\frac{3\pi}{2n},\cdots,\cos\frac{2n-1}{2n}\pi) = (-1)^i\frac{a_i}{a_0}$,故由 ㊻,㊼ 得:

推论 3　$\sigma_{2t+1}(\cos\frac{\pi}{2n},\cos\frac{3\pi}{2n},\cdots,\cos\frac{2n-1}{2n}\pi) = 0$,而

$$\sigma_{2t}(\cos\frac{\pi}{2n},\cos\frac{3\pi}{2n},\cdots,\cos\frac{2n-1}{2n}) = \frac{(-1)^t}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\binom{k}{k-t} \qquad ㊾$$

特别,结合推论 2 可得:

推论 4　$2 \nmid n$ 时 $\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi = 0$,$2 \mid n$ 时 $\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi = (-1)^{n/2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$.

由于利用 ㊻ 计算 $T_n(x)$ 之系数过程较复杂,我们常可利用如下的递推公式:

性质 3　$T_n(x)$ 适合 $T_0(x) = 1$,$T_1(x) = x$ 及

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)(n \geqslant 1) \qquad ㊿$$

证明　$T_0(x) = \cos(0\cdot\arccos x) = 1$,$T_1(x) = \cos(1\cdot\arccos x) = x$.$n \geqslant 1$ 时由 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$,以 $\theta = \arccos x$ 代入即得 ㊿,利用 ㊿,我们可算得

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,\cdots. \qquad (51)$$

由上讨论可知,要求某些三角函数的对称式的值,关键在于作出以这些三角函数为

根的多项式.下面我们将把重点放在后一问题上.

二、第二型切比雪夫多项式

假如要求以 $x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}(k = 1,\cdots,n)$ 为根的 n 次多项式.令 $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$,则 $\sin(n+1)\theta_k = 0$,由此我们可考虑是否能把 $\sin(n+1)\theta$ 展开为 $\cos\theta$ 的多项式:因为

$$\sin(n+1)\theta = (1/2\mathrm{i})[(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{n+1} - (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^{n+1}] = \sin\theta\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}$$

可知 $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ 符合要求,即

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\cdot\binom{n+1}{2k+1}(1-\cos^2\theta)^k(\cos\theta)^{n-2k}$$

令 $x = \cos\theta,\theta\in(0,\pi)$,得一个 n 次多项式

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n+1}{2k+1}(1-x^2)^k x^{n-2k},\ -1\leqslant x\leqslant 1 \quad ㊷$$

我们称之为第二型切比雪夫多项式,其中 $x = \pm 1$ 是用极限方法补充定义的.仿前,$U_n(x)$ 也有如下一些性质.

性质 4 $U_n(x)$ 的 n 个根为

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}\quad K = 1,\cdots,n$$

性质 5 设 $U_n(x) = \sum_{i=0}^{n}b_i x^{n-i}$,则 $b_{2t+1} = 0$,而

$$b_{2t} = (-1)^t\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}\cdot\binom{k}{k-t},\quad t = 0,1,\cdots,[n/2] \quad ㊸$$

推论 1 $b_0 = 2^n$.

推论 2 $2\nmid n$ 时,$b_n = 0$;$2\mid n$ 时,$b_n = (-1)^{n/2}$. ㊹

推论 3 $\sigma_{2t+1}(\cos\frac{\pi}{n+1},\cos\frac{2\pi}{n+1},\cdots,\cos\frac{n\pi}{n+1}) = 0$,而 $\sigma_{2t}(\cos\frac{\pi}{n+1},\cos\frac{2\pi}{n+1},\cdots,\cos\frac{n\pi}{n+1}) = \frac{(-1)^t}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{k-t}$ ㊺

推论 4 $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n+1}$,当 $2\nmid n$ 时值为0;当 $2\mid n$ 时,值为 $(-1)^{n/2}\cdot(1/2^n)$. ㊻

性质 6 $U_n(x)$ 适合 $U_0(x) = 1,U_1(x) = 2x$ 及

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\quad(n\geqslant 1) \quad ㊼$$

注 $U_0(x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = 1,U_1(x) = \frac{\sin(2\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = 2\cos(\arccos x) = 2x,n\geqslant 1$ 时,由 $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta\cos\theta$ 两边同除以 $\sin\theta$ 并令 $\theta = \arccos x$ 即得 ㊼.

利用 ㊼ 可算得

$$U_7(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x, U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$
$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x, U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1, \cdots \tag{58}$$

以切比雪夫多项式为基础,可构造许多以其他三角函数为根的多项式.

例 7 求以 $\pm \sin \frac{k\pi}{2n+1}(k = 1, \cdots, n)$ 为根的 $2n$ 次多项式.

解 由㊾在 $U_{2n}(x)$ 中以 $y^2 = 1 - x^2$ 代入得所求为

$$V_{2n}(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1} \cdot y^{2k}(1-y^2)^{n-k} \tag{59}$$

在求三角函数对称式之值中的应用:

利用前面导出的各多项式及韦达定理,可直接求出相应的三角函数对称式之值.在此不一一列举.这里只举若干变化的例子.

例 8 求 $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7}$ 之值.

解法 1 由以上知 $V_6(y)$ 有根 $\pm \sin \frac{\pi}{7}, \pm \sin \frac{2\pi}{7}, \pm \sin \frac{3\pi}{7}$.在㊽中令 $x^2 = 1 - y^2$ 得 $V_6(y) = -64y^6 + 112y^4 - 56y^2 + 7$.令 $z = y^2$,得 $G_3(z) = -64z^3 + 112z^2 - 56z + 7$ 有根为 $\sin^2 \frac{\pi}{7}, \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \sin^2 \frac{3\pi}{7}$.故由韦达定理得 $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}$.

解法 2 $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}(3 - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} - \cos \frac{6\pi}{7}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7})$. 又 $-\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{2\pi}{7}, -\cos \frac{3\pi}{7}$ 为 $F_3(x) = U_3(x) + U_2(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ 之根,所以 $-\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$,由此可得所求之同一结果.

例 9 求 $\cos^5 \frac{2\pi}{7} + \cos^5 \frac{4\pi}{7} + \cos^5 \frac{6\pi}{7}$ 之值.

解 记 $x_k = \cos \frac{2k\pi}{7}(k = 1,2,3)$, $S_r = x_1^r + x_2^r + x_3^r$.由上例知,$F_3(x_k) = 0$,可得 $x_k^3 = -\frac{1}{2}x_k^2 + \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{8}$,两边同乘 x_k^r 得 $x_k^{r+3} = -\frac{1}{2}x_k^{r+2} + \frac{1}{2}x_k^{r+1} + \frac{1}{8}x_k^r$,两边对 $k = 1,2,3$ 求和得 $S_{r+3} = -\frac{1}{2}S_{r+2} + \frac{1}{2}S_{r+1} + \frac{1}{8}S_r$.因为 $S_0 = 3, S_1 = -\frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2}(3 + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7}) = \frac{1}{2}(3 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}) = \frac{1}{2} = (3 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$,所以反复应用上述递推公式得 $S_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{8} \cdot 3 = -\frac{1}{2}$,同理 $S_4 = \frac{13}{16}, S_5 = -\frac{1}{2}$,此即所求.

例 10 设 $1 \leqslant k \leqslant m - 1$,求 $A_m = \prod_{r=1}^{m-1}(\cos \frac{k\pi}{m} - \cos \frac{r\pi}{m})$ 之值($r \neq k$).

解 因为 $\cos \frac{r\pi}{m} = (r = 1, \cdots, m-1)$ 为 $U_{m-1}(x)$ 之根,所以有分解式 $U_{m-1}(x) =$

$2^{m-1}\prod_{r=1}^{m-1}(x-\cos\frac{r\pi}{m})$. 于是 $A_m=\frac{1}{2^{m-1}}\lim_{x\to\cos(k\pi/m)}\frac{U_{m-1}(x)}{x-\cos(k\pi/m)}=\frac{1}{2^{m-1}}U'_{m-1}(\cos\frac{k\pi}{m})$. 另一方面由 $U_n(x)$ 之推导过程可知

$$U_{m-1}(x)=\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}}[(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^m-(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^m]$$

由此求导得

$$U'_{m-1}(\cos\frac{r\pi}{m})=(-1)^{k+1}m(\sin\frac{k\pi}{m})^{-2}$$

故所求为

$$A_m=(-1)^{k+1}\frac{m}{2^{m-1}}\csc^2\frac{k\pi}{m}$$

7　切比雪夫多项式的三角形式不等式

例 11　求证,对于任意 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1$$

当且仅当

$$2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos 2\alpha$$

(第五届全俄中学生数学竞赛)

证明　充分性:当 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos 2\alpha$ 时,显然有

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1$$

必要性:若

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1$$

则当 $b>-1$ 时,有

$$2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1+a\cos\alpha+b+1$$

由假设知,$b+1>0$,取 α 值使 $a\cos\alpha=|a|$,则有

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=1+|a|+b+1>1$$

矛盾.

又当 $b<-1$ 时,若令 $\cos\alpha=0$,则有

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=|b|>1$$

矛盾.所以,$b=-1$.

当 $b=-1$ 时,取 α 使 $a\cos\alpha=|a|$,则

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha-1|=1+|a|>1$$

矛盾.

综上所述,必有 $b=-1,a=0$,即有

$$2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$$

江苏江阴要塞中学的李尧明和江苏江阴青阳中学的李尧亮在 1987 年第四期《中等数学》中以“一道竞赛题的启示及推广”为题,对上述命题作了一些变换,得到了许多结

资料包

论.

令 $\cos\alpha = x$,则有:对于任意 $x \in [-1,1]$, $|2x^2 + ax + b| \leqslant 1$,当且仅当 $a = 0$, $b = -1$.

令 $\cos\alpha = \frac{1}{2}x$,则有:对于任意 $x \in [-2,2]$, $|2x^2 + ax + b| \leqslant 4$,当且仅当 $a = 0$, $b = -4$.

令 $\cos\alpha = \frac{1}{3}(2x - 1)$,则有:对于任意 $x \in [-1,2]$, $|8x^2 + ax + b| \leqslant 9$,当且仅当 $a = -8$, $b = -7$.

令 $\cos\alpha = \frac{1}{n - m}(2x - m - n)$, $m < n$,则有:对于任意 $x \in [m,n]$, $|8x^2 + ax + b| \leqslant (n - m)^2$,当且仅当 $a = -8(m + n)$, $b = 2(m + n)^2 - (n - m)^2$.

因 $|\cos 3\alpha| \leqslant 1$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$,于是由[试题]我们又可猜测到以下命题.

命题 1 对于任意 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$,有 $|4\cos^3\alpha + a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c| \leqslant 1$,当且仅当 $4\cos^3\alpha + a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c = \cos 3\alpha$.

更一般地, $|\cos n\alpha| \leqslant 1$,同时,应用棣莫佛公式可以证明 $\cos n\alpha$ 能够展开为关于 $\cos\alpha$ 的 n 次实系数多项式,且首项系数为 2^{n-1},于是根据命题我们自然会猜想出以下命题:

命题 2 若 $f_n(\cos\alpha)$ 是关于 $\cos\alpha$ 的 n 次实系数多项式,且首项系数(最高次项)为 2^{n-1},对于任意 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$,有 $|f_n(\cos\alpha)| \leqslant 1$,当且仅当 $f_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$($n$ 为自然数).

证明 对于 $n = 1$,我们容易证明命题是成立的.对于 $n = 2$,我们在前面已给出了证明.由于 $|\cos n\alpha| \leqslant 1$,所以,我们只要证明当 $n \geqslant 3$ 时,上述命题的必要性成立.

设 $f_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha + g(\cos\alpha)$,其中 $g(\cos)\alpha$ 是次数低于 n 次的实系数多项式.于是我们只要证明 $g(\cos\alpha) = 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

下面,我们对 $g(\cos\alpha)$ 的项数采用第二数学归纳法来加以证明:

当 $g(\cos\alpha)$ 仅有一项时,可设 $g(\cos\alpha) = a\cos^k\alpha$,其中 $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

若 $a > 0$,则取 $\alpha = 0$,便有 $|f_n(\cos\alpha)| = |\cos n\alpha + a\cos^k\alpha| = 1 + a > 1$,矛盾.

若 $a < 0$,则取 $\alpha = \frac{\pi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$(因为 $n \geqslant 3$),有 $|f_n(\cos\alpha)| = |\cos n\alpha + a\cos^k\alpha| = 1 - a > 1$,矛盾.由此可见, $a = 0$,即 $g(\cos\alpha) = 0$.

假设当 $g(\cos\alpha)$ 不超过 $n - 1$ 项时,由 $|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| \leqslant 1$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$,可以导出 $g(\cos\alpha) = 0$.

当 $g(\cos\alpha)$ 有 n 项时,令 $g(\cos\alpha) = g_1(\cos\alpha) + g_2(\cos\alpha)$,其中 $g_1(\cos\alpha)$ 为 g 中所有关于 $\cos\alpha$ 是奇数次项的和, $g_2(\cos\alpha)$ 是 g 中关于 $\cos\alpha$ 是偶数次项的和再加上常数项.显然, g_1 和 g_2 的项数都不超过 $n - 1$($n \geqslant 3$).

由于 $|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| \leqslant 1$ 对于任意 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 均能成立,故 $|\cos n(\pi - \alpha) + g[\cos(\pi - \alpha)]| \leqslant 1$,对于任意 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 亦能成立.

当 n 为奇数时, $\cos n(\pi - \alpha) = -\cos n\alpha$,所以

$$|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| = \frac{1}{2}|\cos n\alpha + g(\cos\alpha) + \cos n\alpha - g(-\cos\alpha)| \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\{|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| + |\cos n\alpha - g(-\cos\alpha)|\} =$$

$$\frac{1}{2}\{|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| + |\cos n(\pi-\alpha) + g[\cos(\pi-\alpha)]|\} \leqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

由归纳假设可知：$g_1(\cos\alpha) = 0$.将 $g_1(\cos\alpha) = 0$ 代入 $|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| \leqslant 1$，得 $|\cos n\alpha + g_2(\cos\alpha)| \leqslant 1$.从而有，$g_2(\cos\alpha) = 0$.所以，$g(\cos\alpha) = 0$.

当 n 为偶数时，$\cos n(\pi-\alpha) = \cos n\alpha$.所以

$$|\cos n\alpha + g_2(\cos\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\{|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| + |\cos n\alpha + g(-\cos\alpha)|\} =$$

$$\frac{1}{2}\{|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| + |\cos n(\pi-\alpha) + g[\cos(\pi-\alpha)]|\} \leqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

故由归纳假设可知：$g_2(\cos\alpha) = 0$.将 $g_2(\cos\alpha) = 0$ 代入 $|\cos n\alpha + g(\cos\alpha)| \leqslant 1$，得 $|\cos n\alpha + g_1(\cos\alpha)| \leqslant 1$，故有 $g_1(\cos\alpha) = 0$，所以，$g(\cos\alpha) = 0$.

由归纳法原理知上述命题成立.

8　切比雪夫多项式的拉格朗日形式

例 12　在$[-1,1]$内给定 n 个不同点 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$.记 $t_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 为点 x_k 到其他所有点 $x_i (i \neq k)$ 的距离的乘积，求证

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k} \geqslant 2^{n-2}$$

(选自《美国数学月刊》1954 年第 54 页，1994 年国家数学集训队第三次测验题)

解　引进切比雪夫多项式和拉格朗日多项式：

我们知道：

(1) 切比雪夫多项式 $T_{n-1}(x)$ 的首项是 $2^{n-2}x^{n-1}$.

(2) 当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$|T_n(x)| \leqslant 1$.

我们对切比雪夫多项式 $T_{n-1}(x)$ 使用拉格朗日插值公式，有

$$T_{n-1}(x) = T_{n-1}(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + T_{n-1}(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots + T_{n-1}(x_n)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \quad ⑥⓪$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是题中$[-1,1]$内给定的 n 个不同点，比较 ⑥⓪ 两端首项系数，有

$$2^{n-2} = \frac{T_{n-1}(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \frac{T_{n-1}(x)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots + \frac{T_{n-1}(x)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \quad ⑥①$$

由所给条件

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= |(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)| \\ t_2 &= |(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)| \\ &\vdots \\ t_n &= |(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})| \end{aligned}\right\}$$

对 ⑥1 两端取绝对值得

$$2^{n-2} \leqslant \frac{|T_{n-1}(x)|}{|(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)|} + \frac{|T_{n-1}(x)|}{|(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)|} + \cdots + \frac{|T_{n-1}(x)|}{|(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})|} \leqslant \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}$$

（证毕）

例 13　令 $\cos\theta = x$，表达式

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n\arccos x)$$

是 x 的 n 阶多项式称为 Chebyshew 多项式．$T_n(x)$ 的首项系数等于 2^{n-1}．这类多项式的前五个是

$$T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2-1,\ T_3(x) = 4x^3-3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4-8x^2+1,\ T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x.$$

T_n 的根都是位于区间 $(-1,1)$ 内的不同的实数，即

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\quad k = 1,2,\cdots,n$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是任意个不同的实数或复数，且 $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，$a_0\neq 0$．令

$$f_k(x) = \frac{1}{f'(x_k)}\frac{f(x)}{x-x_k} = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

每一个 $n-1$ 次多项式 p 都可用它在点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的值表示为 $p(x) = p(x_1)f_1(x) + p(x_2)f_2(x)+\cdots+p(x_n)f_n(x)$；这就是 Lagrange 插值公式．多项式 f_k 叫做基本插值公式．证明下述结果：设

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\quad k = 1,2,\cdots,n$$

是 Chebyshew 多项式 T_n 的根．若 Q 是次数小于或等于 $n-1$ 的多项式，则

$$Q(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,Q(x_k)\frac{T_n(x)}{x-x_k}$$

证明　因为 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$，我们得

$$T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$$

从 $\arccos x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ 得,$\sin(n\arccos x_k) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}$,所以

$$T'_n(x_k) = \frac{(-1)^{k-1}n}{\sqrt{1-x_k^2}}$$

为了证明上述等式,我们注意等式两边是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式,所以,只要证明等式两边对 n 个 x_k 的值相同即可.当 $x \to x_k$ 时

$$\frac{T_n(x)}{x-x_k} \to T'_n(x_k) = \frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-x_k^2}}$$

而当 $x = x_k$ 时右边的每一项除第 k 项外都为零,因为对 $i = 1,2,\cdots,n$ 及 $k \neq 1$,当 x_i 是 T_n 的根时,有

$$\frac{T_n(x_i)}{x_i - x_k} = 0$$

因此,右边的表达式是关于 a 有 Lagrange 插值多项式.

记 $T_n(x) = \cos\theta(x = \cos\theta)$ 为切比雪夫多项式,$x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi(k = 1,\cdots,n)$ 是它的 n 个零点.以 $(1-x^2)T_n(x)$ 的零点为节点的 Lagrange 插值多项式有如下形式:

$$Ln(f,x) = Ln(f,\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}\cos n\theta f(1) + (-1)^n\sin^2\frac{\theta}{2}\cos n\theta f(-1) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_k)\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta_k}l_k(\theta)(x = \cos\theta)$$

这里 $l_k(\theta) = \frac{(-1)^{k+1}\sin\theta_k\cos n\theta}{n(\cos\theta - \cos\theta_k)} \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

9　最佳逼近多项式

在第 39 届(1978 年 12 月 2 日)美国大学生数学竞赛的下午试题 B5 为:

试题　求出一个最大的数 A,使得存在一个实系数多项式

$$p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时满足 $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$.

解　如果知道下述结论:在满足条件 $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 的所有四次多项式 $f(x)$ 中切比雪夫多项式 $C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos(4\arccos x)$ 具有最大的首项系数,则取 $p(x) = [C_4(x)+1]/2$(这样可以保证将 $p(x)$ 限制在 $[0,1]$ 内),就知 A 的最大值为 4.

如果不用这个结论可按下法来求.

先令 $Q(x) = [p(x) + p(-x)]/2$,则原来的条件可改写为

$$0 \leqslant Q(x) = Ax^4 + Cx^2 + E \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

令 $x^2 = y$,则化为

$$0 \leqslant R(y) = Ay^2 + Cy + E \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

令 $y = \frac{z+1}{2}$, $S(z) = R(\frac{z+1}{2})$,则为

$$0 \leqslant S(z) = \frac{A}{4}z^2 + Fz + G, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1$$

对于 $T(z) = \frac{S(z) + S(-Z)}{2}$,得到

$$0 \leqslant \frac{A}{4}z^2 + G \leqslant 1, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1$$

再令 $z^2 = w$,最后得到

$$0 \leqslant \frac{A}{4}w + G \leqslant 1, \quad 0 \leqslant w \leqslant 1$$

显然,当 $G = 0$,即当

$$T(z) = z^2, \quad R(y) = (2y-1)^2, \quad Q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

时,得出 A 的最大值为 4.

下面讲最佳逼近多项式的存在性:

对于定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$,通常称 $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$ 为 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的偏差.如果 $\tilde{x} \in [a,b]$ 使得 $|f(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$,则 $\tilde{x}$ 称为近似函数 $\varphi(x)$ 的偏差点.特别地,若有

$$\varphi(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$$

则称 $\tilde{x}$ 为 $\varphi(x)$ 的正偏差点;若有

$$\varphi(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) = -\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$$

则称 $\tilde{x}$ 为 $\varphi(x)$ 的负偏差点.由于假设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故偏差点总是存在的,但正、负偏差点不一定同时存在.

关于最佳逼近多项式 $p_n^*(x)$ 的存在性,有如下结论:

定理 4 (Borel 存在性定理) 对任意给定的 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$,总存在 $p_n^*(x) \in P_n(x)$,使得

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p_n^*(x)| \leqslant \min_{p_n(x) \in P_n(x)} \{\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p_n(x)|\}$$

成立.

定理 5 若 $p_n^*(x) \in P_n(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最佳逼近多项式,则 $P_n^*(x)$ 一定同时存在正、负偏差点.

证明 不妨设 $p_n^*(x)$ 与 $f(x)$ 不存在负偏差点而仅存在正偏差点.设 $\tilde{x}$ 是其中一个正偏差点,则有

$$p_n^*(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p_n^*(x)| \xlongequal{\triangle} u$$

由于 $p_n^*(x) - f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,则必存在最大值 M 和最小值 m,有

$$-\mu < m \leqslant p_n^*(x) - f(x) \leqslant M = u$$

令
$$s=\frac{m+\mu}{2}>0$$
且
$$-\frac{\mu-m}{2}=m-s\leqslant p_n^*(x)-s-f(x)\leqslant\mu-s=\frac{\mu-m}{2}$$
$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(p_n^*(x)-s)-f(x)|=\frac{\mu-m}{2}=\mu-s<\mu=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p_n^*(x)|$$
此式与 $p_n^*(x)$ 是函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式相矛盾,故 $p_n^*(x)$ 同时存在正负偏差点.

定理 6 (Chebyshev 定理) $p_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 次最佳逼近多项式的充要条件是在区间 $[a,b]$ 上 $p_n^*(x)$ 至少具有 $n+2$ 个依次轮流为正负的偏差点 $x_i(i=1,2,\cdots,n+2)$
$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}\leqslant b$$

证明 充分性:假设 $p_n^*(x)$ 不是 $f(x)$ 的 n 次最佳逼近多项式,由定理 4 知 $f(x)$ 的最佳逼近多项式是存在的,记为 $p(x)$. 于是有
$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p(x)-f(x)|<\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)| \quad ⑥②$$
由于 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}\leqslant b$ 是近似函数 $p_n^*(x)$ 的 $n+2$ 个依次轮流为正负的偏差点,从而有
$$|p_n^*(x_i)-f(x_i)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|\quad i=1,2,\cdots,n+2 \quad ⑥③$$

对于不超过 n 次的多项式 $p_n^*(x)-p(x)=(p_n^*(x)-f(x))-(p(x)-f(x))$,由式 ⑥②、式 ⑥③ 可知 $p_n^*(x_i)-p(x_i)$ 和 $p_n^*(x_i)-f(x_i)$ 的符号相同 $(1\leqslant i\leqslant n+2)$. 而 $\{p_n^*(x_i)-f(x_i)\}(i=1,2,\cdots,n+2)$ 的符号交错,从而 $\{p_n^*(x_i)-p(x_i)\}(i=1,2,\cdots,n+2)$ 的符号也交错. 在区间 $[x_i,x_{i+1}](i=1,2,\cdots,n+1)$ 上对函数 $p_n^*(x)-p(x)$ 应用连续函数的零点定理有: $p_n^*(x)-p(x)$ 在 (x_i,x_{i+1}) 上至少有一个零点,从而在 $[a,b]$ 内至少有 $n+1$ 个零点. 这与 $p_n^*(x)-p(x)$ 为不超过 n 次的多项式矛盾,故充分性正确.

必要性:由定理 5 知最佳逼近多项式 $p_n^*(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一定同时存在正、负偏差点. 现假设它仅有 $m(m<n+2)$ 个依次轮流为正负的偏差点,因此存在 m 个没有公共内部的子区间
$$I_1=[a,\xi_1],I_2=[\xi_1,\xi_2],\cdots,I_m=[\xi_{m-1},b]$$
使得在每个子区间上所包含的偏差点,或者全是正偏差点,或者全是负偏差点. 也即有 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 都不是交错点. 由于 $p_n^*(x)$ 有 m 个交错偏差点,故这 m 个子区间任何相邻两个子区间所包含的偏差点类型必然是相反的. 记含正偏差点的子区间个数为 m_1,含负偏差点的子区间个数为 $m_2=m-m_1$.

我们仅对 $I_1,I_3,\cdots,I_{2m_1-1}$ 含正偏差点,其他子区间含负偏差点的情形进行讨论,另一相反情形完全可类似讨论.

因为 $p_n^*(x)-f(x)$ 是连续函数,故在仅含正偏差点的子区间 I_k 上有最大值 $\widetilde{M}_k$ 和最小值 $\widetilde{m}_k$,且 $M_k=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|,m_k>-\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|(k=1,3,5,\cdots,2_{m_1}-1)$. 因而对 $x\in\triangle_1\overset{\triangle}{=\!=}I_1\mathrm{U}I_3\mathrm{U}\cdots\mathrm{U}I_{2m_1-1}$ 有不等式

$$-\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|<\widetilde{m}\leqslant p_n^*(x)-f(x)\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|\xlongequal{\triangle}\mu \tag{64}$$

其中 $\widetilde{m}=\min\{m_1,m_3,m_5,\cdots,m_{2m_1-1}\}$.令 $s_1=(\widetilde{m}+\mu)/2$,有

$$-\mu+s_1<p_n^*(x)-f(x)\leqslant\mu \tag{65}$$

同样,对于 $x\in\triangle_2\xlongequal{\triangle}I_2\mathrm{U}I_4\mathrm{U}\cdots\mathrm{U}I_{2m_2}$,有

$$-\mu\leqslant p_n^*(x)-f(x)\leqslant\mu-s_2 \tag{66}$$

其中

$$s_2=\frac{(\mu-\widetilde{M})}{2}$$

且 $\widetilde{M}=\max\{M_2,M_4,\cdots,M_{2m_2}\}$,而 $M_2,M_4,\cdots,M_{2m_2}$ 是连续函数 $p_n^*(x)-f(x)$ 在含负偏差点子区间 $I_2,I_4,\cdots,I_{2m_2}$ 上的相应最大值.

令 $S=\min\{s_1,s_2\}$,由式⑥5、式⑥6可得对任何 $x\in\triangle_1$ 有

$$-\mu+s<p_n^*(x)-f(x)<\mu \tag{67}$$

对任何 $x\in\triangle_2$ 有

$$-\mu\leqslant p_n^*(x)-f(x)\leqslant\mu-s \tag{68}$$

构造 $m-1$ 次多项式 $\Phi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{m-1})$,它是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,故存在绝对值充分小的非零实数 β,使得对于任何 $x\in[a,b]$ 都有

$$|\beta\Phi(x)|<s \tag{69}$$

由于多项式 $\Phi(x)$ 在这 m 个子区间上的函数值符号是交错的,可选择实数 β 的符号,使得当 $x\in\triangle_1$ 时,有 $\beta\Phi(x)\geqslant0$;而当 $x\in\triangle_2$ 时,有 $\beta\Phi(x)\leqslant0$.

由式67、68和式69可知,当 $x\in\triangle_1$ 时有

$$-\mu+\beta\Phi(x)<p_n^*(x)-f(x)\leqslant\mu$$

当 $x\in\triangle_2$ 时有

$$-\mu\leqslant p_n^*(x)-f(x)<\mu+\beta\Phi(x) \tag{70}$$

于是有

$$\left|p_n^*(x)-f(x)-\frac{\beta\Phi(x)}{2}\right|\leqslant\mu-\frac{\beta\Phi(x)}{2}\qquad x\in\triangle_1$$

$$\left|p_n^*(x)-f(x)-\frac{\beta\Phi(x)}{2}\right|\leqslant\mu+\frac{\beta\Phi(x)}{2}\qquad x\in\triangle_2 \tag{71}$$

从而对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$\left|p_n^*(x)-\frac{\beta\Phi(x)}{2}-f(x)\right|\leqslant\mu-\frac{\beta\Phi(x)}{2} \tag{72}$$

当 $x\neq\xi_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 时有

$$\left|\left(p_n^*(x)-\frac{\beta\Phi(x)}{2}\right)+f(x)\right|<\mu \tag{73}$$

当 $x=\xi_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 时,因 ξ_i 不是 $p_n^*(x)$ 的交错点,同样得到不等式73.

故总有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\left(p_n^*(x)-\frac{\beta\Phi(x)}{2}\right)-f(x)\right|<\mu$$

由 $m<n+2$ 知 $\Phi(x)$ 是不超过 n 次的多项式,即有 $p_n^*(x)-\dfrac{\beta\Phi(x)}{2}$ 是不超过 n 次的多项式.上述不等式与 $p_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳逼近多项式相矛盾,故假设 $m<n+2$ 不成立,从而必要性成立.

定理 7 (惟一性)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续函数,则 $f(x)$ 的最佳逼近多项式 $p_n^*(x)\in P_n(x)$ 是惟一的.

证明 若 $p(x),q(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上且在 $P_n(x)$ 中的最佳逼近多项式,则当任何 $x\in[a,b]$ 都有

$$-\varepsilon\leqslant p(x)-f(x)\leqslant\varepsilon$$
$$-\varepsilon\leqslant q(x)-f(x)\leqslant\varepsilon$$

即有

$$-\varepsilon\leqslant\frac{p(x)+q(x)}{2}-f(x)\leqslant\varepsilon$$

资料包

因此 $r(x)\xlongequal{\triangle}\dfrac{1}{2}(p(x)+q(x))$ 也是函数 $f(x)$ 在 $P_n(x)$ 中的最佳逼近多项式.

由定理 3 知 $r(x)$ 存在 $n+2$ 个依次轮流为正负的偏差点 $x_i(i=1,2,\cdots,n+2)$,满足

$$\varepsilon=|r(x_i)-f(x_i)|=|\frac{1}{2}(p(x_i)+q(x_i))-f(x_i)|\leqslant$$
$$\frac{1}{2}|p(x_i)-f(x_i)|+\frac{1}{2}|q(x_i)-f(x_i)|\leqslant\varepsilon$$

于是对于 $1\leqslant i\leqslant n+2$ 有

$$|p(x_i)-f(x_i)|=\varepsilon,\quad |q(x_i)-f(x_i)|=\varepsilon$$

这就是说 $x_i(i=1,2,\cdots,n+2)$ 也是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 关于 $f(x)$ 的偏差点.

又由

$$|r(x_i)-f(x_i)|=\left|\frac{p(x_i)-f(x_i)}{2}+\frac{q(x_i)-f(x_i)}{2}\right|=\varepsilon$$

可知 $p(x_i)-f(x_i)$ 与 $q(x_i)-f(x_i)$ 是同号,从而有

$$p(x_i)-f(x_i)=q(x_i)-f(x_i)\quad i=1,2,\cdots,n+2$$

即

$$[p(x)-q(x)]|_{x=x_i}=0\quad i=1,2,\cdots,n+2$$

而 $p(x),q(x)$ 均是不超过 n 次的多项式,故 $p(x)=q(x)$,即最佳逼近多项式惟一.

10 最小偏差多项式

例 14 设 M 是所有形如

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad a,b,c,d\in \mathbf{R}$$

且当 $x\in[-1,1]$ 时满足 $|p(x)|<1$ 的多项式的集合.证明,必有某个数 k,使得对所有 $p(x)\in M$,都有 $|a|\leqslant k$,并求最小的 k.

(捷克 1974 年数学奥林匹克试题)

证明 因为切比雪夫多项式 $p_0(x)=4x^3-3x$ 满足 $p_0(-1)=1,p_0(1)=1$,并且在它的极值点上有

$$p(-\frac{1}{2})=1,\quad p(\frac{1}{2})=-1$$

所以 $p_0(x)\in M$.现在证明,对任意 $p(x)\in M$.有 $|a|\leqslant 4$.否则,设存在多项式

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in M$$

且 $|a|>4$,则非零多项式

$$Q(x)=p_0(x)-\frac{4}{a}p(x)$$

的次数不超过2,由于当 $|x|\leqslant 1$ 时,$\left|\frac{4}{a}p(x)\right|<1$,所以

$$Q(-1)<0,\quad Q(-\frac{1}{2})>0,\quad Q(\frac{1}{2})<0,\quad Q(1)>0$$

故多项式 $Q(x)$ 至少有 3 个根,矛盾.于是所求的 k 等于 4.

最小偏差于零的代数多项式——чебышев 多项式

考虑 $f(x)=x^n$,n 是自然数,我们将研究它在 $C[-1,1]$ 上被次数 $\leqslant n-1$ 的代数多项式来逼近时的最佳逼近多项式及最佳逼近值

$$E_{n-1}(x^n)=\inf\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n(x)|=\inf_{\{a_j\}}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|x^n-\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j\right|$$

显然,$\{x^j\}(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 在 $C[-1,1]$ 上满足Haar条件,因此设 $P_{n-1}^*(x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j^*x^j$ 是最佳逼近多项式,则多项式 $Q_n(x)=x^n-P_{n-1}^*(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有 $n+1$ 个点以正负相间的符号取得值 $E_{n-1}(x^n)$.现在我们来研究 n 次多项式 $Q_n(x)$ 的性质.

(1) $Q_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内部有且只有 $n-1$ 个点使其在这些点上以正负相间的符号取到值 $E_{n-1}(x^n)=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|Q_n(x)|$,且在这些点上 $Q'_n(x)=0$;

事实上,在 $(-1,1)$ 内这种点至少有 $n-1$ 个.另一方面,若在 $(-1,1)$ 上有至少 n 个这样的点,则由于这样点是极值点,因此在 $(-1,1)$ 上就至少有 n 个点使得 $Q'_n(x)=0$.因为 $Q'_{n-1}(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式,因此就得到了矛盾.

今后将这些点记作 x_i,$-1<x_i<1,1\leqslant i\leqslant n-1$.显然有 $Q_n(x_i)=\pm(-1)^iE_{n-1}(x^n)$,$Q'_n(x_i)=0,1\leqslant i\leqslant n-1$.

(2) $Q_n(1)=\pm E_{n-1}(x^n)$,$Q_n(-1)=\pm E_{n-1}(x^n)$.

事实上,$Q_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有 $n+1$ 个点取到 $\pm E_{n-1}(x^{m-1})$,而根据(1),在 $(-1,1)$ 上只可能有 $n-1$ 个点取到 $\pm E_{n-1}(x^{n-1})$,因此还有两个点必在区间的端点上.

(3) $Q_n(x)$ 满足方程

$$(1-x)(1+x)(Q'_n(x))^2 = n^2([E_{n-1}(x^n)]^2 - Q_n^2(x)) \qquad ⑭$$

事实上,⑭左边是一个 $2n$ 次多项式,它以 $x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 为重根,以 $x=\pm 1$ 为单根;而⑭右边也是一个 $2n$ 次多项式,它以 $x=\pm 1$ 及 $x=x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 为根.由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}([E_{n-1}(x^n)]^2 - Q_n^2(x)) = -2Q_n(x)Q'_n(x)$ 也以 $x=x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 为根.因此两边的根完全相同(包括根的重数).因此两边只相差一个常数倍数,但比较其最高项系数,可以看出此常数为1.因此⑭成立.

从⑭得到

$$\frac{\mathrm{d}(\pm Q_n(x))}{\sqrt{E^2_{n-1-Q_n^2(y)}}} = \frac{n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\quad E_{n-1} = E_{n-1}(x^n)$$

即
$$\arccos\left(\frac{\pm Q_n(x)}{E_{n-1}}\right) = n\arccos x + c$$

由此得到
$$Q_n(x) = \pm E_{n-1}\arccos(n\arccos x + c)$$

其中 c 为某个常数,由于 $Q_n(1)=\pm E_n$,代入上式后,可得 $c=0$ 或 π.因而就有

$$Q_n(x) = \pm E_{n-1}\cos(n\arccos x) \qquad ⑮$$

由于 $Q_n(x)$ 是一个首项系数为1的 n 次多项式,由⑮就可以求出其前面应该取正号.为此,令 $t=\arccos^{-1}x$,则

$$\cos(n\arccos x) = \cos nt = \frac{\mathrm{e}^{int}+\mathrm{e}^{-int}}{2} = \frac{(\cos t+i\sin t)^n + (\cos t - i\sin t)^n}{2} =$$
$$\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n] =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{0}{k}((x^k\sqrt{x^2-1})^{n-k} + (-1)^{n-k}x^k(\sqrt{x^2-1})^{n-k})$$

是一个 n 次多项式.为了求其最高项系数,求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arccos(n\arccos x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n]}{x^n} = 2^{n-1} \qquad ⑯$$

比较⑮与⑯,就得到 E_{n-1} 前的符号取正值,且

$$E_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}},\quad Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\arccos(n\arccos x) \qquad ⑰$$

由⑰所确定的 n 次多项式称 чебышев 多项式,其首项系数为1,有时也用 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$,其首项系数为 2^{n-1}.

11　高次 Tchebycheff 逼近

1.一道集训队试题

在2001年,中国国家集训队考试试题中有如下题目:

试题1　记 $F=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$,当 a,b,c 取遍所有实数时,求 F 的最小

值.

对这道试题湖南师范大学的叶军教授给出了一个很直接的解法.

这个问题实际上是求解下面的极值问题:

设 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$.其中 $p,q,r\in$ 作 $\mathbf{R}$.求 $\min\limits_{p,q,r\in\mathbf{R}}\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|$.

事实上

$$f(1)-f(-1)=2+2q,\quad f(\frac{1}{2})-f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+q$$

消去 q 得

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)+f(-\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2})$$

所以

$$\frac{3}{4}\leqslant(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1)\max\{|f(1)|\cdot|f(-1)|\cdot|f(-\frac{1}{2})|\cdot|f(\frac{1}{2})|\}\leqslant 3\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)| \tag{78}$$

所以

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant\frac{1}{4} \tag{79}$$

(78) 式成立当且仅当

$$\begin{cases}\arg f(1)=\arg(-f(-1))=\arg f(-\frac{1}{2})=\arg(-f(\frac{1}{2}))=0\\ |f(1)|=|f(-1)|=|f(\frac{1}{2})|=|f(-\frac{1}{2})|=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}f(1)=\frac{1}{4}\\ f(-1)=-\frac{1}{4}\\ f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\\ f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+p+q+r=\frac{1}{4}\\ -1+p-q+r=-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p-\frac{1}{2}q+r=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}+\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}q+r=-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow p=r=0,q=-\frac{3}{4}$$

即当且仅当 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$ 时,(78) 式取等号,以下只须证当 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$ 时

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=\frac{1}{4}$$

而这由平均值不等式及 Cauchy 不等式是容易做到的.

2. П.Л 切比雪夫定理

下面我们将建立最佳逼近多项式的某些性质.设 $f(x)\in C[a,b]$,固定某一 $n\geqslant 0$,

并用 $P(x)$ 表示集合 H_n 中 $f(x)$ 的最佳逼近多项式之一[①]. 就是说

$$\max|P(x)-f(x)|=E_n$$

如果 $E_n=0$, 则这就表示函数 $f(x)$ 是一个次数不高于 n 的多项式. 我们把这种显而易见的情况丢开不问而当作是 $E_n>0$.

因为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $|P(x)-f(x)|$ 能达到它的最大值, 所以至少可以求出这样的一点 x_0, 使得

$$|P(x_0)-f(x_0)|=E_n$$

我们把任何这样的点都称为多项式 $P(x)$ 的 (e) 点. 如果

$$P(x_0)-f(x_0)=E_n$$

我们便称这种 (e) 点 x_0 为 $(+)$ 点, 如果

$$P(x_0)-f(x_0)=-E_n$$

就称它为 $(-)$ 点.

定理 8 $(+)$ 点及 $(-)$ 点都是存在的.

证明 我们假定, 例如, 多项式 $P(x)$ 没有 $(-)$ 点. 这时对于 $[a,b]$ 中的一切 x, 都有

$$P(x)-f(x)>-E_n$$

资料包

特别地, 连续函数 $P(x)-f(x)$ 的最小值也大于 $-E_n$. 用 $-E_n+2h$ 来表示这个最小值, 其中 $h>0$. 这时对于 $[a,b]$ 中的一切 x, 都有

$$-E_n+2h\leqslant P(x)-f(x)\leqslant E_n$$

从而

$$-E_n+h\leqslant[P(x)-h]-f(x)\leqslant E_n-h$$

于是

$$|[P(x)-h]-f(x)|\leqslant E_n-h$$

但这就表示多项式 $P(x)-h$ 与 $f(x)$ 的偏差小于 E_n, 显然这是与 E_n 的定义相违背的.

已证明的定理在几何上是十分明显的.

其实, 我们试考察曲线

$$y=f(x)+E_n,\quad y=f(x)-E_n \tag{79}$$

多项式 $P(x)$ 的圆形(在 $a\leqslant x\leqslant b$ 时)位于曲线⑲之间的带形中. 证明了的定理就意味着, 这个圆形应当与⑲的上、下两条曲线至少各相切一次. 这是十分明显的, 因为, 若曲线 $y=P(x)$ 一次也不切触下边这条曲线 $y=f(x)-E_n$ (缺乏 $(-)$ 点), 则我们可以把它稍微向下移动一下, 就得到一条位于曲线 $y=f(x)$ 附近的一个较狭的带形内的曲线. 前面提到的证明, 实在说来, 就是把这段讨论赋予精确的形式而已.

然而, 正如切比雪夫所指出过的, 曲线 $y=P(x)$ 与边界曲线⑲的交点却非常之多.

---

① 就事实而论, 在每个 H_n 中都只有一个最佳逼近多项式. 而由于没有证明这一点(本节中便要做到这一点), 所以我们还不得不说成是这种多项式中之"一".

确切地说,我们有:

定理 9 在闭区间$[a,b]$上存在着由$(n+2)$个点所构成的点组

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$$

它们交错为(+)点及(-)点.

这样的点组,我把它称为切比雪夫交错组.

证明 我们用点组

$$u_0 = a < u_1 < u_2 < \cdots < u_3 = b$$

把$[a,b]$分成这样小的闭区间$[u_k,u_{k+1}]$,使得在其中的每一个上,连续函数$P(x)-f(x)$的振幅都小于$\frac{E_n}{2}$.

若闭区间$[u_k,u_{k+1}]$至少含有一个(e)点,则称之为(e)区间.容易看出,差$P(x)-f(x)$在(e)区间上不能为零,因而必保持常号.所以我们可以把(e)区间的集合分成两类:一类是(+)区间,在其上差$P(x)-f(x)$是正的;而另一类是(-)区间,在其上差是负的.

其次,我们把所有的(e)区间依从左到右的顺序一一编起号来

$$d_1,d_2,d_3,\cdots,d_N \qquad ⑧⓪$$

为了确定起见,假定d_1为(+)区间.

我们把序列⑧⓪依下列格式分成若干组

$$\left.\begin{array}{c} d_1,d_2,\cdots,d_{k_1},[(+)\text{区间}], \\ d_{k_1+1},d_{k_1+2},\cdots,d_{k_2},[(-)\text{区间}] \\ \vdots \\ d_{k_{m-1}+1},d_{k_{m-1}+2},\cdots,d_{k_m}[(-1)^{m-1}\text{区间}] \end{array}\right\} \qquad ⑧①$$

上面的每一组中,都至少含有一个闭区间,并且在第一组的每个闭区间中都至少要有一(+)点,第二组的每个闭区间中至少要有一(-)点,如此等等.因此,要证明本定理,只须证明

$$m \geqslant n+2 \qquad ⑧②$$

即可(前面的定理只保证了$m \geqslant 2$).今假定

$$m < n+2 \qquad ⑧③$$

由于差$P(x)-f(x)$在闭区间d_{k_1}及d_{k_1+1}上的符号相异,闭区间d_{k_1}的右端点就不会与闭区间d_{k_1+1}的左端点重合.所以我们可以在闭区间d_{k_1}之右与d_{k_1+1}之左选取一点z_1,用符号来表示可以写成

$$d_{k_1} < z_1 < d_{k_1+1}$$

与此完全相仿,我们可以取这样的一些点$z_2,z_3,\cdots,z_{m-1}$,而使

$$d_{k_1} < z_2 < d_{k_1+1}$$

$$\vdots$$

$$d_{k_{m-1}} < z_{m-1} < d_{k_{m-1}+1}$$

作好了这些之后,我们令

$$\rho(x) = (z_1 - x)(z_2 - x)\cdots(z_{m-1} - x)$$

根据我们的假定⑧3,有 $m-1 \leqslant n$,所以多项式 $\rho(x)$ 属于 H_n,而且除了诸点 z_i 之外,多项式 $\rho(x)$ 没有其他的极,因之它在诸闭区间 d_k 上都不能为零,因而在这些闭区间上保持常号.不难看出,在 ⑧1 的第一组中的每个闭区间上,多项式 $\rho(x)$ 是正的(因为每个因子 $z_i - x$ 都是正的).在 ⑧1 的第二组中的每个闭区间上,多项式 $\rho(x)$ 是负的(因为它含有一个负因子 $z_1 - x$),这样继续讨论下去,我们可以断定,在 ⑧0 的所有(e)区间上多项式 $\rho(x)$ 与 $P(x) - f(x)$ 的符号相同.

设$[u_i, u_{i+1}]$是原分划中的任一闭区间,若它不是(e) 区间,则量

$$\max_{u_i \leqslant x \leqslant u_{i+1}} |P(x) - f(x)| \quad ⑧4$$

将严格地小于 E_n,因此,如果用 E^* 表示 ⑧4 中的最大数,就得到

$$E^* < E_n$$

令

$$R = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\rho(x)|$$

并取这样小的正数 λ,使其满足①

$$\lambda R < E_n - E^*, \quad \lambda R < \frac{1}{2}E_n \quad ⑧5$$

如果令

$$Q(x) = P(x) - \lambda\rho(x)$$

则可证明多项式 $Q(x)$(显然属于 H_n)于 $f(x)$ 的偏差将小于 E_n.由于这是不可能的,因而我们就得到了所期望的矛盾.于是最后便归结到要证明不等式

$$\Delta(Q) < E_n \quad ⑧6$$

设$[u_i, u_{i+1}]$为原分划中的闭区间而不是(e) 区间,并设 $x \in [u_i, u_{i+1}]$,那么

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant |P(x) - f(x)| + \lambda|\rho(x)| \leqslant E^* + \lambda R < E_n$$

现在假定 x 属于(e) 区间 d_k 中的某一个.这时,两个数 $P(x) - f(x)$ 及 $\lambda\rho(x)$,便有着相同的符号.同时 $|P(x) - f(x)| > \lambda|\rho(x)|$,因为

$$|P(x) - f(x)| > \frac{1}{2}E_n, \quad \lambda|\rho(x)| < \frac{1}{2}E_n$$

---

① 容易看出,$E_n - E^* < \frac{1}{2}E_n$,所以不等式 ⑧5 中的第二个可以从第一个推出来.事实上,如果 u_p 是闭区间 d_{k_1} 的右端点,则 $P(u_p) - f(u_p) > \frac{1}{2}E_n$(这可以根据 d_{k_1} 含有(+)点以及 $P(x) - f(x)$ 在 d_{k_1} 上的振幅小于$\frac{1}{2}E_n$ 来推出).另一方面,u_p 是闭区间$[u_p, u_{p+1}]$的左端点,这个闭区间紧靠着 d_{k_1} 之右,它已经不是(e) 区间,所以 $|P(u_p) - f(u_p)| \leqslant E^*$.从而知 $E^* > \frac{1}{2}E_n$.

从而

$$|Q(x)-f(x)|=|P(x)-f(x)-\lambda\rho(x)|=|P(x)-f(x)|-\lambda|\rho(x)|$$

所以

$$|Q(x)-f(x)|\leqslant E_n-\lambda|\rho(x)|<E_n$$

这是因为在(e)区间上 $\rho(x)\neq 0$ 的缘故.

于是,对于 $[a,b]$ 中的任何 x 都有

$$|Q(x)-f(x)|<E_n$$

因此便推得 ㊵,而定理获证.

我们指出,作多项式 $Q(x)$ 时可以不依赖于 ㊸ 的假定,并且对于它来说,不等式 ㊵ 仍然是正确的,可是在 $m\geqslant n+2$ 时我们却得不到矛盾,因为对于这样的 m,多项式 $Q(x)$ 便不属于 H_n 了.

尽管这个定理的证明相当复杂,但其基本观点却与前述定理相似.切比雪夫曾试图证明,当缺乏 $(n+2)$ 项的交错组时,$P(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差在从 $P(x)$ 中减去用适当的方法选出的多项式 $\rho(x)$ 时是可以减小的.因为要达到这个目的,就必须在所有(e)点处减小差 $P(x)-f(x)$ 的绝对值,所以在这些点处,$\rho(x)$ 应当与所述的差同号.如果这个差的变号小于 $n+2$ 次,则次数不超过 n 的多项式 $\rho(x)$ 便会满足我们所提出的要求.这时在其他点处可能发生多项式 $P(x)-\rho(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差大于 E_n 的危险,把 $\rho(x)$ 乘下一个足够小的正因子 λ 很容易就可免除这样的危险.于是推得,在缺乏交错组时,多项式 $P(x)$ 便不可能是最佳逼近多项式.

从已证明的定理便直接推得最佳逼近多项式的唯一性.

定理 10 在 H_n 中只存在着一个最小偏差多项式.

证明 假定在 H_n 中有两个最小偏差多项式 $P(x)$ 及 $Q(x)$,则对于 $[a,b]$ 中的一切 x,都有

$$-E_n\leqslant P(x)-f(x)\leqslant E_n,\quad -E_n\leqslant Q(x)-f(x)\leqslant E_n$$

把这两个不等式相加后用 2 除所得结果便是

$$-E_n\leqslant \frac{P(x)+Q(x)}{2}-f(x)\leqslant E_n$$

这就表明,所得的半和

$$R(x)=\frac{P(x)+Q(x)}{2}$$

也是 $f(x)$ 的一个最小偏差多项式.因而这时对于 $R(x)$ 便存在着切比雪夫交错组

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2} \tag{87}$$

设 x_k 是 $R(x)$ 的一个(+)点,这就表示

$$\frac{P(x_k)-f(x_k)}{2}+\frac{Q(x_k)-f(x_k)}{2}=E_n$$

但 $Q(x_k)-f(x_k)\leqslant E_n$,但是

$$|P(x_i)-f(x_i)|\leqslant E_n<A$$

从而便显然可知,两个差 $Q(x_i)-P(x_i)$ 与 $Q(x_i)-f(x_i)$ 的符号相同,因而差 $Q(x_i)-P(x_i)$ 在经过每一点 x_i 到下一点 x_{i+1} 时也变号,所以在区间 $(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_{n+1},x_{n+2})$ 中的每一个内都有差 $Q(x)-P(x)$ 的根.这样一来,由于有 $(n+1)$ 个根,于是这个差 $Q(x)-P(x)$(因为是一个次数小于或等于 n 的多项式)就应当恒等于零了.然而这是不可能的,因为

$$\Delta(Q)=A>E_n=\Delta(P)$$

即多项式 $Q(x)$ 与 $P(x)$ 并不恒等.所得的矛盾使我们断定 $A=E_n$ 为真.而在这种情况下,便得到

$$\Delta(Q)=E_n$$

因而 $Q(x)$ 是最小偏差多项式.

依同样的推理方式,我们还可以建立一个估计 E_n 的下界的定理:

定理 11 设对于函数 $f(x)\in C([a,b])$ 能够求出这样的多项式 $Q(x)\in H_n$ 以及这样的点组

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$$

使得每经过点 x_i 到 x_{i+1} 时差 $Q(x_i)-f(x_i)$ 都变号.如果用 A 表示诸数

$$|Q(x_i)-f(x_i)| \quad i=1,2,\cdots,n+2$$

中的最小者,则

$$A\leqslant E_n$$

事实上,若假定 $A>E_n$,那么,逐字重复前一段的讨论,便仍然会得出矛盾来.

例题 包瑞尔定理及切比雪夫定理确定了任一连续函数的最小偏差

$$\frac{P(x_k)-f(x_k)}{2}+\frac{E_n}{2}\geqslant E_n$$

因而

$$P(x_k)-f(x_k)\geqslant E_n \tag{88}$$

因为差 $P(x)-f(x)$ 不超过 E_n,所以在 (88) 中有等号,换句话说,x_k 是 $P(x)$ 的一个(+)点.同理可知它也是 $Q(x)$ 的一个(+)点.这样一来

$$P(x_k)-f(x_k)=E_n=Q(x_k)-f(x_k)$$

因而 $P(x_k)=Q(x_k)$.仿此可确定 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 在交错组 (87) 中的(-)点处也都相等.我们看到,次数都不高于 n 的多项式 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 应当在 (87) 的 $(n+2)$ 个点处相等.这只有当它们恒等时才是可能的.

不难证明,切比雪夫交错组的存在便是最佳逼近多项式的特征.

定理 12 设 $f(x)\in C([a,b])$,且 $Q(x)$ 为 H_n 中的任一多项式.令

$$A=\max|Q(x)-f(x)|$$

如果在闭区间 $[a,b]$ 上存在着这样的点组

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2} \tag{89}$$

使得

$$|Q(x_i)-f(x_i)|=A \quad i=1,2,\cdots,n+2 \qquad ⑩$$

并且在经过每一点 x_i 到下一点 x_{i+1} 时差 $Q(x_i)-f(x_i)$ 变号，那么，$A=E_n$，并且 $Q(x)$ 便是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式.

证明 因为 $A=\Delta(Q)$，所以 $A \geqslant E_n$. 我们来证明 $A=E_n$. 如果不是这样，则

$$A>E_n \qquad ⑪$$

用 $P(x)$ 表示 $f(x)$ 的最佳逼近多项式. 那么

$$Q(x_i)-P(x_i)=\{Q(x_i)-f(x_i)\}-\{P(x_i)-f(x_i)\}$$

差多项式的存在性及唯一性，可是它们却没有给出实际上用以求出这种多项式的方法. 后面这个问题是极其困难的，直到如今对于一般的情形都还没有解决. 下面我们所要讲的是 $n=0$ 及 $n=1$ 这两种最简单的情形.

在 $n=0$ 时解答极为简单. 那就是，如果用 m 及 M 分别表示定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的最小值及最大值，则一切常量中与 $f(x)$ 有最小偏差的量为

$$P=\frac{m+M}{2}$$

这在几何上是非常明显的，因为 $\Delta(P)=\dfrac{M-m}{2}$，而上下移动直线 $y=P$ 时，我们都显然会把偏差增大.

正式的证明也并不怎么困难. 事实上，如果 x_1 及 x_2 是这样的点，使得

$$f(x_1)=M, \quad f(x_2)=m$$

则

$$P-f(x_1)=-\frac{M-m}{2}, \quad P-f(x_2)=\frac{M-m}{2}$$

又因 $\Delta(P)=\dfrac{M-m}{2}$，所以点 x_1 及 x_2 就构成切比雪夫交错组，而它的存在便表征出 P 是一个最佳逼近多项式.

在 $n=1$ 时问题也很简单，如果假定 $f(x)$ 是可微两次的并且 $f''(x)$ 不变号，例如

$$f''(x)>0 \qquad ⑫$$

事实上，设 $P(x)=Ax+B$，是最佳逼近多项式. 在含有 3 个点的切比雪夫交错组 $x_1<x_2<x_3$，中间的点 x_2 必然位于 $[a,b]$ 的内部，即，它是差 $f(x)-P(x)$ 的极值点①. 所以 $f'(x_2)-P'(x_2)=0$，从而

$$A=f'(x_2).$$

根据 ⑫，导数 $f'(x)$ 为严格的递增函数，因而它只能取值 A 一次. 这就证明，差 $f(x)-P(x)$ 在 $[a,b]$ 内部除了点 x_2 以外不再有其他的极值点，因而交错组中的其余两点 x_1 及 x_3 便与闭区间 $[a,b]$ 的端点重合

$$x_1=a, \quad x_3=b$$

为了简单起见，把点 x_2 记作 c. 于是所引起的讨论就证明了

① 由条件 ⑫ 显然可知，这便是差 $f(x)-P(x)$ 的极小值点，亦即，x_2 为 $P(x)$ 的一个(+)点.

$$f(a)-P(a)=f(b)-P(b)=-\{f(c)-P(c)\}$$

或者，写得更详细一些

$$f(a)-Aa-B=f(b)-Ab-B=Ac+B-f(c)$$

由其中的第一个等式便得出

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{93}$$

而这时也容易求出 B

$$B=\frac{f(a)+f(c)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a+c}{2}$$

这两个等式便把问题解决了，因为这时点 c 可由下面的方程求出来

$$f'(c)=A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{94}$$

所得到的解答具有很简单的几何意义．就是，等式 ⑬ 指出了直线 $y=P(x)$ 平行于联 $M[a,f(a)]$ 及 $N[b,f(b)]$ 二点的弦 MN（图 1）．其次，把这条直线的方程改写成

$$y-\frac{f(a)+f(c)}{2}=A\left(x-\frac{a+c}{2}\right)$$

的形式以后，我们便看出，它通过联 M 与 $Q[c,f(c)]$ 二点的弦 MQ 的中点 D.

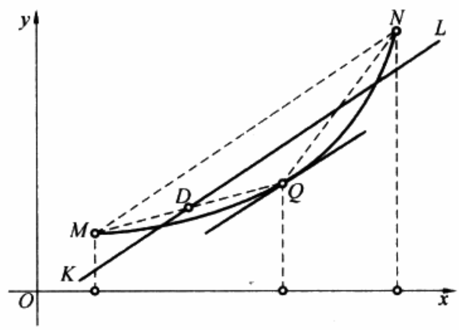


图 1

这样一来，我们便得出下面的法则：要作出函数 $f(x)$ 的一次最佳逼近多项式，我们可以如下进行：

(1) 作弦 MN；

(2) 在弧 $\overset{\frown}{MN}$ 上求出一点 Q，使在这点的切线与弦 MN 平行；

(3) 连结 Q 及 M，Q 及 N，并引出三角形 MQN 的中间线 KL．直线 KL 就是所求多项式的图形．

我们来考虑，例如，函数 $y=\sqrt{x}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的一最小偏差多项式．

这里弦 MN 的斜率等于 1，方程 ⑭ 就成为 $\frac{1}{2\sqrt{c}}=1$，从而 $c=\frac{1}{4}$，因而点 Q 及 D 便分别为 $Q\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 及 $D\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$，所以直线 KL 的方程便是

$$y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{8}$$

因而所求的多项式就是 $x+\frac{1}{8}$

现在来考虑这样一个问题：在 H_{n-1} 中求一多项式 $P(x)$，使它在闭区间 $[-1,1]$ 上与函数 $f(x)=x^n$ 的偏差为最小．

设所求的多项式为

$$P(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + r$$

并且令①

$$\tilde{R}(x) = x^n - (ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + r) \tag{95}$$

则所考虑的问题便归结为如何去选择系数 $a,b,\cdots,r$ 使得量

$$M = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\tilde{R}(x)|$$

尽可能的取最小值.因为我们可以把任一个最高次项系数为 1 的多项式改写成 ⑮ 的形式,而量 M 不是别的,它正是这多项式与零的偏差.于是我们便看出,提出的问题完全相当于这样的问题:从最高次项系数为 1 的一切多项式中,去求出在闭区间[-1,1]上与零有最小偏差的多项式.

为了解决这个非常重要的问题,我们需要一些辅助命题:

引理 恒等式

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta \quad n = 1,2,3,\cdots$$

是成立的,其中 $\lambda_0^{(n)},\lambda_1^{(n)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(n)}$ 为某些常数.

证明 在 $n=1$ 时引理是显而易见的.今假定它一直到某一个 n(包括 n 在内)都成立.

由于

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

所以

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

从而

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\Big(2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta\Big) - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\cos^k\theta$$

于是

$$\cos(n+1)\theta = 2^n\cos^{n+1}\theta + \sum_{k=0}^{n}\nu_k\cos^k\theta$$

因而引理获证.

于特例,对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$,令

$$\theta = \arccos x$$

便得②

推论 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时恒等式

$$\cos(n\arccos x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}x^k \qquad n\geqslant 1 \tag{96}$$

成立.

定义 称多项式③

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \tag{97}$$

为切比雪夫多项式.

---

① 记号 $\tilde{R}(x)$(或 $\tilde{P}(x)$ 等)用以表示(根据 B.Л 巩恰罗夫的记法)多项式 $\tilde{R}(x)$ 的最高次项系数为 1.

② 我们记住,记号 $\arccos x$ 表示着(唯一地)这样的角 θ,其余弦等于 x 并且满足不等式 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

③ 这样的多项式是 П.Л.切比雪夫[2]于 1857 年提出的.

等式 ⑰ 只在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时规定了这个多项式，然而，与每个多项式一样．$T_n(x)$ 对于一切实数 x(甚至复数)都是有定义的；恒等式 ⑯ 的右方便对于不限定在$[-1,1]$上的 x 给出了它的表示法．我们指出

$$T_0(x) = 1$$

对于 $x \in [-1,1]$ 来计算 $T_n(x)$ 的值时，宜分成两步进行：

(1) 在$[0,\pi]$中求出这样的角 θ 使得

$$\cos\theta = x$$

(2) 计算

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

切比雪夫多项式给出了前面提出的问题的答案．就是：

定理 13 在最高次项系数为 1 的一切多项式中，在闭区间$[-1,1]$上与零有最小偏差的多项式为

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$$

证明 我们已经确定，要求出所需的多项式

$$\tilde{R}(x) = x^n - (ax^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + r)$$

就必须求出这样的多项式

$$P(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + r$$

使其成为函数 $f(x) = x^n$ 在闭区间$[-1,1]$上的最佳逼近多项式．要使多项式 $P(x)$ 满足这种要求，只须存在有$(n-1)$项①的切比雪夫交错组，亦即这样的一组点

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} \quad -1 \leqslant x_k \leqslant 1$$

使得多项式 $\tilde{R}(x)$ 在其中每一点上都达到它的最大绝对值，并且在每经过点 x_k 到 x_{k+1} 时 $\tilde{R}(x)$ 都变号．

我们来验证，多项式 $\tilde{T}_n(x)$ 便具有这样的交错组．其实，如果令

$$\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{n}, \cdots, \theta_k = \frac{k\pi}{n}, \cdots, \theta_n = \pi$$

则
$$\cos n\theta_k = (-1)^k$$

所以对于
$$x_k = \cos\theta_k \quad k = 0,1,\cdots,n \tag{98}$$

将有
$$\tilde{T}_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

另一方面，由于

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{99}$$

因而点 ⑱ 便构成了所需的交错组．

① 在这里我们要注意，具有最小偏差(对 x^n 而言)的多项式不在 H_n 内而是在 H_{n-1} 内，由于这个缘故，交错组中的点数便减少一个．

附注　切比雪夫大致是这样求得他的多项式的：设 $\tilde{T}(x)$ 为所求的多项式，其最高次项系数为 1，并且在闭区间 $[-1,1]$ 上与零有着最小偏差，把这个偏差亦即在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时的 $\max|\tilde{T}(x)|$ 记作 M. 像已经说过的那样，多项式 $\tilde{T}(x)$ 应当在闭区间 $[-1,1]$ 上的 $n+1$ 个点处达到了值 $\pm M$. 对那些位于 $[-1,1]$ 内部的点，必然要有 $\tilde{T}'(x)=0$. 但是 $\tilde{T}'(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式，这就表明 $\tilde{T}'(x)$ 不能有多于 $n-1$ 个根. 由此可知，有 $n-1$ 个偏差点都落在闭区间 $[-1,1]$ 的内部，而其余两个点位于闭区间的两端. 于是，多项式 $M^2-\tilde{T}^2(x)$ 及 $(1-x^2)\tilde{T}'^2(x)$ 有相同的根，并且位于 $(-1,1)$ 内部的这些根都是上面两个多项式的二重根. 由此可知这两个多项式只能相差一个常数因子. 比较它们的最高次项系数，便得到

$$M^2-\tilde{T}^2(x)=\frac{(1-x^2)\tilde{T}'^2(x)}{n^2} \tag{100}$$

这个关系式本身具有独立意义. 从 ⑩ 可知

$$\sqrt{M^2-\tilde{T}^2(x)}=\pm\frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}\,\tilde{T}'(x)$$

导数 $\tilde{T}'(x)$ 在经过每个交错点时都变号，假设在区间 (α,β) 上它是正的，则在这个区间上便有

$$\frac{\tilde{T}'(x)}{\sqrt{M^2-\tilde{T}^2(x)}}=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

两边取积分，便得

$$\arccos\frac{\tilde{T}(x)}{M}=n\arccos x+C$$

就是说

$$\tilde{T}(x)=M\cos[n\arccos x+C]$$

或

$$\tilde{T}(x)=M[\cos C\cos(n\arccos x)-\sin C\sin(n\arccos x)]$$

由于 $\tilde{T}(x)$ 是一个多项式，就应当有 $\sin C=0$，从而 $\cos C=\pm 1$. 但 $\cos(n\arccos x)$ 的最高次项系数是 2^{n-1}，这就表明 $\cos C=1$，而且 $M=2^{-n+1}$. 从而

$$\tilde{T}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$$

这个等式只在区间 (α,β) 内建立了，但因这个等式的两方都是多项式，所以它便处处都成立.

回到已证明的定理上，与等式 ⑲ 比较，便得：

推论　对于每一个最高次系数为 1 的 n 次多项式 $\tilde{P}_n(x)$，不等式

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\tilde{P}_n(x)|\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$$

都成立.

如果 n 次多项式 $P_n(x)$ 的最高次项系数不为 1 而为 A_0，则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n(x)|\geqslant\frac{A_0}{2^{n-1}}$$

注意到这一点后,我们来考虑 n 次多项式

$$P_n(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$$

令

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}y$$

我们便看出, $P_n(x)$ 可以当作是变数 y 的多项式,且其最高次项系数是

$$c_0\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$$

于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P_n(x)|=\max_{-1\leqslant y\leqslant 1}|P_n(x)|\geqslant c_0\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

切比雪夫多项式的进一步性质

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

除了与零有最小偏差的多项式外,还具有很多其他的重要性质.这一节中我们将要谈到其中的一些.

首先,在公式

$$\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta\quad n=2,3,\cdots$$

中施行代换 $\theta=\arccos x$,便可得到联系三个切比雪夫多项式的递推关系

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad n=2,3,\cdots \tag{101}$$

知道了 $T_0(x)=1,T_1(x)=x$

我们从等式 ⑩ 便可以相继求得

$$\begin{aligned}T_2(x)&=2x^2-1,\\T_3(x)&=4x^3-3x,\\T_4(x)&=8x^4-8x^2+1,\\T_5(x)&=16x^5-20x^3+5x,\\T_6(x)&=32x^6-48x^4+18x^2-1\end{aligned}$$

这可以无限制地继续排列下去.

寻求多项式 $T_n(x)$ 的另一方法是以所谓"母函数"为基础的.为了阐述它,我们需要下面的公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos n\theta=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}\quad -1<t<1 \tag{102}$$

上式左方显然是一个绝对收敛的级数.

为了证明这公式,我们指出它的左方是几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{n\theta i}=\frac{1}{1-te^{\theta i}}$$

之和的实部.

可是 $$\frac{1}{1-te^{\theta i}}=\frac{1}{1-t\cos\theta-it\sin\theta}=\frac{1-t\cos\theta+it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2+t^2\sin^2\theta}$$

因为这个分式的实部正好与 (102) 的右方相同.

如果在 (102) 中令 $\theta = \arccos x$,则得

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) \quad -1 < t < 1 \tag{103}$$

因之一系列的切比雪夫多项式就成为函数

$$T(t, x) = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}$$

的展式中 t 的不同乘幂底系数.

我们称这个函数 $T(t, x)$ 为切比雪夫多项式的母函数.由于 $T(t, x)$ 依 t 的乘幂的展式在形式上可以用 $1 - 2tx + t^2$ 除 $1 - tx$ 得到,所以我们又得到一个实际上计算多项式 $T_n(x)$ 的新方法

$$\begin{array}{l|l}
1 - tx & 1 - 2tx + t^2 \\
\underline{1 - 2tx + t^2} & \overline{1 + tx + t^2(2x^2 - 1) + t^3(4x^3 - 3x) + \cdots} \\
\quad tx - t^2 & \\
\quad \underline{tx - 2t^2x^2 + t^3x} & \\
\qquad t^2(2x^2 - 1) - t^3x & \\
\qquad \underline{t^2(2x^2 - 1) - 2t^3(2x^3 - x) + t^4(2x^2 - 1)} & \\
\qquad\qquad t^3(4x^3 - 3x) - t^4(2x^2 - 1) & \\
\qquad\qquad \cdots\cdots &
\end{array}$$

商

$$1 + tx + t^2(2x^2 - 1) + t^3(4x^3 - 3x) + \cdots$$

的系数实际上都与 $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), \cdots$ 相合.

要写出多项式 $T_n(x)$ 的显式并不困难.

为了这一目的,我们先来证明其本身具有独立意义的定理:

定理 14 多项式 $y = T_n(x)$ 满足微分方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{104}$$

事实上,设

$$y = \cos(n\arccos x)$$

则

$$y' = \frac{n}{\sqrt{1 - X^2}}\sin(n\arccos x)$$

因而

$$\sqrt{1 - x^2}\,y' = n\sin(n\arccos x)$$

微分这个恒等式,便得

$$\sqrt{1 - x^2}\,y'' - \frac{xy'}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}}\cos(n\arccos x)$$

从而便推得[1](104).此外,还有更简单的方法能够获得 (104),就是对于满足切比雪夫多项式的关系式

---

① 当然,我们的讨论只证明 $T_n(x)$ 方方程 (104) 在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 情形下的解.但由于 $y = T_n(x)$ 是多项式,所以 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y$ 也是多项式,因之它在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时为零.从而便推得定理成立的普遍性.

$$M^2 - y^2 = \frac{(1-x^2)y'^2}{n^2}$$

取微分.

现在转到对我们具有意义的求 $T_n(x)$ 的显式的问题上来.令

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

并且将这个表达式代入 ⑭ 中,这就给出了等式

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n-k-1)a_k x^{n-k-2} - x\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k x^{n-k-1} + n^2\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k} = 0$$

它可以表示成

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n-k-1)a_k x^{n-k-2} + \sum_{k=0}^{n}[n^2-(n-k)^2]a_k x^{n-k} = 0 \qquad ⑮$$

这里在第一个和中对应于值 $k = n$ 及 $k = n-1$ 的两项消失了.所以引用新的求和附标 $i = k+2$ 并仍记成 k,则这个和就可表成

$$\sum_{k=2}^{n}(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2}x^{n-k}$$

在第二个和中对应于值 $k = 0$ 的项消失了,因之恒等式 ⑮ 呈下列形式

$$[n^2-(n-1)^2]a_1 x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\{(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2} + [n^2-(n-k)^2]a_k\}x^{n-k} = 0$$

从而便推得 $a_1 = 0$ 并且

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{k(2n-k)}a_{k-2}$$

从这个关系式立刻推出所有带奇附标的系数都等于零.把 k 换成 $2k$ 时,便得到

$$a_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n-k)}a_{2k-2}$$

但因 $a_0 = 2^{n-1}$,从而推知

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{1\cdot(n-1)}2^{n-3}, \quad a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(n-1)(n-2)}2^{n-5}$$

而且一般地

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!(n-1)\cdots(n-k)}2^{n-2k-1}$$

它是很容易用归纳法验证的.其次,注意到

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!(n-1)\cdots(n-k)} = \frac{n}{n-k}\,\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!} = \frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}$$

最后便得

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k}$$

其中记号 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分.

资料包

还可以写出切比雪夫多项式的另一个显式.那就是,从摩阿弗公式

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

推得

$$\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta = (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

从而

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}[(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n + (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^n]$$

如果在上式中令 $\theta = \arccos x$(算作 $|x| \leqslant 1$),则便得到

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2})^n + (x - \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2})^n]$$

我们只在 $|x| \leqslant 1$ 时建立了这个等式,可是容易看出,它对于所有的实数及复数 x 都能成立.因为它的右方恰是一个多项式.要断定这一点,把它写成

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\mathrm{i}^k(\sqrt{1 - x^2})^k(1 + (-1)^k)$$

的形式后,并且注意,这里只是对应于偶数值 k 的那些加数异于零就可以了.

对于适合 $|x| > 1$ 的那些实数 x,宜于把表示 $T_n(x)$ 的最后这个公式作一些改变.就是,若 k 为偶数,则

$$\mathrm{i}^k(\sqrt{1 - x^2})^k = (\sqrt{x^2 - 1})^k$$

这就表明

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(\sqrt{x^2 - 1})^k(1 + (-1)^k)$$

从而

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]$$

这个表达式中不包含虚部(在 $|x| > 1$ 时).于特例,从它可以推得 $T_n(x)$ 的下述重要估值:

定理 15 若 x 为实数,并且 $|x| > 1$,则

$$|T_n(x)| \leqslant (|x| + \sqrt{x^2 + 1})^n$$

其实,两项式 $x + \sqrt{x^2 - 1}$ 及 $x - \sqrt{x^2 - 1}$ 中每一个的绝对值都不大于 $|x| + \sqrt{x^2 - 1}$.

现在我们来研究多项式 $T_n(x)$ 的根.

由于 $T_n(x) = \cos n\theta$,其中 $\theta = \arccos x$,显然可见,使对应的值 θ 能满足方程 $\cos n\theta = 0$,的那些值 x 便是 $T_n(x)$ 的根.

这样的值 θ(我们记住 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) 显然便是

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2n}, \theta_2 = \frac{3\pi}{2n}, \cdots, \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \cdots, \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

所以,诸数

$$x_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{2n}, x_2^{(n)} = \cos\frac{3\pi}{2n}, \cdots, x_n^{(n)} = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

便是多项式 $T_n(x)$ 的根全都包括无遗了,并且其中的每一个都是单根.

这样一来,我们便建立了:

定理 16 多项式 $T_n(x)$ 的根可以用公式

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1,2,\cdots,n$$

来给出.

它们全都是实的单根,而且位于区间 $(-1,1)$ 的内部.

从所引出的公式便推得了切比雪夫多项式的相邻两根的"介插"性质:

定理 17 在多项式 $T_n(x)$ 的相邻两根 $x_k^{(n)}$ 及 $x_{k+1}^{(n)}$ 之间,一定有而且只有一个前一多项式 $T_{n-1}(x)$ 的根.

事实上,多项式 $T_{n-1}(x)$ 的第 k 个根为

$$x_k^{(n-1)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n-2}$$

我们来确定①

$$x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)} \tag{106}$$

或者,相当于建立

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}$$

可是这个双边不等式的第一部分是显而易见的,而它的第二部分则与不等式

$$2k < 2n - 1$$

等价,由此便推出 $k < n$.于是不等式⑩⑥便得到证明.因为在 n 个根 $x_k^{(n)}$ 之间有 $n-1$ 个区间,其中每一个区间都含有多项式 $T_{n-1}(x)$ 的根,于是显然可知在这些区间中都正好各有一个根,因为,这些根的个数也是 $n-1$.

推论 两个相邻的多项式 $T_n(x)$ 及 $T_{n-1}(x)$ 不能有公根.

我们指出,这个推论可以很简单地由递推式⑩①得出.其实,假定 $T_n(x)$ 及 $T_{n-1}(x)$ 有一公根 x_0,则从⑩①便推得

$$T_{n-2}(x_0) = 0$$

即 x_0 将成为多项式 $T_{n-2}(x)$ 的根.可是,重复这种推理方法,我们便可断定,x_0 将成为多项式 $T_{n-3}(x)$ 的根,从而将成为 $T_{n-4}(x)$ 的根,等等.最后 x_0 就应当成为多项式 $T_0(x) \equiv 1$ 的根,这便显然是荒谬可笑了.

现在我们对于甚大的 n 来考虑多项式 $T_n(x)$ 的根的分布问题.为了格外清晰起见,我们对这个问题给出它的力学解释.那就是,我们设想某一个质量为 M 的物质,基质量均匀分布于多项式 $T_n(x)$ 的 n 个根 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ 上.于是在其每一个根上就荷载质

① 因为 $\cos\theta$(在 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时)是减函数,所以根 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ 便能排成一个递减的次序.

量$\frac{M}{n}$.我们来阐明,在某个闭区间$[a,b]\subset[-1,1]$上所具有物质的质量$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n$是多少.显然,

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n=\frac{M}{n}\tau_n$$

其中τ_n是位于$[a,b]$上的根$x_k^{(n)}$的个数.换句话说,我们需要从整数$1,2,\cdots,n$和中求出满足不等式

$$a\leqslant\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\leqslant b$$

的那些k的个数.

这个不等式与不等式

$$\alpha\geqslant\frac{(2k-1)\pi}{2n}\geqslant\beta$$

是等价的,其中

$$\alpha=\arccos a,\quad\beta=\arccos b$$

而后一不等式可以写成这样的形式

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\beta}{\pi}\right)\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\alpha}{\pi}\right)$$

于是,我们便需要解决这样的问题:给出了数P及Q,其中$P<Q$,要去确定满足不等式

$$P\leqslant k\leqslant Q$$

的那些自然数k的个数.

如果

$$i<P\leqslant i+1<i+2<\cdots<i+m\leqslant Q<i+m+1$$

则所求的个数就等于m.容易看出

$$m-1\leqslant Q-P<m+1$$

从而

$$Q-P-1<m\leqslant Q-P+1$$

于是

$$m=Q-P+\mu\quad -1<\mu\leqslant 1$$

在我们的有趣问题中

$$P=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\beta}{\pi}\right),\quad Q=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\alpha}{\pi}\right)$$

因此

$$\tau_n=n\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\mu_n\quad -1<\mu_n\leqslant 1$$

从而

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n=\frac{M}{\pi}(\alpha-\beta)+\frac{M\mu_n}{n}\quad -1<\mu_n\leqslant 1$$

或

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}_n=\frac{M}{\pi}(\arccos a-\arccos b)+\frac{M\mu_n}{n}$$

这个等式指出，当 n 无限增大时，质量的分布便趋于一种极限的情况，在这时，分布在闭区间 $[a,b]$ 上的质量是

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}_\infty=\frac{M}{\pi}(\arccos a-\arccos b)$$

像通常在力学中所讨论的一样，我们力求以其密度来刻画出质量的极限分布状态.

因为位于区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的质量等于

$$\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}_\infty=\frac{M}{\pi}[\arccos x-\arccos(x+\Delta x)]$$

所以这个区间的平均密度为

$$\frac{1}{\Delta x}\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}_\infty=\frac{M}{\pi}\frac{\arccos x-\arccos(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

因此，在点 x 的点密度便为

$$p(x)=\frac{M}{\pi}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arccos x-\arccos(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

其中右方的极限只与函数 $\arccos x$ 在点 x 的导数相差一个符号，于是

$$p(x)=\frac{M}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

这就是在闭区间 $[-1,1]$ 上切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的根的极限分布密度. 当然，这里只是因子 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 起着重要作用，所以，若取原来的质量为 π（这联系着测量质量的单位的选择），我们便得到 $p(x)$ 的更简单的表达式

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{107}$$

公式 ⑩⑦ 可以给出多项式 $T_n(x)$ 落在小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的根的个数的近似表达式，就是说，如果 Δx 很小时，则

$$\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}_\infty\approx\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$$

若数 n 甚大，则上式左方的 $\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}_\infty$ 可以写成 $\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}_n$，而由于 $\overset{b}{\underset{a}{M}}_n=\frac{\pi}{n}\tau_n$，所以对于所求的根的个数有表达式

$$\frac{n\Delta x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

由此显然可见，当 n 甚大时多项式 $T_n(x)$ 的根都聚集到闭区间 $[-1,1]$ 的两端去了.

在函数 ⑩⑦ 与切比雪夫多项式之间有紧密的关系以及完全另外的性质. 为了叙述它，我们引入下面的：

定义　两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 称为对于权函数 $p(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是互相直交

资料包

的，如果

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

定理 18 任何两个相异的切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 及 $T_m(x)$，对于权函数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

在区间$[-1,1]$上都是互相直交的.

要证明这一点只须计算积分

$$I_{nm} = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

为了这一目的，我们引用代换 $x = \cos\theta$. 因为 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$（我们算作 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$），所以

$$I_{nm} = \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \mathrm{d}\theta$$

从而

$$I_{nm} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(n-m)\theta + \cos(n+m)\theta]\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} + \frac{\sin(n+m)\theta}{n+m}\right]_0^{\pi}$$

于是

$$I_{nm} = 0$$

定理 19 设 $P(x)$ 为次数不高于 n 的多项式，而 M 为其在区间$[-1,1]$上的绝对值的最大者. 若 x_0 是一个实数且 $|x_0| > 1$，则

$$|P(x_0)| \leqslant M |T_n(x_0)|$$

证明 假如定理不真，那么便有①

$$M < \left|\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}\right|$$ ⑩⑧

我们引入多项式

$$R(x) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}T_n(x) - P(x)$$

来讨论. 在点 $y_i = \cos\frac{i\pi}{n}$ $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 处将有

$$T_n(y_i) = \cos i\pi = (-1)^i$$

这就表明，在差

$$R(y_i) = (-1)^i\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} - P(y_i)$$

之中，被减数的绝对值大于减数的绝对值（因为 $-1 \leqslant y_i \leqslant 1$，所以 $|P(y_i)| \leqslant M$）. 所以，所提的差 $R(x)$ 在经过每一点 y_i 到 y_{i+1} 时都变号. 由此便推得，在 n 个区间

---

① 注意，$T_n(x_0 \neq 0)$. 因为 $T_n(x)$ 所有的根都位于区间$(-1,1)$内.

$$(y_0,y_1),(y_1,y_2),\cdots,(y_{n-1},y_n)$$

的每一个中都含有多项式 $R(x)$ 的根.但是,除此之外,还有 $R(x_0)=0$.这就表明,n 次多项式 $R(x)$ 有了 $n+1$ 个根.这只有在 $R(x)$ 恒等于零时才有可能,所以

$$P(x)=\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}T_n(x)$$

在这里令 $x=1$ 并注意 $T_n(1)=1$[由于 $T_n(1)=\cos(n\arccos 1)=\cos 0$],便得到

$$P(1)=\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}$$

而这却与 ⑩⑧ 的假定相矛盾.

比较定理 6 与定理 2,我们便得到重要的:

推论 在定理 6 的记号下

$$|P(x_0)|\leqslant M(|x_0|+\sqrt{x_0^2-1})^n \tag{109}$$

在固定最高次项系数时,切比雪夫多项式与零有最小偏差.可以表明,它的其余的系数与最高次项系数同具有这一性质.为了建立属于马尔可夫的这一结果,我们需要

引理 函数

$$f(x)=A_1x^{\lambda_1}+A_2x^{\lambda_2}+\cdots+A_{m+1}x^{\lambda_{m+1}}$$

其中 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{m+1}$ 为任意实数,不能有多于 m 个正根①.

事实上,在 $m=1$ 时引理显然成立.今假定,它对于某一个值 m 成立,而对于值 $m+1$ 不成立.于是我们便发现函数

$$f(x)=A_1x^{\lambda_1}+A_2x^{\lambda_2}+\cdots+A_{m+1}x^{\lambda_{m+1}}+A_{m+2}x^{\lambda_{m+2}}$$

的根.可是,这时按照罗尔定理,这个函数的导致的正根将多于 m 个.然而这与假定矛盾,由于所说的导数具有

$$B_1x^{\mu_1}+B_2x^{\mu_2}+\cdots+B_{m+1}x^{\mu_{m+1}}$$

的形式之故.引理证毕.

定理 20 ($B.A.$ 马尔可夫).若 n 与 $p\leqslant n$ 同是奇数或同是偶数,那么,在所有次数不高于 n 而 x^p 项的系数为 1 的那些多项式中,在区间$[-1,1]$上与零有最小偏差的多项式为

$$\frac{T_n(x)}{A_p^{(n)}} \tag{110}$$

其中 $T_n(x)$ 为切比雪夫多项式,而 $A_p^{(n)}$ 是这个多项式中 x^p 项的系数.若 n 与 p 的奇偶性不同,那么,具有这种性质的多项式便是

$$\frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}} \tag{111}$$

① 我们假设所有的数 A_i 都不为零.

这个定理包含下列四种可能情形[①]：

①p 为偶数，n 为偶数；

②p 为奇数，n 为奇数；

③p 为偶数，n 为奇数；

④p 为奇数，n 为偶数.

我们假定，在情形①下求出多项式 $P(x) \in H_n$，它的 x^p 项的系数为1且与零的偏差小于多项式⑩与零的偏差，亦即，对于一切 $x \in [-1,1]$，有

$$|P(x)| < \frac{1}{|A_p^{(n)}|}$$

于是多项式 $P(-x)$ 也具有这些同样的性质(因 p 为偶数)，这就表明

$$\left|\frac{P(x)+P(-x)}{2}\right| < \frac{1}{|A_p^{(n)}|}$$

注意到这一点后，我们来考虑差

$$R(x) = \frac{T_n(x)}{A_p^{(n)}} - \frac{P(x)+P(-x)}{2}$$

这是一个次数不高于 n 且不含 x^p 项的多项式.

不难看出，$R(x)$ 只由指数 m 为偶数的那些项 x^m 所组成.这样，有

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k x^{2k} \qquad c_{\frac{p}{2}} = 0$$

令

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k y^k$$

因为 $Q(y)$ 含有 $\frac{n}{2}$ 个项(或者还要少一些，如果除了 $c_{\frac{p}{2}}$ 之外还有些系数 c_k 为零的话)，所以 $Q(y)$ 的正根个数不大于 $\frac{n}{2}-1$.

然而，令

$$y_i = \cos^2 \frac{i\pi}{n}$$

我们便得

$$Q(y_i) = R\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{T_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)}{A_p^{(n)}} - \frac{P\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)+P\left(-\cos\frac{i\pi}{n}\right)}{2}$$

从而由等式

$$T_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right) = \cos i\pi = (-1)^i$$

① 我们这里引用的是 C.H.伯恩斯坦的证明.

便推得，$Q(y_i)$ 与 $(-1)^i$ 的符号相同.这就是说在 $\frac{n}{2}$ 个区间

$$(y_{\frac{n}{2}}, y_{\frac{n}{2}-1}), (y_{\frac{n}{2}-1}, y_{\frac{n}{2}-2}), \cdots, (y_2, y_1), (y_1, y_0)$$

的每一个中都含有 $Q(y)$ 的一个根，所得的矛盾就证明了定理的情形 ①.

情形 ③ 可仿此讨论.只须注意到 $\frac{P(x)+P(-x)}{2} \in H_{n-1}$，那么

$$R(x) = \frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}} - \frac{P(x)+P(-x)}{2} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} c_k x^{2k} \qquad c_{\frac{p}{2}} = 0$$

往后的证明可以像情形 ① 一样来完成.

最后，对于 ② 及 ④ 这两种情形，应当考虑 $P(x) - P(-x)$ 而不考虑 $P(x) + P(-x)$.例如，对于 ④ 这种情形，我们将有

$$R(x) = \frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}} - \frac{P(x)-P(-x)}{2} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} c_k x^{2k+1}$$

并应引入多项式 $Q(y) = \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} c_k y^k$.往后的证明细节留给读者来完成.

资料包

可以证明，多项式 ⑩(或者，对应的 ⑪) 是唯一的一个多项式，其中 x^p 项的系数等于 1，并且在 $[-1,1]$ 上它与零的偏差为最小，但是我们不去讲它了.代替这个我们引出 B.A.马尔可夫定理的若干推论.

推论 1 设 $P(x)$ 是一个 n 次多项式，它的 x^p 项 $(p \leqslant n)$ 的系数等于 1，则视 n 与 p 的奇偶性相同或否，而有不等式

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{p-1}} \frac{p!}{n} \frac{\left(\frac{n-p}{2}\right)!}{\left(\frac{n+p}{2}-1\right)!}$$

或

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{p-1}} \frac{p!}{n-1} \frac{\left(\frac{n-p-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n+p-3}{2}\right)!}$$

这个推论由系数 $A_p^{(n)}$ 及 $A_p^{(n-1)}$ 的显明的表达式便立即推得.

显然，若多项式 $P(x)$ 中 x^p 项的系数不是 1 而是 c_p，则上述不等式的右方就应当乘上一个因子 $|c_p|$.从而便推得：

推论 2 若 $P(x)$ 是一个 n 次多项式，则它的 x^p 项的系数 c_p，视 $n-p$ 是偶数与否而有估值

$$|c_p| \leqslant 2^{p-1} \frac{n}{p!} \frac{\left(\frac{n+p}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-p}{2}\right)!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|$$

或

$$|c_p| \leqslant 2^{p-1}\frac{n-1}{p!}\frac{\left(\frac{n+p-3}{2}\right)!}{\left(\frac{n-p-1}{2}\right)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$$

12 切比雪夫多项式与不等式

复旦大学黄宣国教授给出了 Chebychev 多项式的一个有趣应用：

例 正整数 $n \geqslant 2, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 是 $n-1$ 个复数.求证：在 $[0,1]$ 内必有一个实数 x，使得

$$|x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots + d_nx^n| \geqslant \frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}$$

证明 记

$$d_j = a_j + \mathrm{i}b_j, \quad j = 2,3,\cdots,n \qquad ⑫$$

这里 a_j, b_j 全是实数.对于任一实数 x

$$\begin{aligned}|x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots + d_nx^n| = &|(x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n) + \\ &\mathrm{i}(b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n)| \geqslant \\ &|x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n|\end{aligned} \qquad ⑬$$

如果能证明对于任一 n 次 $(n \geqslant 2)$ 实系数多项式

$$f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \qquad ⑭$$

在 $[0,1]$ 内有一实数 x，使得 $|f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}$，则本题结论成立.下面就对实系数多项式 ⑭ 进行研究.

我们知道 Chebychev 多项式

$$T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n \geqslant 3)$$

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad ⑮$$

引入一个多项式

$$F(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}T_n\left(\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n}\right)x - \cos\frac{\pi}{2n}\right) \qquad ⑯$$

由于 $T_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式(从 ⑮ 前三个公式立即可以知道)，则 $F(x)$ 是 x 的 n 次多项式.这里限制 $x \in [0,1]$.

$F(x)$ 满足以下两个简单的性质：

① $F(0) = 0$；

② 当 $x \in [0,1]$ 时，$|F(x)| \leqslant \frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}(n \in \mathbf{N})$.

从 ⑯ 和 ⑮ 的最后一个公式，有

$$F(0) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}T_n\left(-\cos\frac{\pi}{2n}\right) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}T_n\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right)\right) =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\cos n\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$0(\text{利用}\cos n\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0) \tag{117}$$

于是,性质 ① 成立.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有

$$\left|\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)x-\cos\frac{\pi}{2n}\right|=\left|x-(1-x)\cos\frac{\pi}{2n}\right|\leqslant|x|+\left|(1-x)\cos\frac{\pi}{2n}\right|\leqslant$$

$$|x|+|1-x|=x+(1-x)=1 \tag{118}$$

于是,对于固定的 $x\in[0,1]$,必有 $\psi\in[0,\pi]$,使得

$$\cos\psi=\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)x-\cos\frac{\pi}{2n} \tag{119}$$

利用 ⑯、⑲ 和 ⑮ 最后一个公式,有

$$F(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}T_n(\cos\psi)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\cos n\psi \tag{120}$$

从 ⑳ 立即有

$$|F(x)|\leqslant\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\qquad n\in\mathbf{N} \tag{121}$$

有了以上这些预备知识,可以来证明本题了.用反证法,如果对于[0,1]内任意实数 x,由 ⑭ 定义的实系数多项式 $f(x)$ 满足

$$|f(x)|<\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n} \tag{122}$$

我们的方法是研究 $F(x)-f(x)$,这里 $x\in[0,1]$.取

$$x_k=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{k\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}}\quad k=1,2,\cdots,n \tag{123}$$

明显地,从 ㉓,有

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1 \tag{124}$$

和

$$x_k\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\frac{\pi}{2n}=-\cos\frac{k\pi}{n}=\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{n}\right) \tag{125}$$

于是

$$T_n\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)x_k-\cos\frac{\pi}{2n}\right)=T_n\left(\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{n}\right)\right)=\cos n\left(\pi-\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$\cos(n-k)\pi=(-1)^{n-k}=(-1)^{n+k} \tag{126}$$

从 ⑯ 和 ㉖,有

$$F(x_k)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}(-1)^{n+k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n} \tag{127}$$

这里 $k=1,2,\cdots,n$.在 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 内考虑函数 $F(x)-f(x)$.利用 ㉗,有

$$F(x_{k+1})-f(x_{k+1})=(-1)^{k+2}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}-f(x_{k+1}) \tag{128}$$

$$F(x_k)-f(x_k)=(-1)^{k+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}-f(x_k) \tag{129}$$

如果 k 是偶数,从 ⑫、⑭、⑱ 和 ⑲,有

$$F(x_{k+1})-f(x_{k+1})>0,\quad F(x_k)-f(x_k)<0 \tag{130}$$

如果 k 是奇数,类似有

$$F(x_{k+1})-f(x_{k+1})<0,\quad F(x_k)-f(x_k)>0 \tag{131}$$

由于多项式函数 $F(x)-f(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 内关于 x 是连续的,那么,在 (x_k,x_{k+1}) 内必有一点 y_k,使得

$$F(y_k)-f(y_k)=0\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{132}$$

利用 ⑭ 和 ⑰,又可以知道

$$f(0)=0=F(0) \tag{133}$$

从 ⑬,我们可写

$$F(x)=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n \tag{134}$$

这里 $b_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 全是实数.明显地,我们有

$$b_1=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} \tag{135}$$

当 $x\to 0$,从 ⑲,有 $\psi\to\pi-\frac{\pi}{2n}$,从 ⑲,有

$$x=\frac{\cos\psi+\cos\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}} \tag{136}$$

从 ⑳、⑮ 和 ⑯,有 ⑯,有

$$b_1=\lim_{\psi\to\pi-\frac{\pi}{2n}}\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\cos n\psi\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\psi+\cos\frac{\pi}{2n}} \tag{137}$$

令

$$\psi=\pi-\frac{\pi}{2n}+t \tag{138}$$

当 $\psi\to\pi-\frac{\pi}{2n}$ 时,有 $t\to 0$.另外,我们可以看到

$$\cos\psi+\cos\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\left(\frac{\pi}{2n}-t\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2}t\right)\sin\frac{1}{2}t \tag{139}$$

$$\tan\frac{\pi}{4n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)=\tan\frac{\pi}{4n}2\cos^2\frac{\pi}{4n}=\sin\frac{\pi}{2n} \tag{140}$$

$$\cos n\psi=\cos n\left(\pi-\frac{\pi}{2n}+t\right)+\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+nt\right)=(-1)^n\sin nt \tag{141}$$

将 ⑬、⑭ 和 ⑭ 代入 ⑬,兼顾 ⑬,有

$$b_1 = \lim_{t\to 0}\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2n}(-1)^n\sin nt}{-2\sin\frac{1}{2}t\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2}t\right)} =$$

$$\frac{1}{2n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin nt}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2n}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}(令\ t = 2\theta) \tag{142}$$

现在我们来计算 (142) 右端的极限值.

当 n 是正整数时,我们知道

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{143}$$

这里 $\theta\in[0,2\pi]$. 用地方展开公式,从 (143),有

$$\begin{aligned}\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = {} & \cos^n\theta + C_n^1\cos^{n-1}\theta(\mathrm{i}\sin\theta) + C_n^2\cos^{n-2}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^2 + C_n^3\cos^{n-3}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^3 + \\ & C_n\cos^{n-4}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^4 + C_n^5\cos^{n-5}\theta\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^5 + \cdots + \\ & C_n^{n-1}\cos\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^{n-1} + (\mathrm{i}\sin\theta)^n\end{aligned} \tag{144}$$

比较 (144) 两端实部和虚部,有

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots +$$

$$\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta, & 当\ n\ 为偶数时\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{n-1}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & n\ 为奇数时\end{cases} \tag{145}$$

$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta + \cdots +$$

$$\begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}}C_n^{n-1}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & 当\ n\ 为偶数时\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta, & 当\ n\ 为奇数时\end{cases} \tag{146}$$

在 (146) 中,用 $2n$ 代替 n,有

$$\begin{aligned}\sin 2n\theta = {} & 2n\cos^{2n-1}\theta\sin\theta - C_{2n}^3\cos^{2n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots + \\ & (-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}\cos\theta\sin^{2n-1}\theta\end{aligned} \tag{147}$$

从 (142) 和 (147),有

$$b_1 = 1 \tag{148}$$

从 (114)、(134) 和 (148),有

$$F(x) - f(x) = x^2[(b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)x + \cdots + (b_n - a_n)x^{n-2}] \tag{149}$$

从 (124) 和 (132),可以知道 $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < 1$,及 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 是多项式 $(b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)x + \cdots + (b_n - a_n)x^{n-2}$($x$ 的至多 $n-2$ 次多项式)的 $n-1$ 个两两不同实根,因此,对于任意实数 x,有

$$(b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)x + \cdots + (b_n - a_n)x^{n-2} = 0 \tag{150}$$

从 (149) 和 (150),对于任意实数 x,有

$$F(x) = f(x) \tag{151}$$

这与不等式 (130)、(131) 是矛盾的.

13　切比雪夫多项式与马尔科夫定理

问题 23　设 Q 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式，且对 $x\in[-1,1]$，有

$$|Q(x)|\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

证明在 $[-1,1]$ 内有估计式 $|Q(x)|\leqslant n$ 成立.

证明　利用上一节问题的符号表示，若 $-x_1=x_n\leqslant x\leqslant x_1$，则

$$\sqrt{1-x^2}\geqslant\sqrt{1-x_1^2}=\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{1}{n}$$

于是断言对 $x_n\leqslant x\leqslant x_1$ 为真. 对于 $[-1,1]$ 的其余的点，我们把上一节问题中求出的 Lagrange 插值公式应用到多项式 Q

$$Q(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}Q(x_k)\frac{T_n(x)}{x-x_k}$$

因为不论 $x<x_n$ 还是 $x>x_1$，数 $x-x_k$ 都是同号的. 于是

$$|Q(x)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right|$$

但是

$$T_n(x)=2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

所以

$$\frac{T'_n(x)}{T_n(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$$

因此

$$|Q(x)|\leqslant\frac{1}{n}|T'_n(x)|$$

而且，由于 $x=\cos\theta$，有

$$T'_n(x)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

利用数学归纳法易验证，当 $-\infty<\theta<\infty$ 时，有 $|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$，因此

$$|T'_n(x)|\leqslant n^2$$

1. 多项式与三角多项式的导数增长的阶

我们已考虑了一系列正算子（伯恩斯坦多项式、费叶尔算子、用以证明杰克生定理的算子 $A_n(f,x)$ 等等），它们对恒等于 1 的函数时的值与这函数本身相合，$L(1,x)=1$. 对于一切这样的算子，不等式

$$|L(f,x)-f(x)|\leqslant 2M \tag{152}$$

成立，只要连续函数 $f(x)$ 有界，$|f(x)|\leqslant M$. 其实，由不等式

$$-M\leqslant f(t)\leqslant M$$

线性正算子的单调性以及由 $L(1,x)=1$，得到

$$-ML(1,x)=-M\leqslant L(f,x)\leqslant M;\ \|L_n(f,x)\|\leqslant M \quad ⑬$$

从而便推得不等式 ⑫.

设 $f(x)$ 为 n 阶三角多项式, $f(x)=\frac{a_n}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, $|f(x)|\leqslant M$ 并设 $F(n)(f,x)$ 为费叶尔算子,则

$$F_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$\frac{a}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$f(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

由这一等式以及不等式 ⑫ 得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|=n\mid F_n(f,x)-f(x)\mid\leqslant 2nM \quad ⑭$$

对于每一 n 阶三角多项式 $f(x)$ 我们令

$$f(x)=\frac{a}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$D_sf=\sum_{k=1}^{n}k^s(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

在这些记号下不等式 ⑭ 可以改写成:

$$\mid D_1F\mid\leqslant 2nM \quad ⑮$$

由于,显然, $D_{l+m}f=D_l(D_mf)$, 所以应用不等式 ⑮ 逐步得到

$$\mid D_2f\mid=\mid D_1(D_1f)\mid\leqslant 2n\cdot 2nM=2^2n^2M$$

$$\mid D_3f\mid=\mid D_1(D_2f)\mid\leqslant 2n\cdot 2^2n^2M=2^3n^3M,\cdots,\mid Df\mid\leqslant 2^sn^sM$$

运算 Df 在 s 为偶数情形与导数 $f^{(s)}(x)$ 相合或与它仅相差一符号.例如 $D_2f=-f''(x)$, $D_4f=f^{\mathrm{IV}}(x)$, $D_6f=-f^{\mathrm{VI}}(x)$ 等等.由此有

$$\mid f^{(s)}(x)\mid\leqslant 2^sn^sM \quad ⑯$$

只要 $f(x)$ 为 n 阶三角多项式, $|f(x)|\leqslant M$, s 为偶数.现在我们证明不等式 ⑯ 对奇数 s 的正确性.为此预先指出,函数 $|f'(x)|$ 在那样的点 z 取达最大值,于那里三角多项式 $f'(x)$ 有极大或极小,因而 $f''(z)=0$.令 $T(x)=f^2(x)-\frac{M^2}{2}$.在点 z 有等式

$$T''(z)=2f'^2(z)+2f(z)f''(z)=2f'^2(z) \quad ⑰$$

然 $T(x)$ 为 $2n$ 阶三角多项式,对于它不等式

$$-\frac{M^2}{2}\leqslant T(x)\leqslant M^2-\frac{M^2}{2}=\frac{M^2}{2},\quad \mid T(x)\mid\leqslant\frac{M^2}{2}$$

成立,只要 $|f(x)|\leqslant M$.由此以及由关系式 ⑯ 与 ⑰ 得到

$$\mid f'(x)\mid\leqslant\mid f'(z)\mid=\sqrt{\frac{1}{2}T''(z)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(2n)^2\cdot 2^2\cdot\frac{M^2}{2}}=2nM$$

于是,不等式⑯对于 $s=1$ 获证.由于奇阶导数为偶阶导数的一阶导数,所以不等式⑯对于一切正整数 s 都正确.于是我们证明了:

伯恩斯坦第一不等式　若 $f(x)$ 为 n 阶三角多项式,$|f(x)|\leqslant M$,则对于它的导数,不等式⑯成立.

附注　刚才这里所用的证明白恩斯坦不等式的方法是头一个证法.用其他方法可以证明不等式成立且无因子 2^s 出现①.

转向代数多项式的导数增长状态的研究.设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为在区间 $[a,b]$ 上满足不等式 $|P(x)|\leqslant M$ 的 n 次代数多项式.令 $T(\theta)=P(x)$,这里 $x=\frac{1}{2}\{(b-a)\cos\theta+(b+a)\}$.$T(\theta)$ 为 n 阶偶三角多项式,且由于 θ 由 $-\pi$ 变到 π 时量 x 由 a 变到 b,所以 $|T(\theta)|\leqslant M$.据伯恩斯坦第一不等式有

$$|T'(\theta)|=|P'(x)|\frac{b-a}{2}|\sin\theta|\leqslant 2nM \tag{158}$$

但 $\frac{b-a}{2}\cos\theta=x-\frac{a+b}{2}$,因而

$$\frac{b-a}{2}|\sin\theta|=\left\{\left(\frac{b-a}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\theta\right)\left(\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\theta\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(b-x)(x-a)}$$

考虑到这一点与不等式⑱,得到

$$|P'(x)|\leqslant\frac{2nM}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{159}$$

函数 $\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ 在区间 $[a',b']$,$a<a'<b'<b$ 上有界,因而在这区间上不等式

$$|P'_n(x)|<cnM \tag{160}$$

成立,并且常数 c 与 n 无关,而只依赖于量 $a'-a>0$ 与 $b-b'>0$.现在已经容易在对多项式 $P(x)$ 所作的假定之下证明不等式②

$$|P^{(m)}(x)|\leqslant Dn^mM,\quad a'\leqslant x\leqslant b' \tag{161}$$

其中常数 D 与 n 无关.其实,对于 $m=1$ 这不等式已经证明了.假定它对于 $m=k$ 为真,亦即假定 $|P^{(k)}(x)|\leqslant c'n^kM$,$a''\leqslant x\leqslant b''$,这里数 a'' 与 b'' 这样地选择,使得 $a<a''<a'<b'<b''<b$.利用这一假设与不等式⑯,得到

$$|P^{(k+1)}(x)<c''nc'n^kM=Dn^{k+1}M,\quad a'\leqslant x\leqslant b'$$

这便证明了不等式⑯以及

伯恩斯坦第二不等式　若 $P(x)$ 为 n 次代数多项式,$|P(x)|\leqslant M$,$a\leqslant x\leqslant b$,则在区间 $[a',b']$ 上,这里 $a<a'<b'<b$,不等式⑯成立,那里常数 D 与 n 无关.

---

① 例如,参看 И.П.纳唐松,函数构造论,上册(科学出版社,1958),第96页——译者注.

② 参看 С.Н.Бернштейн,Собрание Сочинений, I(1952),[3]第27页——译者注.

资料包

2. 函数的可微性质的表征

设 $f(x)$ 为连续的周期函数并设 $t_n(x)=t_n(f,x)$ 为与 $f(x)$ 有最小偏差的三角多项式. 我们假定, 数 $E_n(f)$ 满足不等式

$$E_n(f)=\|f-t_n\|\leqslant\frac{A}{n^{\alpha}},n=1,2,\cdots,0<\alpha<1 \tag{162}$$

我们证明, 只要 $|x-y|\leqslant\delta$ 与 $\frac{1}{2^m}\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$ 则这时不等式

$$|t_2m(x)-t_2m(y)|\leqslant c'\delta^{\alpha} \tag{163}$$

成立.

为此我们令

$$u_0(x)=t_1(x),u_k(x)=t_2^k(x)-t_2^{k-1}(x),k=1,2,\cdots$$

考虑到不等式 ⑯②, 对于 $k=1,2,3,\cdots$, 得到

$$\begin{aligned}|u_k(x)|&=|t_2^k(x)-f(x)+f(x)-t_2^{k-1}(x)|\leqslant\\&|t_2^k(x)-f(x)|+|f(x)-t_2^{k-1}(x)|=\\&E_2^k(f)+E_2^{k-1}(f)\leqslant\frac{A}{2^{k\alpha}}+\frac{A}{2^{(k-1)}\alpha}<\frac{3A}{2^{k\alpha}}\end{aligned} \tag{164}$$

对于 $k=0$ 这个估值可能是不对的. 但

$|u_0(x)|=|t_1(x)|=|t_1(x)-f(x)+f(x)|\leqslant|t_1(x)-f(x)|+|f(x)|\leqslant A+M$ 其中 $M=\max|f(x)|$, 因而若把常数 A 增大以致不等式 $2A\geqslant M$ 成立, 则不等式 ⑯④ 将对于 $k=0$ 情形也适用. 假定如此并利用伯恩斯坦第一不等式(三角多项式 $u_k(x)$ 的阶不超过 2^k), 得到

$$|u'_k(x)|=2\cdot2^k\cdot\frac{3A}{2^{k\alpha}}=6A\cdot2^{k(1-\alpha)} \tag{165}$$

迄今为止我们都是着眼于多项式 $u_k(x)$ 的讨论. 回到多项式 $t_2^m(x)$, 首先我们指出

$$\begin{aligned}t_2^m(x)&=\{t_2^m(x)-t_2^{m-1}(x)\}+\{t_2^m(x)-t_2^{m-2}(x)\}+\cdots+\\&\{t_2(x)-t_1(x)\}+t_1(x)=u_m(x)+u_{m-1}(x)+\cdots+\\&u_1(x)+u_0(x)=\sum_{k=0}^{m}u_k(x)\end{aligned}$$

因而

$$t_2^m(x)-t_2^m(y)=t'^m_2(z)(x-y)=(x-y)\sum_{k=0}^{m}u'_k(z),\quad z\in[x,y]$$

从而并由 ⑯⑤ 推出

$$\begin{aligned}|t_2^m(x)-t_2^m(y)|&\leqslant|x-y|\left|\sum_{k=0}^{m}u'_k(z)\right|\leqslant6A|x-y|\sum_{k=0}^{m}2^{k(1-\alpha)}=\\&6A|x-y|\frac{2^{(m+1)(1-\alpha)}-1}{2^{1-\alpha}-1}<6A\frac{2^{(m+1)(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}\end{aligned} \tag{*}$$

最后, 注意到后一不等式以及 $|x-y|\leqslant\delta,2^{m-1}\leqslant\frac{1}{\delta}$, 得到

$$|t_2^m(x)-t_2^m(y)|<6A\delta\frac{2^{2(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}\delta^{\alpha-1}=c'\delta^{\alpha}$$

其中假定了 $c'=6A\frac{4^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}$. 于是,不等式(111)获证.

伯恩斯坦第一定理　若对于连续的周期函数 $f(x)$ 不等式 ⑯② 满足,则函数 $f(x)$ 属于类 Lipsα.

证　有

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|=&|f(y)-t_2^m(y)+t_2^m(y)-t_2^m(x)+t_2^m(x)-f(x)|\leqslant\\&|f(y)-t_2^m(y)|+|t_2^m(y)-t_2^m(x)|+|t_2^m(x)-f(x)|\leqslant\\&2E_2^m(f)+|t_2^m(y)-t_2^m(x)|\end{aligned}$$

这一不等式对任何值 m 都成立. 现在,认为 $|x-y|\leqslant\delta,\delta\leqslant\frac{1}{2}$,我们取这样的 m,使得不等式$\frac{1}{2^m}\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$ 满足. 这时由后一不等式及不等式 ⑯② 与 ⑯③ 便得到

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\frac{2A}{2^{m\alpha}}+c'\delta^{\alpha}\leqslant(2A+c')\delta^{\alpha}=D\delta^{\alpha}$$

这不等式对于 $\delta\leqslant\frac{1}{2}$ 已证明了. 但如果 $\delta\geqslant\frac{1}{2}$,则

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant 2^{n}\cdot 2M$$

这里 $M=\|f\|$,因而,取 S 为数 D 与 $2^{\alpha+1}M$ 中的较大者便得到定理.

伯恩斯坦第二定理　若对于周期函数 $f(x)$ 不等式

$$E_n(f)=\|f-t_n\|\leqslant\frac{A}{n^{k+\alpha}} \tag{166}$$

成立,其中 k 为自然数且 $0<\alpha<1$,则函数 $f(x)$ 为 k 次可微且 $f^{(k)}(x)$ 属于类 Lipsα.

证明　如以前一样,令

$$u_0(x)=t_1(x),u_k(x)=t_2^k(x)-t_2^{k-1}(x),k=1,2,\cdots$$

前面曾证明

$$t_2^m(x)=\sum_{v=0}^{\infty}u_v(x)$$

因而由 $t_2^m(x)\to f(x)$,知

$$f(x)=\sum_{v=0}^{\infty}u_v(x)$$

成立. 我们证明,从上述级数微分 k 次所得级数

$$\sum_{v=0}^{\infty}u_v^{(k)}(x) \tag{167}$$

一致收敛. 其实,根据伯恩斯坦第一不等式由不等式

$$\begin{aligned}|u_v(x)|\leqslant&|f(x)-t_2^v(x)|+|f(x)-t_2^{v-1}(x)|\leqslant\\&E_2^v(f)+E_2^{v-1}(f)<\frac{A+A\cdot 2^{k+\alpha}}{2^{v(k+\alpha)}}=\frac{B}{2^{v(k+\alpha)}}\end{aligned}$$

得到

$$|u_v^{(k)}(x)| \leqslant 2^k \cdot 2^{vk} \frac{B}{2^{v(k+\alpha)}} = 2^k \frac{B}{2^{v\alpha}} = \frac{C}{2^{v\alpha}}$$

从而推得级数 ⑯⑦ 的一致收敛性以及等式

$$f^{(k)}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v^{(k)}(x)$$

剩下来要证明函数 $f^{(k)}(x)$ 属于类 Lipsα. 显然,为此只需证明对于函数 $f^{(k)}(x)$ 的伯恩斯坦第一定理的条件满足即可. 设 n 为自然数. 取这样的一个自然数 m,使它满足不等式

$$2^{m-1} \leqslant n \leqslant 2^m$$

我们有

$$\begin{aligned} E_n = (f^{(k)}) &= \| f^{(k)}(x) - t_n(f^{(k)}, x) \| \leqslant \\ &\left\| f^{(k)}(x) - \sum_{v=0}^{m-1} u_v^{(k)}(x) \right\| = \\ &\left\| \sum_{v=m}^{\infty} u_v^{(k)}(x) \right\| \leqslant \sum_{v=m}^{\infty} \| u_v^{(k)}(x) \| \end{aligned}$$

(多项式 $u_{m-1}(x)$ 的阶不大于 $2^{m-1} \leqslant n$) 利用以前对于 $u_v^{(k)}(x)$ 所得的估值,得到

$$E_n(f^{(k)}) \leqslant \sum_{v=m}^{\infty} \frac{C}{2^{v\alpha}} = \frac{2^{\alpha}C}{2^{\alpha}-1} \frac{1}{2^{m\alpha}}$$

记住 $\frac{1}{2^m} \leqslant \frac{1}{n}$,并设 $C' = \frac{2^{\alpha}C}{2^{\alpha}-1}$,得到

$$E_n(f^{(k)}) \leqslant \frac{C'}{n^{\alpha}}$$

由这不等式与第一定理推得第二定理.

14 多元逼近

某些二维区域上的最小零偏差多项式:

用 P_n 表示所有次数 $\leqslant n$ 的二元实系数多项式做成的线性空间. $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域. 若 $p^*(x, y)$ 是函数 $x^m y^n$ 在 p_{m+n-1} 中在区域 D 上的最佳逼近多项式,即

$$\| x^m y^n - p^*(x, y) \| = \inf_{p \in P_{m+n-1}} \| x^m y^n - p(x, y) \|$$

则称 $x^m y^n - p^*(x, y)$ 是区域 D 上以 $x^m y^n$ 为首项的最小零偏差多项式,并称

$$e_{m,n} = \max_{(x,y) \in D} | x^m y^n - p^*(x, y) |$$

为最小零偏差.

在这里我们仅能针对三角形区域

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant -1, y \geqslant -1, x + y \leqslant 0\}$$

和圆域

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

资料包

下面介绍最小零偏差多项式的表达式：

定理 21 对于 $\forall m,n\in\mathbf{N}$,有

$$B_{m,n}(x,y)=\prod_{i=1}^{m}\left(x+\cos\frac{2i-1}{2(m+n)}\pi\right)\prod_{j=1}^{n}\left(y+\cos\frac{2j-1}{2(m+n)}\pi\right) \quad ⑯⑧$$

是三角形区域 B 上的以 x^my^n 为首项的最小零偏差多项式. 对应的最小零偏差为 $\min(2^{-m-n+1},1)$.

定理 22 对于 $\forall m,n\in\mathbf{N}$,有

$$C_{m,n}(x,y)=\prod_{i=1}^{m}\left(x+\sin\frac{2i-m-1}{2(m+n)}\pi\right)\prod_{j=1}^{n}\left(y+\sin\frac{2j-n-1}{2(m+n)}\pi\right)$$

是区域 C 上以 x^my^n 为首项的最小零偏差多项式,其最小零偏差是 $\min(2^{-m-n+1},1)$.

证明参见梁学章,李强编著的《多元逼近》,国防工业出版社,p54 ~ 62.

15 多元逼近问题中的未解决问题

令 D 是一个在 (x,y) 一平面中具有光滑边界的有界闭区域,$f(x,y)$ 是一个在 D 中具有连续二阶偏导数的函数,这个函数在 D 的

$$N=(\mu+1)(\gamma+1)+1 \quad ⑯⑨$$

个不同点上的值通过观测得知,这些点表为 $P_j=(x_j,y_j)\in D$,设

$$\pi_{\mu\gamma}(x,y)=\sum_{l_1=0}^{\mu}\sum_{l_2=0}^{\gamma}c_{l_1l_2}x^{l_1}y^{l_2} \quad ⑰⓪$$

是一个具有性质

$$\pi_{\mu\gamma}(x_j,y_j)=\pi_{\mu\gamma}(p_j)=f(p_j)\quad j=1,2,\cdots,n \quad ⑰①$$

的多项式.

现在选择这些点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 使得这个方程组的行列式 $\Delta(p_1,\cdots,p_n)$ 为最大

$$|\Delta(p_1,\cdots,p_n)|=\max_{a_1,\cdots,a_n\in D}|\Delta(Q_1,\cdots,Q_n)| \quad ⑰②$$

容易看到,⑰② 中这个根大值是正的. 对于点 p_k 的这种选择,多项式 ⑰⓪ - ⑰① 是唯一确定的. 设 $p=(x,y)$,我们有

$$\pi_{\mu\gamma}(p)=\sum_{j=1}^{n}f(p_j)\cdot\frac{\Delta(p_1,\cdots,p_{j-1},p_{j+1},\cdots,p_n)}{\Delta(p_1,\cdots,p_n)}\xlongequal{\Delta}\sum_{j=1}^{n}f(p_j)l_j(p,p_1,\cdots,p_n)$$

设 $\pi^*_{\mu\gamma}(p,f,D)$ 是 f 在 D 中的次数 $\leqslant\mu$ 和 $\leqslant\gamma$ 的最佳逼近多项式. 因为,显然

$$\sum_{j=1}^{n}\pi^*_{\mu\gamma}(p_j)l_j(p,p_1,\cdots,p_n)=\pi^*_{\mu\gamma}(p) \quad ⑰④$$

我们有

$$\pi_{\mu\gamma}(p)-\pi^*_{\mu\gamma}(p,f,D)=\sum_{j=1}^{n}f(p_j)-\pi^*_{\mu\gamma}(p_j)l_j(p,p_1,\cdots,p_n) \quad ⑰⑤$$

令

$$\max_{p\in D}|f(p)-\pi^*_{\mu\gamma}(p)|\xlongequal{\text{def}}d_{\mu\gamma}(f,D) \quad ⑰⑥$$

于是

$$|\pi_{\mu\gamma}(p)-f(p)|\leqslant|\pi_{\mu\gamma}(p)-\pi_{\mu\gamma}^{*}(p)|+|\pi_{\mu\gamma}^{*}(p)-f(p)|\leqslant$$
$$d_{\mu\gamma}(f,D)\times(1+\sum_{j=1}^{n})|l_j(p,p_1,\cdots,p_n)| \qquad ⑰$$

因为由 ⑬ 式可知

$$|l_j(p,p_1,\cdots,p_n)|\leqslant 1\quad j=1,\cdots,n \qquad ⑱$$

从而

$$|f(p)-\pi_{\mu\gamma}(p)|\leqslant(n+1)d_{\mu\gamma}(f,D) \qquad ⑲$$

对于不太大的 μ 和 γ 的值，点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 可以用数值方法确定.

进一步的研究可见 Journal of Approximation Theory, vol 29. No. 1, May 1980, pp. 23 ~ 82.

16　非线性 Tchebycheff 逼近

设 $f(x)$ 与 $F(A,x)$ 为给定的两个实连续函数. 其中 $x\in M, A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D$. M 表示实轴上的某个有界闭集，D 是 n 维欧氏空间中的子集. Tchebycheff 逼近问题就是在 D 中确定 $A^*\in D$，使对一切 $A\in D$. 有

$$\rho^*=\max_{x\in M}|F(A^*,x)-f(x)|\leqslant\max_{x\in M}|F(A,x)-f(x)|$$

这时，$F(A^*,x)$ 称为 $f(x)$ 在 $F(A,x)$ 中的最优逼近，ρ^* 称为 $f(x)$ 用 $F(A,x)$ 逼近的最小偏差.

关于线性 Tchebycheff 逼近（$F(A,x)$ 对于参数 A 的依赖为线性情形）的理论早已相当成熟和完善. 在计算上也已给出了一些较为有效的算法. 但对非线性 Tchebycheff 逼近，要想一般的进行研究，仍有许多困难. T. S. Motzkim 和 L. Tornheim 引进的所谓“单解 (unisolvence) 函数族”的概念就是一个著名的例子. 一个连续函数族类 $F(A,x)(A\in D, x\in M)$ 是单解的. 如果：

① 对于任给的 n 对数 $(\xi_i,\eta_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 方程组

$$F(A,\xi_i)=\eta_i\qquad i=1,2,\cdots,n$$

总有解 $A\in D$（所谓有解性）. 其中 ξ_i 是包含 M 的最小闭区间 $I(M)$ 中任意给定的点.

② 任意两个相异函数 $F(A',x)$ 与 $F(A'',x)$ 之差在 $I(M)$ 中至多有 $n-1$ 零点.（包括计算重数在内，即两边差值不变号的零点算作两个零点.）由此立即推知 ① 的解是唯一的（所谓单解性）.

对于单解函数族 $F(A,x)$ 已经证明了如下定理：

定理 23　$f(x)$ 在 $F(A,x)$ 中的最优逼近是存在的.

定理 24　$f(x)$ 在 $F(A,x)$ 中的最优逼近是唯一的.

定理 25　$F(A^*,x)$ 是 $f(x)$ 在 $F(A,x)$ 中的最优逼近，其充要条件是在 M 中至少有 $n+1$ 个点（称为偏差点）正负交替地取值 $\max_{x\in M}|F(A^*,x)-f(x)|$.

1983 年何新贵得到类似 Vullée-poussin 定理：

定理 26 对 $\forall A \in D$,若

$$F(A,x_i) - f(x_i) = (-1)^i \rho_i \qquad i = 1,2,\cdots,n+1$$

其中 ρ_i 或为零或为同号的数,则最小偏差 ρ^* 满足

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |\rho_i| \leqslant \rho^* \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |\rho_i|$$

其中两处等号当且仅当

$$|\rho_1| = |\rho_2| = \cdots = |\rho_{n+1}| = \rho^*$$

时成立.

定理 27 函数 $f(x)$ 在整个集合 M 上的最优逼近正好是 $f(x)$ 在使偏差达到最大的 $n+1$ 个点上的最优逼近.

17 巴拿赫空间中的切比雪夫多项式

一个相关的有趣问题是寻求 Markov 定理在 Banach 空间中的类似结果,即寻求最小数 $M_{n,k}$,具有下述性质:若 P 是阶数 $\leqslant n$ 的任何多项式,把一个实赋范线性空间映入另一个实赋范线性空间,则

$$\sup \| \hat{D}^k P(x) \| \leqslant M_{n,k} \sup \| (x) \|$$

这里,$\hat{D}^K P(x) y = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} P(x+ty) \|_{t=0}$.容易证明

$$T_n^{(k)}(1) \leqslant M_{n,k} \leqslant 2^{2k-1} T_n^{(k)}(1) \tag{180}$$

这里 T_n 是 n 阶 Chebyshev 多项式.事实上,令 P 是实赋范线性空间上阶数 $\leqslant n$ 的任何实值多项式,假设 $\|x\| \leqslant 1$ 蕴涵 $|P(x)| \leqslant 1$.令

$$\|x\| \leqslant 1, \quad \|y\| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1$$

定义 $q(t) = P(\psi(t))$,这里 $\psi(t) = [x - sy + t(x+sy)]/2$.注意,当 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 时 $\|\psi(t)\| \leqslant (1+t)/2 + (1-t)/2 = 1$.因此 q 是阶数 $\leqslant n$ 的多项式,当 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 时满足 $|q(t)| \leqslant 1$,从而 $|q^k(1)| \leqslant |T^k(1)|$,显然,$q^k(1) = 2^{-k}\hat{D}^K P(x)(x+sy)$.因此,映像 $s \to \hat{D}^k(x+sy)$ 是阶数 $\leqslant k$ 的多项式,在 $[-1,1]$ 上以 $2^k T_n^{(k)}(1)$ 为界,$\hat{D}^k P(x) y$ 是这个多项式中 2^k 的系数.从而,得

$$|\hat{D}^k P(x) y| \leqslant 2^{k-1}[2^k T_n^{(k)}(1)]$$

再由 Hahn-Banach 定理便推出 ⑱⓪.

注意,只考虑 l_2^1 上的实值多项式时,$M_{n,k}$ 的值是不变的.只考虑实 Hilbert 空间时,$M_{n,1} = n^2$,这时,对于 $1 \leqslant K \leqslant n$,考虑是否有 $M_{n,k} = T_n^{(k)}(1)$ 是一个有意思的问题,参见[17].

18　FIR 数字滤波器设计的切比雪夫逼近法[①②]

前面几节所介绍的均为在纯数学方面切比雪夫多项式的应用，实际上在许多应用领域它也有意想不到的应用．FIR 数字滤波器设计有两种常用方法：傅里叶级数法（窗函数法）和频率抽样法，用这两种方法设计出的滤波器的频率特性都是在不同意义上对所给理想频率特性 $H_d(e^{j\omega})$ 的逼近．从数值逼近的理论来看，对某个函数 $f(x)$ 的逼近一般有三种方法：① 插值法；② 最小平方逼近法；③ 最佳一致逼近法．

所谓插值，即寻找一 n 阶多项式（或三角多式项式）$p(x)$，使它在 $n+1$ 个点 x_0，$x_1,\cdots,x_n$ 处满足

$$p(x_k)=f(x_k),k=0,1,\cdots,n$$

在非插值点上，$p(x)$ 是 $f(x_k)$ 的某种组合．当然，在非插值点上，$p(x)$ 和 $f(x)$ 存在有一定的误差．频率抽样法可以看做为插值法，它在抽样点 ω_k 上保证了 $H(e^{j\omega_k})=H_d(e^{j\omega_k})$，而在非抽样点上，$H(e^{j\omega})$ 是插值函数 $S(\omega,k)$ 的线性组合，其权重是 $H_d(e^{j\omega_k})$．这种设计方法的缺点是通带和阻带的边缘不易精确地确定．

资料包

最小平方逼近是在所需要的范围内，如区间 $[a,b]$，使积分 $\int_a^b[p(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为最小．这种设计方法是着眼于使整个区间 $[a,b]$ 内的总误差为最小，但它并不一定能保证每个局部位置误差都最小．实际上，在某些位置上，有可能存在着较大的误差．傅里叶级数法就是一种最小平方逼近法．该方法在间断点处出现了较大的过冲（Gibbs 现象）．为了减小这种过冲和欠冲，采用了加窗口的方法，当然，加窗以后的设计法，已不再是最小平方逼近．

最佳一致逼近法，是着眼于在所需要的区间 $[a,b]$ 内，使误差函数

$$E(x)=|p(x)-f(x)|$$

较均匀一致，并且通过合理地选择 $p(x)$，使 $E(x)$ 的最大值 E_n 达到最小．切比雪夫逼近理论解决了 $p(x)$ 的存在性、惟一性及如何构造等一系列问题．

McClellan J. H, Parks T. W 和 T. W 和 Rabiner L. R 等人应用切比雪夫逼近理论，提出了一种 FIR 数字滤波器的计算机辅助设计方法．这种设计方法由于是在一致意义上对 $H_d(e^{j\omega})$ 作最佳逼近，因而获得了较好的通带和阻带性能，并能准确地指定通带和阻带的边缘，是一种有效的设计方法．

一、切比雪夫最佳一致逼近原理

切比雪夫最佳一致逼近的基本思想是，对于给定区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，在所有 n 次多项式的集合 $\mathscr{P}_n$ 中，寻找一多项式 $\hat{p}(x)$，使它在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 的偏差和其

① 本节选自胡广书《数字信号处理》，清华大学出版社，2003 年，北京，P313 ~ 321．

② 切比雪夫多项式应用广泛．康托洛维奇将其应用于统计标志的振动（变异）、广分布曲线的系数、置信度、复回归与曲线方程以及统计参数的误差和平方近似值．

一切属于 $\mathscr{P}_n$ 的多项式 $p(x)$ 对 $f(x)$ 的偏差相比是最小的，即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\hat{p}(x)-f(x)| = \min\{\max_{a\leqslant x\leqslant b} |p(x)-f(x)|\}$$

切比雪夫逼近理论指出，这样的多项式 $\hat{p}(x)$ 是存在的，且是惟一的，并指出了构造这种最佳一致逼近多项式的方法，这就是有名的"交错点组定理"，该定理可描述如下：

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，$p(x)$ 为 $\mathscr{P}_n$ 中一个阶次不超过 n 的多项式，并令

$$E_n = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |p(x)-f(x)|$$

及

$$E(x) = p(x) - f(x)$$

$p(x)$ 是 $f(x)$ 最佳一致逼近多项式的充要条件是，$E(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少存在 $n+2$ 个交错点 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}\leqslant b$，使得

$$E(x_i) = \pm E_n,\qquad i=1,2,\cdots,n+2$$

且

$$E(x_i) = -E(x_{i+1}),\qquad i=1,2,\cdots,n+2$$

这 $n+2$ 个点即是"交错点组"，显然 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+2}$ 是 $E(x)$ 的极值点.

n 阶切比雪夫多项式

$$C_n(x) = \cos(n\arccos x),\qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

在区间 $[-1,1]$ 上存在 $n+1$ 个点 $x_k=\cos\left(\frac{\pi}{n}k\right)$，$k=0,1,\cdots,n$，轮流使得 $C_n(x)$ 取得最大值 $+1$ 和最小值 -1. $C_n(x)$ 是 x 的多项式，且最高项 x^n 的系数是 2^{n-1}，可以证明，在所有 n 阶多项式中，多项式 $C_n(x)/2^{n-1}$ 和 0 的偏差为最小. 这样，如果我们在寻找 $p(x)$ 时，能使误差函数为某一个 $C_n(x)$，那么，这样的 $p(x)$ 将是对 $f(x)$ 的最佳一致逼近.

二、利用切比雪夫逼近理论设计 FIR 数字滤波器

设所希望的理想频率响应是

$$H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \begin{cases}1 & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_p\\ 0 & \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases} \qquad ⑱①$$

式中 ω_p 为通带频率，ω_s 为阻带频率. 现在的任务是，寻找一 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，使其在通带和阻带最佳地一致逼近 $H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$. 图 1 给出了对理想频率响应逼近的示意图，图中，δ_1 为通带纹波峰值，δ_2 为阻带纹波峰值. 这样，对设计的低通数字滤波器 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，共提出了 5 个参

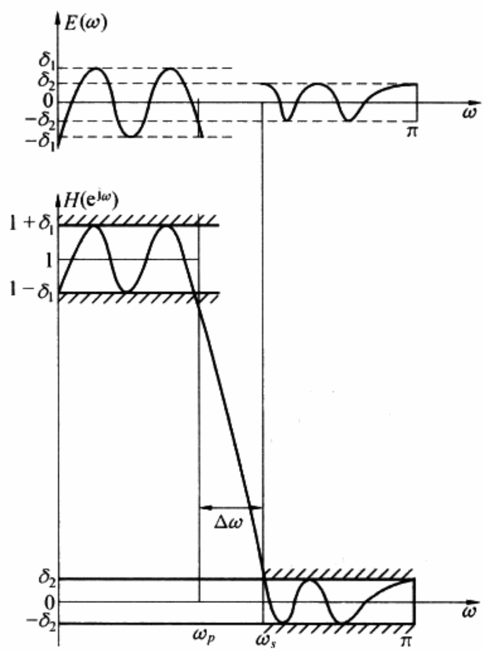


图 1　低通数字滤波器的一致逼近

数，即 $\omega_p,\omega_s,\delta_1,\delta_2$ 和相应的单位抽样响应的长度 N. 根据上述交错点组定理，可以想象，如果 $H(e^{j\omega})$ 是对 $H_d(e^{j\omega})$ 的最佳一致逼近，那么 $H(e^{j\omega})$ 在通带和阻带内应具有如图所示的等纹波性质，所以最佳一致逼近有时又称等纹波逼近.

为了讨论方便，现在先假设 $h(n)$ 为偶对称，N 为奇数，则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2}H_g(e^{j\omega}) \tag{182}$$

式中

$$H_g(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M}a(n)\cos(n\omega),\quad M=(N-1)/2 \tag{183}$$

令 B_p 代表通带 $(0\sim\omega_p)$ 上的频率，B_s 代表阻带 $(\omega_s\sim\pi)$ 上的频率. 并令 $F=B_p\cup B_s$，代表定义在频率范围 $(0\sim\pi)$ 上的频率集合的一个子集，再定义加权函数

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases}1/k & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_p,\ k=\delta_1/\delta_2\\ 1 & \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases} \tag{184}$$

记误差函数

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})[H_g(e^{j\omega})-H_d(e^{j\omega})] = W(e^{j\omega})\left[\sum_{n=0}^{M}a(n)\cos(n\omega)-H_d(e^{j\omega})\right] \tag{185}$$

这样，用 $H_g(e^{j\omega})$ 一致逼近 $H_d(e^{j\omega})$ 的问题可表述为：寻求系数 $a(n)$，$n=0,\cdots,M$，使加权误差函数 $E(e^{j\omega})$ 的最大值为最小.

上式中使用加权函数 $W(e^{j\omega})$，是考虑在设计滤波器时对通带和阻带常要求不同的逼近精度，故乘以不同的加权函数，这种逼近又称加权切比雪夫一致逼近. 为了书写的方便，下面把 $e^{j\omega}$ 的函数都改写为 ω 的函数.

由交错点组定理可知，$H_g(\omega)$ 在子集 F 上是对 $H_d(\omega)$ 惟一最佳一致逼近的充要条件是，误差函数 $E(\omega)$ 在 F 上至少呈现 $M+2$ 个“交错”，使得

$$|E(\omega_i)| = |-E(\omega_{i+1})| = E_n$$

其中

$$E_n = \max_{\omega\in F}|E(\omega)|$$

且

$$\omega_0<\omega_1<\cdots<\omega_{M+1},\omega\in F$$

如果我们已经知道了在 F 上的 $M+2$ 个交错频率，即 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$，由 ⑱⑤ 式，有

$$W(\omega_k)\left[H_d(\omega_k)-\sum_{n=0}^{M}a(n)\cos(n\omega_k)\right] = (-1)^k\rho,\quad k=0,1,\cdots,M+1 \tag{186}$$

式中

$$\rho = E_n = \max_{\omega\in F}|E(\omega)|$$

⑱⑥ 式可写成矩阵形式，并将 $a(n)$ 写成 a_n，则有

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \cos(2\omega_0) & \cdots & \cos(M\omega_0) & \dfrac{1}{W(\omega_0)} \\ 1 & \cos\omega_1 & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos(M\omega_1) & \dfrac{-1}{W(\omega_1)} \\ 1 & \cos\omega_2 & \cos(2\omega_2) & \cdots & \cos(M\omega_2) & \dfrac{1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\omega_M & \cos(2\omega_M) & \cdots & \cos(M\omega_M) & \dfrac{(-1)^M}{W(\omega_M)} \\ 1 & \cos\omega_{M+1} & \cos(2\omega_{M+1}) & \cdots & \cos(M\omega_{M+1}) & \dfrac{(-1)^{M+1}}{W(\omega_{M+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(\omega_0) \\ H_d(\omega_1) \\ H_d(\omega_2) \\ \vdots \\ H_d(\omega_M) \\ H_d(\omega_{M+1}) \end{bmatrix} \quad ⑱⑦$$

上式的系数矩阵是$(M+2)\times(M+2)$的方阵，它是非奇异的．解此方程组，可惟一地求出系数 $a_0,a_1,\cdots,a_M$ 及偏差ρ，这样最佳滤波器 $H(e^{j\omega})$ 便可构成．

但是，这样做在实际上存在着两个困难．一是交错点组 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_M$ 事先并不知道，当然也就无法求解 ⑱⑦ 式，确定一组交错点组并非易事，即使对于较小的 M 也是如此．二是直接求解方程组 ⑱⑦ 比较困难．为此，McClallan J H 等人利用数值分析中的 Remez 算法，靠一次次的迭代来求得一组交错点组，而且在每一次迭代过程中避免直接求解 ⑱⑦ 式．现把该算法的步骤归纳如下．

第一步，首先在频率子集 F 上等间隔地取$M+2$个频率 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$，作为交错点组的初始猜测位置，然后按公式

$$\rho = \frac{\sum_{k=0}^{M+1}\alpha_k H_d(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{M+1}(-1)^k\alpha_k/W(\omega_k)} \quad ⑱⑧$$

计算 ρ，式中

$$\alpha_k = (-1)^k\prod_{i=0,i\neq k}^{M+1}\frac{1}{\cos\omega_i-\cos\omega_k} \quad ⑱⑨$$

把 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$ 代入上式，可求出 ρ，它是相对第一次指定的交错点组所产生的偏差，实际上就是 δ_2．求出 ρ 以后，利用重心形式的拉格朗日插值公式，可以在不求出 $a_0,\cdots,a_M$ 的情况下，得到一个$H_g(\omega)$，即

$$H_g(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M}\left(\dfrac{\beta_k}{\cos\omega-\cos\omega_k}\right)C_k}{\sum_{k=0}^{M}\dfrac{\beta_k}{\cos\omega-\cos\omega_k}} \quad ⑲⓪$$

式中

$$C_k = H_d(\omega_k)-(-1)^k\frac{\rho}{W(\omega_k)},\quad k=0,1,\cdots,M \quad ⑲①$$

$$\beta_k = (-1)^k\prod_{i=0,i\neq k}^{M}\frac{1}{(\cos\omega_i-\cos\omega_k)} \quad ⑲②$$

把 $H_g(\omega)$ 代入 ⑱⑤ 式,可求得误差函数 $E(\omega)$. 如果在子集 F 上,对所有的频率 ω,都有 $|E(\omega)| \leqslant |\rho|$,这说明,$\rho$ 是纹波的极值,初始猜定的 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$ 恰是交错点组. 这时,设计工作即可结束. 当然,对第一次猜测的位置,不会恰好如此. 一般,在某些频率处,总有 $E(\omega) > |\rho|$,这说明,需要交换上次猜测的交错点组中的某些点,得到一组新的错点组.

第二步,对上次确定的交错点组 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$ 中的每一个点,都在其附近检查是否在某一个频率处有 $|E(\omega)| > \rho$,如若有,再在该点附近找出局部极值点,用这一局部极点代替原来的点. 待这 $M+2$ 个点都检查过后,便得到一组新的交错点组 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$,再次利用 ⑱⑧ ~ ⑲② 式求出 $\rho,H_g(\omega)$ 和 $E(\omega)$,这样就完成一次迭代,也即完成了一次交错点组的交换. 通过交换算法,使得这一次的交错点组中的每一个 ω_i 都是由上一次的交错点组所产生的 $E(\omega)$ 的局部极值频率点,因此,用这次的交错点组求出的 ρ 将增大.

第三步,利用和第二步相同的方法,把在各频率处使 $|E(\omega)| > \rho$ 的点作为新的局部极值点,从而又得到一组新的交错点组.

重复上述步骤. 因为新的交错点组的选择都是作为每一次求出的 $E(\omega)$ 的局部极值点,因此,在迭代中,每次的 $|\rho|$ 都是递增的. ρ 最后收敛到自己的上限,也即 $H_g(\omega)$ 最佳地一致逼近 $H_d(\omega)$ 的解. 因此,若再迭代一次,新的误差曲线 $E(\omega)$ 的峰值将不会大 $|\rho|$,这时迭代即可结束. 由最后的交错点组可按 ⑲⓪ 式得到 $H_g(\omega)$,将 $H_g(\omega)$ 再附上 ⑱② 式的线性相位后作逆变换,便可得到单位抽样响应 $h(n)$.

由于按 ⑱④ 式定义了 $W(\omega)$,因此最后求出的 ρ 即是阻带的峰值偏差 δ_2,而 $k\delta_2$ 便是通带的峰值偏差. 由上面的讨论可以看出,交错点数 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{M+1}$ 是限制在通带和阻带内的. 因而,上述方法是在通带和阻带内对 $H_d(\omega)$ 的最佳一致逼近,而对过渡带($\omega_p \sim \omega_s$)内的逼近偏差没提出要求. 过渡带内的 $H_g(\omega)$ 曲线是由通带和阻带内的交错点组插值产生的. 对通带和阻带内的逼近误差 δ_1,δ_2 不需事先指定,而是由切比雪夫最佳一致逼近理论保证了逼近的最大偏差为最小. 因 ω_p 和 ω_s 在每一次的迭代过程中都始终是对应的极值频率点,所以这种设计方法仅需指定 N,k,ω_p 和 ω_s 这 4 个参数,因而通带和阻带的边缘可准确地确定. 图 2 给出了上述算法的流程图.

三、误差函数 $E(\omega)$ 的极值特性

前文已指出,为保证 $H_g(\omega)$ 是对 $H_d(\omega)$ 的最佳一致逼近,误差函数 $E(\omega)$ 必须呈现 $M+2$ 个"交错",即 $E(\omega)$ 至少必须有 $M+2$ 个极值,且交替改变符号. 由于 $E(\omega) = W(\omega)|H_g(\omega) - H_d(\omega)|$,而 $W(\omega)$ 和 $H_d(\omega)$ 都是常数,所以 $E(\omega)$ 的极值也是 $H_g(\omega)$ 的极值. 讨论一下 $H_g(\omega)$ 的极值特性对于我们理解前述算法是很有帮助的. ⑱③ 式的 $H_g(\omega)$ 经展开后可写成幂级数的形式,即

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M} a(n)(\cos\omega)^n \tag{193}$$

对上式求导,得

资料包

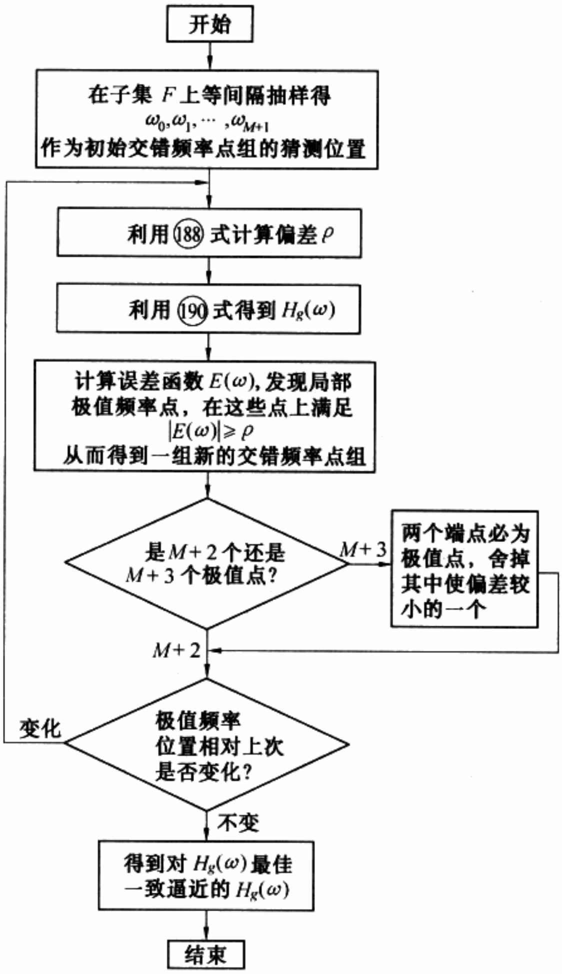


图 2　Remez 算法流程图

$$H'_g(\omega)=-\sin\omega\sum_{n=0}^{M}a(n)n(\cos\omega)^{n-1} \tag{194}$$

显然,在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处,$H_g(\omega)$ 必取极大值或极小值.这样,在闭区间$[0,\pi]$上,$H_g(\omega)$ 至多有 $M+1$ 个极值.如令 $N=13$,则 $M=6$,$H_g(\omega)$ 的极值点如图 3 所示.图中,$\omega_0=0$,$\omega_6=\pi$,显然,若不包括 ω_p 和 ω_s,最多可有 $M+1=7$ 个极值频率,包括 ω_p 和 ω_s 时,最多可有 $M+3=9$ 个极值频率.

利用上述的极值特性可得到下述一组方程

$$H_g(\omega_0) = 1 + \delta_1, H_g(e^{j\pi}) = \delta_2$$
$$H_g(\omega_1) = 1 - \delta_1, H'_g(\omega_1) = 0$$
$$H_g(\omega_2) = 1 + \delta_1, H'_g(\omega_2) = 0$$
$$H_g(\omega_3) = -\delta_2, H'_g(\omega_3) = 0$$
$$H_g(\omega_4) = \delta_2, H'_g(\omega_4) = 0$$
$$H_g(\omega_5) = -\delta_2, H'_g(\omega_5) = 0$$

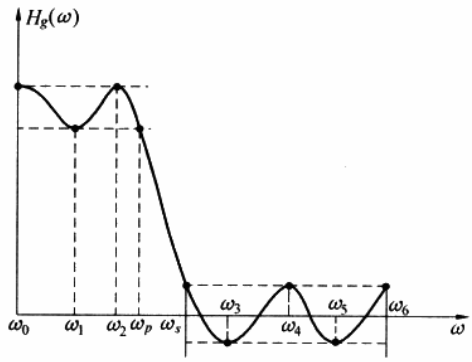


图 3　$M = 6$ 时 $H_g(\omega)$ 的极值特性

这里总共有 12 个方程. $a_0, a_1, \cdots, a_6$ 是 7 个未知数,加上 5 个未知频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5$,总共 12 个未知数,因此可以求解. 但上述方程都是非线性方程,求解比较困难,因此,这种方法仅用于 M 较小的场合. 此方法是早期用等纹波法设计 FIR 数字滤波器的思路,是由 Herrmann 于 1970 年提出的. 尔后 Hofstetter 等人对上述方法作了改进,用迭代的方法确定极值频率,代替上述的求解非线性方程组. 在用等纹波逼近法设计滤波器时,有 5 个待定的参数,即 M(或 N),$\delta_1, \delta_2, \omega_p$ 和 ω_s. 我们不可能独立地把这 5 个参数全部给定,而只能指定其中的几个,留下其余的几个在迭代中确定. Herrmann 和 Hofstetter 的算法是给定 M, δ_1 和 δ_2,而 ω_p 和 ω_s 是可变的,这样就有一个缺点,即滤波器通带和阻带的边缘频率不能精确地确定. 这两种方法都要求解包括端点 $[0, \pi]$ 在内的 $M + 1$ 个极值频率.

前面讨论的 McClallan J. H. 的算法是指定 M, ω_p 和 ω_s,而把 δ_1 和 δ_2 当作可变的,在迭代中最佳地确定. 根据通带和阻带的定义,应有

$$H(e^{j\omega_p}) = 1 - \delta_1$$
$$H(e^{j\omega_s}) = \delta_2$$

即 ω_p 和 ω_s 也是极值频率点. 这样,对于低通滤波器来说,指定 ω_p 和 ω_s 作为极值频率后,最多将会有 $M + 3$ 个极值频率. 但利用交错定理时,只需要 $M + 2$ 个极值频率. 因此,在每一次迭代过程中,若出现有 $M + 3$ 个极值频率,则在 $\omega = 0$ 或 $\omega = \pi$ 处,选取其中呈现最大误差的一个作为极值频率点,形成新的交错点组. 出现 $M + 3$ 个极值频率的情况称之为"超纹波",用 Herrmann 和 Hofstetter 方法设计出的滤波器也称之为"超纹波滤波器". 图 3 中的 ω_p, ω_s 和 $0, \pi$ 处都是极值频率,因此这是一种"超纹波" 的情况[5,3].

[编后语]　我们生活的时代是大师日益稀缺的时代,一再有学者这样说. 究其原因,在这个世界被功利目标充斥之后已经祛魅,大师们的高论已经被浅薄的应试技巧洗刷干净,正如一位文人所说:敬畏才是从一个伟大心灵所写下的伟大作品中学到教益的必备条件. 当大师身上神圣的光环一旦退去,我们的敬畏之心已经被蒙昧所遮蔽. 因此我们只能从不断的阅读中寻找残留的敬畏之心,从沉寂的经典中淘洗着大师的深邃.

参 考 文 献

[1] Banach S. Uber homogene Polynome in (L^2)[J]. Studia Math, 1938, 7:36-44.

[2] Bochnak J, Siciak J. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces[J]. Studia Math, 1971,39:59-76.

[3] vander Corput J G, Schaake G. Unglei chungen fur polynome und Trigonometrishe Polynome[J]. Compositio Math, 1935,2:321-361.

[4] Federer H. Geometric Measure Theory[M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1969.

[5] Grunbaum B. Two examples in the theory of polynomial functionals[J], Reveon Lematematika, 1957,11:56-60.

[6] Harris L A. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors[M], Hermann, Paris, 1975.

[7] Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces[J]. Lecture Notes in Math. 1974,364: 13-40.

[8] Hörmander L. On a theorem of Grace[J]. Math. Scand. 1954,2:55-64.

[9] Kellogg O D. On bounded polynomials in several variables, Math. Zeit. 1928,27; 55-64.

[10] Kopc J, Musielak J. On the estimation of the norm of the n-linear symmetric operation[J], Studia Math, 1955,15:29-30.

[11] Martin R S. Thesis, Cal. Inst. of Tech[M]. 1932.

[12] Mazur S, Orlicz W. Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operatoren Ⅰ - Ⅱ[J]. Studia Math. 1935,5, 50-68,179-189.

[13] Nachbin L. Topology on Spaces of Holomorphic Mappings[M]. New York: Springer-verlag, 1969.

[14] Rivlin T J. The Chebyshev polynomials[M]. New York: wiley, 1974.

[15] Taylor A E. Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces[J], Tohoku Math. J. 1938,44, 302-318.

[16] Review of a paper of Kopec and Musielak[J]. Math. Reviews 1956,17,512.

[17] Wilhelmsen D R. A Markov inequality in several dimensions[J]. J. Approx. Theory, 1974,11:216-220.

资料包

舒尔定理和范德瓦尔登定理

冯克勤

1 舒尔定理和有关结果

如果说爱尔特希－塞克尔斯定理在拉姆塞理论的发展中的主要作用是重新发现了拉姆塞定理并使这个结果引起数学界的注意，但爱尔特希－塞克尔斯定理本身相形之下是一个比较“孤立”的结果，那么下面要讲的舒尔定理的情况很不相同.舒尔定理问世比拉姆塞定理早十几年，而舒尔定理本身后来得到一系列推广和发展，是拉姆塞理论的源头之一.

下面分三部分来讲：

一、舒尔定理及其证明

这个定理是德国数学家舒尔(I. Schur, 1875 ~ 1944)在1916年发表的一篇研究有限域上的费马大定理的论文中证明的，论文的题目叫做“论同余式 $x^m + y^m = z^m(\mathrm{mod}\,p)$”，这里所说的舒尔定理是为了证明论文的主要结果而先行证明的结论.

下面是舒尔定理和它的两种证明：第一种证明基于舒尔的原始证明，第二种证明利用了拉姆塞定理.

舒尔定理(有限形式)　对任一给定的 $k \in \mathbf{N}$，存在 $n \in \mathbf{N}$，使得对 $[n]$ 的任一 k－染色 $f:[n] \to [k]$，有 $x, y \in [n]$ 使 $f(x) = f(y) = f(x+y)$（这里的 x, y 可能相等）.上述数 n 的最小值记为 $S(k)$.

证明1　用反证法证明只要 $n \geqslant [k!e]$ 即合于所求，假设对 $f:[n] \to [k]$ 不存在 $x, y \in [n]$ 使 $f(x) = f(y) = f(x+y)$，并记 $n = n_0$，

设在染色 f 下 $[n_0]$ 中被染成 $i_0 \in [k]$ 色的元的个数最多，记 $f^{-1}(i_0) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n_1-1}\}_<$①，则（由抽屉原理）易知 $n_0 \leqslant kn_1$.考察 $[n_0]$ 中的 $n_1 - 1$ 元子集

$$N_0 = \{x_i - x_0 : \in [n_1 - 1]\}$$

由假设可知，N_0 中任一元 $x_i - x_0$ 都不可能的是 i_0 色的（因为否则将有 $f(x_i - x_0) =$

① $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}_<$ 表示 m 元数集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$.

$i_0, f(x_0) = i_0$ 和 $f((x_i - x_0) + x_0) = f(x_i) = i_0$，设在染色 f 下 N_0 中 i_1 色的元的个数最多，这里，$i_1 \in [k], i_1 \neq i_0$，记 $f^{-1}(i_1) \cap N_0 = \{y_0, y_1, \cdots, y_{n_2-1}\}_<$，同理可知 $n_1 - 1 \leqslant (k-1)n_2$.

如果 $n_2 > 1$，再考察$[n_0]$的 $n_2 - 1$ 元子集 $N_1 = \{y_i - y_0 : i \in [n_2 - 1]\}$. 根据假设，$N_1$ 中任一元 $y_i - y_0$ 都既不是 i_1 色又不是 i_0 色的（不是 i_1 色的推理同 N_0，不是 i_0 色是因为任一 $y_i - y_0$ 都可以写成 $x_t - x_s$ 的形式，其中 $1 \leqslant s < t \leqslant n_1 - 1$），设在染色 f 下 N_1 中 i_2 色的元的个数最多，这里 $i_2 \in [k] - \{i_0, i_1\}$，记 $f^{-1}(i_2) \cap N_1 = \{z_0, z_1, \cdots, z_{n_3-1}\}_<$，同理可知 $n_2 - 1 \leqslant (k-2)n_3$.

如果 $n_3 > 1$，再考察 $N_2 = \{z_i - z_0 : i \in [n_3 - 1]\}$，等等，如此继续进行，一方面，只要 $n_{j-1} > 1$ 就可以再进行一步得色 $i_{j-1} \in [k]$ 和数 $n_j \geqslant 1$，并有 $n_{j-1} - 1 \leqslant (k - j + 1)n_j$. 另一方面，这个过程不可能无限继续，因为每进一步都要用到一个以前没用过的色. 所以一定有 $j \geqslant k$ 使得 $n_j = 1$.

从不等式组 $n_0 \leqslant kn_1, n_1 \leqslant (k-1)n_2 + 1, n_2 \leqslant (k-2)n_3 + 1, \cdots, n_{j-1} \leqslant (k - j + 1)n_j + 1, j \leqslant r, n_j = 1$ 可以得到

$$n_0 \leqslant k(k-1)n_2 + k \leqslant k(k-1)(k-2)n_3 + k(k-1) + k \leqslant \cdots \leqslant$$
$$(k)_j + (k)_{j-1} + \cdots + (k)_2 + k^{①} \leqslant (k)_k + (k)_{k-1} + \cdots + (k)_2 + k =$$
$$k!\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!}\right) < [k!e]$$

这与 $n_0 = n \geqslant [k!e]$ 的假设矛盾.

证明 2 利用拉姆塞定理，取 $n = R_k(3) - 1$ 即可保证定理所说的性质成立. $R_k(3)$ 是拉姆塞数 $R^{(2)}(\overbrace{3,3,\cdots,3}^{k})$ 的缩写.

从$[n]$的 k－染色 $f:[n] \to [k]$ 可以产生$[n+1]^{(2)}$的一个 k－染色 f'：对 $\{i,j\}_< \in [n+1]^{(2)}$，定义 $f'(\{i,j\}) = f(j-i)$. 根据拉姆塞数 $n + 1 = R_k(3)$ 的性质，$[n+1]$中有 3 元子集 $\{a,b,c\}_<$，它的三个 2 元子集在染色 f' 下同色，即有

$$f'(\{a,b\}) = f'(\{b,c\}) = f'(\{a,c\})$$

也就是

$$f(b-a) = f(c-b) = f(c-a)$$

令 $x = b - a, y = c - b$ 即合于所求.

二、舒尔数

(1) 精确值

为确定舒尔数，令 $S^*(k) = S(k) - 1$，并给出 $S^*(k)$ 的一个直接的定义. 为此，我们把 **N** 的子集 F 称作自由和集，如果 F 具有性质 $a, b \in F \Rightarrow a + b \notin F$，于是 $S^*(k)$ 等于

---

① 规定 $(k)_i = k(k-1)\cdots(k-i+1)(0 \leqslant i \leqslant k)$，所谓 k 的 i 项降阶乘.

可以分拆成 k 个自由和集之并的集$[m]$中 m 的最大可能值.例如,[4]可以分拆成二个自由和集{1,4}和{2,3}之并,故 $S^*(2)\geqslant 4$.但不难验证[5]不具有这种 2-分拆,所以 $S^*(2)=4$.

迄今已确定的舒尔数(也把 $S^*(k)$ 叫做舒尔数)只有4个:$S^*(1)=1,S^*(2)=4,S^*(3)=13,S^*(4)=44$.其中 $S^*(4)=44$ 是在1965年借助计算机求得的.$S^*(5)$ 尚未确定,在1979年仿照 $S^*(4)$ 的求法只得到(目前最好的)下界 $S^*(5)\geqslant 157$.

(2) 上界

前面给出的二种证明实际上都同时给出了舒尔数的上界.

命题 1 $S(k)\leqslant[k!e]$.

命题 2 $S(k)\leqslant R_k(3)-1$.

而且结合命题 2 就得到命题 1 的上界,当然命题 2 的上界本身尚未确定,通过对 $R_k(3)$ 的上界的分析可以得到:

命题 3 $S(k)\leqslant[k!(e-\frac{1}{24})]$.

命题 3 中的上界是目前最好的.

有一道中学生国际数学奥林匹克竞赛题(第 20 届第 6 题)是这样的:

"一个国际社团的成员来自六个国家,共有成员 1978 人,用数 1,2,…,1977,1978 编号,请证明该社团中至少有一位成员的编号数等于他(她)的二位同胞的编号数之和,或者等于一位同胞的编号数的 2 倍."

用现在的术语来表示,这道题要求证明的是 $S(6)\leqslant 1978$.当然,这是命题 1 的推论

$$S(6)\leqslant[k!e]=1956$$

但出这道题的人不能要求参赛者先去证明——或本来已知道——命题 1,也许出题人希望参赛者能对这些具体数据独立地想出证法一的解法,或者希望参赛者想到把问题化成证明 K_{1979} 在边的任一 6-染色下必有单色的三角形——等于要求独立地想出证法二的主要思想,尽管对 K_{1979} 的上述 6-染色性质的证明也可以直接通过连用几次证明六人集会问题(即 $R(3,3)\leqslant 6$)的方法来完成.

(3) 下界

舒尔本人在他的 1916 年论文中提出一种通过递推构造求得 $S^*(k)$ 下界的结果:

设$[m]$可以分拆成 k 个自由和集之并

$$[m]=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k$$

则$[3m+1]$也可以分拆成 $k+1$ 个自由和集之并

$$[3m+1]=F'_1\cup F'_2\cup\cdots F'_k\cup F'_{k+1}$$

其中 $$F'_i=F_i\cup(F_i+2m+1)\qquad i=1,2,\cdots,k$$

(这里 F_i+2m+1 表示集 F_i 中各数都加上 $2m+1$ 后所得的集),而

$$F'_{k+1}=[m+1,2m+1]$$

不难验证 $F'_1,\cdots,F'_{k+1}$ 都是自由和集.例如,从[4]分拆成二个自由和集之并[4] =

$\{1,4\} \cup \{2,3\}$ 出发,按上述构造法可把[13]分拆成三个自由和集之并

$$[13] = \{1,4,10,13\} \cup \{2,3,11,12\} \cup \{5,6,7,8,9\}$$

因此对每个 $k \in \mathbf{N}$ 成立 $S^*(k+1) \geqslant 3S^*(k) + 1$.因 $S^*(1) = 1$,故得下界

$$S^*(k) \geqslant \frac{1}{2}(3^k - 1) \quad ①$$

阿伯特(Abbott)和亨松(Hanson)在1972年通过更细致的递推构造法证明了

$$S^*(k+l) \geqslant 2S^*(k)S^*(l) + S^*(k) + S^*(l) \quad k,l \in \mathbf{N}$$

在上式中固定 l,则有常数 A 使

$$S^*(k) \geqslant A(2S^*(l) + 1)^{\frac{k}{l}}, \quad k \geqslant l$$

特别取 $l = 5$,再利用 $S^*(5) \geqslant 157$ 即可得

$$S^*(k) \geqslant A(315)^{\frac{k}{5}} > C(3.16)^k \quad ②$$

当 k 充分大时,下界(2)比(1)好;(2)也是目前最好的下界(在渐近意义下),从(2)可以得到

$$R_k(3) \geqslant S^*(k) + 2 > A(3.16)^k$$

这也是 $R_k(3)$ 的最好下界

三、舒尔定理的推广

舒尔定理是拉姆塞理论的源头之一.虽然舒尔本人证明这个定理是为了研究别的问题,而且以后他也没有在拉姆塞理论这一领域发表其他研究成果,但在这一理论的发展史上至少有二件大事与舒尔紧密相关.

ⅰ)在研究数论(有关于二次剩余和二次非剩余的分布)问题时,舒尔在1920年提出了一个猜想,这个猜想在1927年被荷兰数学家范德瓦尔登(B. L. van der Waerden)证明为真,从而成为拉姆塞理论——也是数论——的一个著名经典定理(后来这个定理称作范德瓦尔登定理).

ⅱ)舒尔指导了他的一位博士生拉多(R. Rado)写作学位论文,在拉多的1933年的学位论文以及随后的一系列更进一步的研究工作中,拉多证明了一个深刻的定理(后来被称作拉多定理),这个定理既是舒尔定理又是范德瓦尔登定理的非常深刻的推广,它也是拉姆塞理论的经典定理之一.

这里要介绍的是和舒尔定理的形式上很相像的一种深刻推广,为叙述简明,同时也为了更突出舒尔定理的定性方面,先给出舒尔定理的无限形式.

舒尔定理(无限形式)　对任一给定的 $k \in \mathbf{N}$ 以及 $\mathbf{N}$ 的任一 k - 染色,一定有同色的 $x,y,z \in \mathbf{N}$ 满足 $x + y = z$.

证明　这是舒尔定理的有限形式的直接推论.

下面的这个推广结果是20世纪60年代后至少三位数学家各自独立地发现的,为了纪念其中已不幸夭亡而又对拉姆塞理论作出杰出贡献的一位数学家福克曼(J. Folkman,1938 ~ 1969),我们遵从很多文献的说法,把这一结果称作福克曼定理.

福克曼定理 对任意给定的 $k,n\in\mathbf{N}$ 以及 $\mathbf{N}$ 的任一 k - 染色，$\mathbf{N}$ 中一定有 n 元子集 A，使得 A 中任意多个不同的数的和都同色.（更详细地说，对 A 的每个非空子集 X，记 X 中各数之和为 $n(x)$，则所有 $n(X)$ 都同色.）

注意，当 $n=2$ 时，存在 2 元子集 $A=\{x,y\}$ 使得 $x,y,x+y$ 同色就得到舒尔定理（因这里的 $x,y,x+y$ 是 3 个不同的数，所以结论还比舒尔定理稍强一些）.

后来发现上述福克曼定理实际上可以从拉多定理推导出来（这个推导并不简单），但福克曼定理仍有其价值. 其中之一是福克曼定理的表述方式促使人们作进一步的探索，最著名的一个深刻推广是欣德曼（N. Hindman）在 1974 年证明的下述结果：

欣德曼定理 对 $\mathbf{N}$ 的任一有限染色，$\mathbf{N}$ 中一定有无限子集 A，使得 A 中任意有很多个不同数之和都同色.

欣德曼定理是福克曼定理在更深层次上的推广. 一般说来，证明一定存在具有某些性质的无限子集和证明一定存在有限子集有本质性不同. 欣德曼定理不能从别的存在有限子集的结论导出，证明它需要新方法. 当然，它也成为进一步研究的新源头.

最后再对福克曼定理讲一个没有解决的猜想. 首先很容易证明，如果在福克曼定理中把结论中的“和”改成“积”，则定理仍成立，具体地说，有下述结论：

资料包

定理（福克曼定理的乘积形式） 对任意给定的 $k,n\in\mathbf{N}$ 以及 $\mathbf{N}$ 的任一 k - 染色，$\mathbf{N}$ 中一定有 n 元子集 A'，使得 A' 中任意多个不同的数的积都同色.

证明 对 $n\in\mathbf{N}$ 记 $\theta(n)=2^n$，则显然 θ 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}'=\{2^n:n\in\mathbf{N}\}$ 上的一一对应

$$\mathbf{N}\xrightarrow{\theta}\mathbf{N}'\subset\mathbf{N}$$

设 f 是 $\mathbf{N}$—— 设想是上式中最右边的那个 $\mathbf{N}$—— 的 k - 染色，则 f 自然给出了 $\mathbf{N}$ 的子集 $\mathbf{N}'$ 的 k - 染色，而后者通过 θ 确定了 $\mathbf{N}$—— 设想是最左边的那个 $\mathbf{N}$—— 的一个 k - 染色 $g:g(n)=f(\theta(n))=f(2^n)$. 对 $\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{N}$ 的 k - 染色 g，按福克曼定理有 n 元子集 A 使得 A 中任意多个不同的数的和在 g 下同色. 令 $A'=\{2^n:n\in A\}$，则 A' 中任意多个不同的数的积在 f 下同色.

能不能同时顾及“和”与“积”呢？三位拉姆塞理论的权威学者格雷厄姆，罗斯切特（B. L. Rothschild）和斯彭塞认为行，但未能给予证明. 他们三位在 1980 年联名出版的专著《拉姆塞理论》一书中对此提出下述猜想：

猜想 对任意给定的 $k,n\in\mathbf{N}$ 及以 $\mathbf{N}$ 的任一 k - 染色，$\mathbf{N}$ 中一定有 n 元子集 B，使得 B 中任意多个不同的数的和以及积都同色.

这个猜想极难回答. 即使当 $n=2$ 时也未能证明它是否为真，这时的猜想可以写成：

猜想 对任意给定的 k 以及 $\mathbf{N}$ 的任一 k - 染色，一定存在 $x,y\in\mathbf{N}$，$x\neq y$，使得 $x,y,x+y$ 和 xy 同色.

2　范德瓦尔登定理

上一节中说到的舒尔在 1920 年提出的猜想是这样的：

“如果把正整数集任意分拆成二部分,那么对于任意给定的一个正整数 l,二部分中必有一部分含有 l 项等差数列.”

1926 年,当时在德国汉堡大学的范德瓦尔登从哥丁根大学的一位荷兰学生包特(Baudet)那里得知了这个猜想,并最终完全证明了这个猜想成立.范德瓦尔登本人在 1971 年写了一篇文章,题目叫“包特猜想的证明是怎样找到的”,(刊于祝贺拉多 65 岁的文集《纯数学研究(Studies in Pure Mathematics)》,这篇论文被认为是关于数学发现的心理学的重要文献,它已由陶懋颀教授编译后刊登在《曲阜师院学报》1983 年第 3 期).文章一开始这样描述了当时的情景:

“1926 年的一天,在我同阿丁(E. Artin)和许莱尔(O. Schreier)一起吃午饭的时候,我告诉了他们荷兰数学家包特的猜想(即舒尔的猜想,范氏一直称它为包特猜想).

午饭后,我们走进阿丁在汉堡大学数学系的办公室,并且试着去找一个证明.我们在黑板上画了几个图.这时候,有突然闪入脑中的想法.这类新想法曾多次给讨论以新转机,而其中一个想法最终导致问题的解决.”

想法之一(范德瓦尔登把它归功于许莱尔)是:可以把无限集 N 改成有限集$[N]$,这里 N 是与 l 有关的一个充分大的正整数;另一个想法(范德瓦尔登把它归功于阿丁)是:“分拆成 2 部分”可以改成“分拆成 k 部分”,这里 k 是任意给定的一个正整数,而范德瓦尔登则最终完全证明了后来以他命名的下述定理:

范德瓦尔登定理 对任意给定的 $l,k\in \mathbf{N}$,存在 $W=W(l,k)\in \mathbf{N}$,使得把$[W]$任意分拆成 k 部分后,其中必有一部分含有 l 项等差数列

$$a,a+d,\cdots,a+(l-1)d$$

范德瓦尔登在与阿丁和许莱尔一同研究这个猜想之前就已经注意到,$l=2$ 是平凡情形,因为显然可取 $W(2,2)=3$,而且对任一 k 也有 $W(2,k)=k+1$——抽屉原理!对于 $l=3(k=2)$,他也通过穷举知道可取 $W(3,2)=9$.因为$\{1,2,\cdots,8\}$可以用几种方法分拆成 2 部分,使得每一部分中都不含有 3 项等数列.例如

$$[8]=\{1,2,5,6\}\cup\{3,4,7,8\}$$

就是这种 2 - 分拆.但不管把 9 加进哪一部分,都会产生 3 项等差数列!(注意这时范德瓦尔登所考虑的还是原始的猜想,但却已发现可能把无限集 N 改成有限数段$[N]$了.)当然,这种通过穷举所有可能情况而得到 $W(3,2)=9$ 的证明无法进一步推广.在他们三人讨论的过程中,范德瓦尔登重新考察了这个 $l=3,k=2$ 的简单情形,给出了另一个看上去比穷举复杂,但却有可能进一步推广的证明.这时可取 $W(3,2)=325$,论证如下:

若正整数已分成二部分,则 3 个相继整数中必有 2 个属于同一部分;而以这 2 个属同一部分的数为前 2 项的等差数列的第 3 项虽然未必属于同一部分,但一定在由这 3 个相继整数再后接 2 个共 5 个相继整数组成的块中.如果第 3 项属同一部分则已得 3 项等差数列,故可设它属另一部分.因为这种 5 数块共有 $2^5=32$ 种不同的 2 - 分拆,所以在 33 个 5 数块中必有 2 块的分拆同型——即它们的 2 - 分拆所产生的 2 部分分别由排列在同样位置上的数组成.在前 33 块中找到这样 2 块后再往后取这样的第 3 块:它到离第 2 块与第

2块离第一块一样远，则在这3个5数块所含的15个数中一定有3项等差数列.下面用具体数字来说明.

先把[325]等分成65块，再把这些块依次记成 $B_1=[1,5]$, $B_2=[6,10]$, $\cdots$, $B_{65}=[321,325]$. [325]的一个2-染色自然在每个 B_i 上产生一个2-染色，而且在 $2^5+1=33$ 块 $B_1,B_2,\cdots,B_{33}$ 中必有2块，比方说 $B_{11}=\{51,52,53,54,55\}$ 和 $B_{26}=\{126,127,128,129,130\}$ 的2-染色同型.再看 B_{11} 的前3个数，它们中至少有2个同色，比方说第一和第三个数51和53同色(我们用○和●表示二种色，设51和53同为●).若55也是●，则已得等差数列51，53，55，故设55是○.因 B_{26} 有同型的2-染色，故126，128是●，130是○.再考察第3块 B_{41} 的最后一个数205.如果205是○，则有同色之等差数列55，130，205；如果205是●，则有同色之等差数列51，128，205(图1).

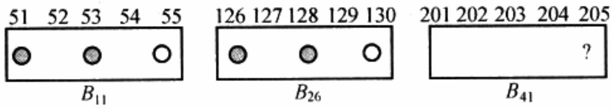


图1

范德瓦尔登在1971年的回忆文章中写道："在对 $k=2$ 和 $l=3$ 这个特殊情形找到了证明之后，我把它向阿丁和许莱尔作了解释.我感到同样的证法必定能用来证一般情形.他们不相信，于是我就进而去证下一步 $k=3$, $l=3$ 的情形."我们在这里不具体讲下去了，因为这时要用到不少记号和相当大的数量——$W(3,3)$ 将取成这样大的数 $7(2\cdot3^7+1)(2\cdot3^{7(2\cdot3^7+1)}+1)$，尽管证明的思想是和前面一样明确.猜想的最终证明是对 l 进行归纳：因为对于 $l=2$ 和所有的 k 数 $W(2,k)$ 存在，假设当 $l>2$ 时对 $l-1$ 和所有的 k 数 $W(l-1,k)$ 存在，再证明对 l 及任一给定的 k 数 $W(l,k)$ 存在.但要具体写出定理的证明仍然非常繁.拉多在1971年回忆四十多年前他作为柏林大学的研究生但还没有选定研究方向时这样写道："有一天我参加了由一群杰出的数学家主持的讨论班，那次是一位研究生讲范德瓦尔登定理.对我来说这个定理听上去难以置信，其证明也颇成问题.我决心打破沙锅问到底，要彻底弄明白这个定理是否真的成立.经过仔细研究后，我不得不承认定理为真，证明也严格成立，这成为我搞数学的起点，而且从此终身不渝."这里不写出定理的原始证明的另一个原因是，在范德瓦尔登的证明在1927年发表后，不少数学家给出了这个定理(或它的推广)的新证明.其中有的证明很简短，例如，格雷厄姆和罗斯切特在1974年发表的一个证明不到二页(见Proc. Amer. Math. Soc. 24(1974)，385～386).他们在高度概括了范德瓦尔登的原始证明的精神实质后，非常精炼地证明了一个比范德瓦尔登定理更强些的结论.他们的证明为时下各种著作所采用，我们在下一节具体给出这个证明.

范德瓦尔登定理是拉姆塞理论的发展的一大源泉，它至少在下述三个方向上大大地促进了，而且继续促进着理论的发展和深入，现分别作简略的介绍.

一、范德瓦尔登数

和前面几个经典定理一样，我们把范德瓦尔登定理中断言其必存在的数 $W(l,k)$ 的

最小值叫做范德瓦尔登数,仍记作 $W(l,k)$,特别地,记 $W(l) = W(l,2)$. 可以预料,对函数 W 的定量研究将会非常困难.

首先会想到 $W(l,k)$ 的精确值. 前面已经说过,$l = 2$ 时,$W(2,k) = k + 1$ 是平凡结果;另外可以用穷举法证得 $W(3,2) = 9$. 除此之外,作用于计算机搜索还求出了 4 个值. 下表列出了至今已确定的所有非平凡的 $W(l,k)$ 值.

l \ $W(l,k)$ \ k	2	3	4
3	9	27	76
4	35		
5	178		

实际60多年来人们对范德瓦尔登数最有兴趣的不是求得其精确值——这似乎超过了人们现有的能力,而是希望对它有较好的估计,特别是想得到比较"适度"的上界,下面就来概述一下在这方面的历史发展,而对这个问题的研究正方兴未艾.

记 $W(l) = W(l,2)$,使用"非构造性方法"可得到下界

$$W(l) > \frac{2^l}{2el} - \frac{1}{l}$$

当 l 是素数时,通过具体构造可得更好的下界

$$W(l+1) > l \cdot 2^l$$

但这些下界与目前人们所得到的 $W(l)$ 的上界有天壤之别. 事实上所得的上界如此之大 —— 更确切地说,$W(l)$ 的已知上界作为 l 的函数其递增速度是如此之快,以致必须用被称为阿克曼层次(Ackerman hierarchy)的一系列专门的函数才能表示它. 第 m 层次的阿克曼函数记为 $A_m(m \geqslant 1)$,它定义在正整数集上.

第 1 层函数 $A_1(n) = 2n$,是"加倍函数";第 2 层函数 $A_2(n) = 2^n$,是递增很快的指数函数. A_2 可以用 A_1 来描述:$A_2(n)$ 等于 A_1 在自变量 1 处重复 n 次,例如 $A_2(3) = A_1(A_1(1)) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. 所以也可以递推地定义 $A_2(1) = A_1(1) = 2, A_2(n) = A_1(A_2(n-1))(n > 1)$. 同样我们用 A_2 来定义 A_3 : $A_3(1) = A_2(1) = 2, A_3(n)$ 等于 A_2 在自变量 1 处重复作用 n 次;或者递推地定义 $A_3(n) = A_2(A_3(n-1))(n > 1)$. 例如

$$A_3(2) = A_2(A_3(1)) = 2^2, \quad A_3(3) = A_2(A_3(2)) = 2^{2^2}$$

一般地,不难看出有 $A_3(n) = A_2(A_3(n-1)) = 2^{A_3(n-1)}$,因此可以写成下面这种 2 的"$n$ 层塔幂"的形式

$$A_3(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \quad (\text{共 } n \text{ 个 } 2)$$

所以第 3 层函数 A_3 也称为 2 的"塔幂函数",其递增速度异常之快

$$A_3(3) = 2^{2^2} = 16, \quad A_3(4) = 2^{16} = 65536, \quad A_3(5) = 2^{65536}, \cdots$$

$A_3(5)$ 已经非常大了,要把它写成十进位整数的话将近 20 万位.

A_3 比起 A_4 来又微不足道了.第4层函数是这样定义的:$A_4(1) = A_3(1) = 2, A_4(n) = A_3(A_4(n-1))(n>1)$.所以

$$A_4(2) = A_3(A_4(1)) = A_3(2) = 2^2 = 4$$

$$A_4(3) = A_3(A_4(2)) = A_3(4) = 2^{16} = 65536$$

$$A_4(4) = A_3(A_4(3)) = 2\text{ 的 }65536\text{ 层塔幂}$$

数 $A_4(4)$ 已经大得难以置信.格雷厄姆和斯彭塞是这样形容数 $A_4(4)$ 的:“即使一个数大得必须用世界上所有书的全部篇幅再加上所有计算机的全部存储能力才能把它容纳进去,这个数同 $A_4(4)$ 相比仍然小得微不足道.”斯彭塞建议把函数 A_4 叫做“WOW 函数”(WOW 是表示惊叹的一个口语感叹词,可勉强译成“哇!”).

一般地,从第 k 层函数 A_k 可以定义第 $k+1$ 层函数 A_{k+1}:$A_{k+1}(1) = A_k(1) = 2$,$A_{k+1}(n) = A_k(A_{k+1}(n-1))(n>1)$.从 A_k 到 A_{k+1},函数的递增速度又上了一层,但不管怎么说,对一个固定的正整数 m 来说,$A_m(n)$ 作为 n 的函数还是限于第 m 个层次,其递增速度仍有所约束.下面定义的函数 A 将突破任何固定的层次,或者说它凌驾于任一层次之上:定义 $A(n) = A_n(n)$,即 $A(1) = A_1(1) = 2, A(2) = A_2(2) = 4, A(3) = A_3(3) = 16, A(4) = A_4(4), \cdots$.把函数 A 叫做 Ackerman 函数.

资料包

从范德瓦尔登在 1927 年首先证明以他命名的这个定理以来,60 年间又找到了不少新的证明.但所有证明对量 $W(l)$ 的估计都必须相当于 $A(l)$.也就是说,只有把从 1 到 $A(l)$ 这样大的每个整数任意分拆成两部分后,才能保证其中必定有一部分含有 l 项等差数列!

范德瓦尔登定理表述之简单与相应的数 $W(l)$ 的如此庞大的上界形成极大的反差.数学家当然不会对这种现象安之若素,但试图改变状况的努力均告失败.

终于在 1987 年,以色列数学家谢拉(S. Shelah)取得了重大突破.他在题为“关于范德瓦尔登数的原始递归的上界”(刊于 J. of the Amer. Math. Soc. 1(1988),683—697)的论文中证明了 $W(l) \leqslant 2$ 的 $2W(l-1)$ 层塔幂.

根据前面的定义不难证明

$$2\text{ 的 }2W(l-1)\text{ 层塔幂} = A_3(2W(l-1)) < A_4(l)$$

从而可知 $W(l)$ 的上界不超过第4层函数 $A_4(l)$.$A_4(l)$ 与 $A(l) = A_l(l)$ 相比当然已经根本性地减小.但数学家并不就此满足,数学家们很自然地追问:谢拉所得的上界是不是真正反映了 $W(l)$ 的量级?注意到 $W(l)$ 的已有下界属第2层次,而谢拉的上界属第4层次,问题就更富于挑战性.实际上早在 1983 年,格雷厄姆就在世界数学家大会上提出了下述猜想:

$$W(l) \leqslant A_3(l)(= 2\text{ 的 }l\text{ 层塔幂})$$

格雷厄姆此后一再重提这个猜想,并悬赏 1 000 美元征求对这个猜想的证明或否定.

对范德瓦尔登定理中涉及的数,也就是范德瓦尔登数的界的研究正方兴未艾,十分引人注目.

二、数列密度与等差数列

范德瓦尔登定理断言,把 **N** 任意分拆成有限部分后,其中必有一部分含任一给定项数的等差数列.定理并没有进一步研究到底是哪一部分具有这种性质.这个问题的一种一般提法是:对 **N** 的(无限)子集 T 来说,什么条件能保证 T 中含有任一给定项数的等差数列?爱尔特希和另一位匈牙利著名数学家托兰(P. Turán)对此在 1936 年提出这样的猜想:

"如果 **N** 的子集 T 有正的'上密度',也就是说,如果有正的上极限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|T\cap[n]|}{n} > 0$$

则 T 含有任一给定项数 l 的等差数列."

不难证明范德瓦尔登定理是这个猜想 —— 如果它成立的话 —— 的简单推论.罗斯(K. F. Roth)在 1952 年证明了这个猜想当 $l = 3$ 时成立.匈牙利(当时的)青年数学家塞梅雷迪(E. Szemerédi)在 1969 年证明了 $l = 4$ 时猜想也成立,以后他再接再厉,在 1974 年完全证明了这个猜想成立.他的这个工作被誉为组合论证的一大杰作,爱尔特希认为塞梅雷迪应授予菲尔兹奖.爱尔特希本人给予 1 000 美元的奖金 —— 这是他曾付出过的最高奖额,也是他提出的为数颇多的悬赏难题的第二高奖额.最高奖额为 3 000 美元的问题是比上述爱尔特希 - 托兰猜想更强的一个猜想:

"如果 **N** 的子集 T 具有性质

$$\sum_{a\in T} \frac{1}{a} = \infty$$

则 T 含有任一给定项数 l 的等差数列."

这一小段所说的研究在性质上更接近于数论.本来范德瓦尔登定理也可以看成是一个数论结果 —— 前苏联著名数学家辛钦(A. Я. Финчин)在 1952 年出版了一本题为《数论的三颗明珠》的书,范德瓦尔登就是其中的一颗明珠,上述猜想更具数论意味,这一点以这个猜想(假如它成立的话)能推出的一个结论可以清楚地看到:在素数集中含有任一给定项数的等差数列.

三、哈尔斯 - 朱厄特定理及其他发展

范德瓦尔登定理在定性方面的第一个主要的深化是哈尔斯和朱厄特(A. W. Hales and R. I. Jewitt)在 1963 年发表的一个定理,在《拉姆塞理论》一书中是这样高度评价这个定理的:

"在本质上,范德瓦尔登定理当看成是关于有限集中的有限序列(而不仅是关于整数)的一个定理.哈尔斯 - 朱厄特定理舍弃了范德瓦尔登定理的非本质因素并揭示出它的拉姆塞理论的本质.这个定理是可由此导出很多结果的一个中心,也是很多更深入的工作的基石.假如没有这个结果,'拉姆塞理论'应该更恰当地叫做'一些拉姆塞类型的定理'."

下面来叙述这个定理:

设 A 是给定的 t 元集，对 $n \in \mathbf{N}$，定义 $A^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in A\}$，称为 A 上的 n 维(组合)方体；它的每个元 $(x_1, \cdots, x_n)$ 称为 A^n 的一个顶点，其中 x_i 称为这个顶点的第 i 个坐标．再定义如下所述的 t 顶点组 L 为 A^n 的一条(组合)线：$[n]$ 有一个非空子集 I，L 中所有点的第 i 个坐标当 $i \notin I$ 时都等于常值 a_i；L 中每个点的下标属于 I 的坐标彼此相等，用符号可记成

$$L = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n : i, j \in I \text{ 时}, x_i = x_j; i \notin I \text{ 时}, x_i = a_i\}$$

不仅算出 A^n 中共有 $(t+1)^n - t^n$ 条线．图 2 画出了 $A = [5]$ 时 A^2，以及 $A = [2]$ 时 A^3 的线．

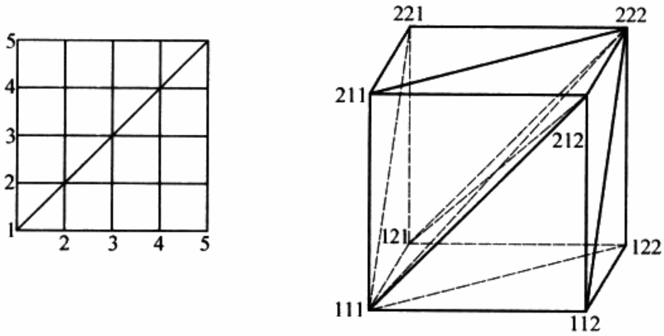


图 2

哈尔斯－朱厄特定理　对任意给定的 $t, k \in \mathbf{N}$，有 $H = H(t, k) \in \mathbf{N}$，使得对任一 t 元集 A 以及 A^H 的任一 k－染色，A^H 中必有各点同色的线．

现在来说明范德瓦尔登定理是这个定理的直接推论．

对任意给定的 $l, k \in \mathbf{N}$，在哈尔斯－朱厄特定理中取 $t = l, A = [0, l-1]$，则有 $H = H(l, k)$．再令 $W = l^H$，则说明对 $[W]$ 的任一 k－染色，必有单色的 l 项等差数列．因任一整数 $x \in [W]$ 可以写成 l 进位形式

$$x = x_0 + x_1 l + x_2 l^2 + \cdots + x_{H-1} l^{H-1}, \quad x_0, x_1, \cdots, x_{H-1} \in [0, l-1]$$

从而 x 可以用 $(x_0, x_1, \cdots, x_{H-1}) \in A^H$ 来表示．$[W]$ 的一个 k－染色产生一个 A^H 的 k－染色．根据哈尔斯－朱厄特定理和 $H = H(l, k)$ 的定义，A^H 中有各点同色的线 L，L 中的 l 个点形如

$$L: \begin{cases} (\times\times \quad 0 \quad \times\times\times \quad 0 \quad \times \quad 0 \quad \times\times) \\ (\times\times \quad 1 \quad \times\times\times \quad 1 \quad \times \quad 1 \quad \times\times) \\ (\times\times \quad 2 \quad \times\times\times \quad 2 \quad \times \quad 2 \quad \times\times) \\ \vdots \\ (\times\times \quad (l-1) \quad \times\times\times \quad (l-1) \quad \times \quad (l-1) \quad \times\times) \end{cases}$$

易知这 l 个 H 元数组所表示的整数构成等差级数．

哈尔斯－朱厄特定理是关于组合结构的一个结论，与范德瓦尔登定理作为一个整数的结论不同，而且后者实际上是前者的一个简单的推论．这是对哈尔斯－朱厄特定理作

出高度评价的一个比较表层的理由.更深一层的理由在于哈尔斯－朱厄特定理是一系列新的更深刻的工作的出发点.在这些更深刻的工作中,当首推格雷厄姆和罗斯切特在1971年发表的论文“关于 n 参数集的拉姆塞定理”.二位作者在这篇重要论文中引入了“n 参数集”这一非常一般的组合结构,并对这种结构证明了相应的拉姆塞型的定理.这个定理以很多已知的结论,如(经典的)拉姆塞定理、哈尔斯－朱厄特定理等作为其特例,从而体现了各定理的共同内涵.正如德国数学家普鲁梅尔和伏格特(H. J. Prömel and B. Voigt)在出版的专著《拉姆塞理论的若干问题》(Aspects of Ramsey Theory, Springer Verlag, Verlag, 1991)中所说:

“在某种程度上,格雷厄姆－罗斯切特定理(这是关于参数集的一个拉姆塞定理)可以看成是拉姆塞理论的起点.”

参数集是一个相当一般的概念,孤立地给出形式上的定义意思不大,这里不继续讨论了.格雷厄姆和罗斯切特的这篇重要论文发表在 Trans. Amer. Math. Soc. 159(1971), 257－292.值得提到的是,在这篇论文的启示下,格雷厄姆,李勃(K. Leeb)和罗斯切特在1972年完全解决了罗塔提出的一个猜想:他们三人证明了下述与拉姆塞定理十分神似的定理:

有限域上向量空间的拉姆塞定理　对任意给定的有限域 F 以及数 l,r,k,存在数 n 使得对 F 上的 n 维向量空间 F^n 的所有 r 维向量子空间作任意 k－染色后,F^n 中必有 l 维向量子空间,它的所有 r 维向量子空间同色.

这个定理是拉姆塞理论的近代发展史上的一个重要成果.三位作者因这项工作而荣获由美国工业与应用数学学会颁发的很有声望的波利亚(Pólya)奖.

3　范德瓦尔登定理的证明

本节给出前面已提到的格雷厄姆和罗斯切特在1974年发表的证明.先引入几个记号和概念.以下均设 l,m 是正整数.

记号 $[0,l]^m$ 表示所有形如 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的 m 项整数列的集,其中每个 $x_i\in[0,l]$ $(i=1,2,\cdots,m)$.再在集 $[0,l]^m$ 中定义 $m+1$ 个子集,并把每个子集叫做集 $[0,l]^m$ 的一个临界类:第 j 个临界类 $(j=0,1,\cdots,m)$ 是由 $[0,l]^m$ 中开始 j 个数 $x_1,\cdots,x_j$ 都等于 l,随后 $m-j$ 个数 $x_{j+1},\cdots,x_m$ 都小于 l 的所有 $(x_1,\cdots,x_m)$ 组成.例如当 $l=3,m=2$ 时的3个临界类分别是:

$\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\},\{(3,0),(3,1),(3,2)\}$ 和 $\{(3,3)\}$

又对任意的 l,当 $m=1$ 时有2个临界类

$$\{(0),(1),\cdots,(l-1)\} \text{ 和 } \{(l)\}$$

记号 $S(l,m)$ 表示下述命题.

$S(l,m)$:对任意给定的 $l,m,k\in\mathbf{N}$,一定存在具有如下性质的正整数 $N=N(l,m,$

k):对$[N]$的任意给定的 k - 染色 $f:[N]\to[k]$,有正整数 $a,d_1,d_2,\cdots,d_m$ 使得 $a+l\sum_{i=1}^{m}d_i\leqslant N$,且当$(x_1,\cdots,x_m)$属于$[0,l]^m$ 的同一临界时$f(a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i)$同值.

当 $m=1$时,命题 $S(l,1)$ 正是范德瓦尔登定理:因为$\{(0),(1),\cdots,(l-1)\}$是$[0,l]^1$的一个临界类,而当(x_1)属于这个临界类,即 $x_1=0,1,\cdots,l-1$时,$a+x_1d$ 构成l项等差数列.

格雷厄姆和罗斯切特实际上证明了比范氏定理更一般的定理:

定理 $S(l,m)$对所有 l,m 成立.

证明 因为 $S(1,1)$ 显然成立(这时取 $N(1,1,k)=k+1$即可),再通过证明下述二个归纳步骤归纳地证明定理成立.

① 如果 $S(l,1)$ 和 $S(l,m)$ 成立,则 $S(l,m+1)$ 成立.

因 $S(l,m)$ 和 $S(l,1)$ 都成立,故对任一给定的 $k\in\mathbf{N}$,有正整数 $N=N(l,m,k)$ 和 $N'=N(l,m,k^N)$.现在证明如取 $N(l,m+1,k)=NN'$,则 $S(l,m+1)$ 成立.也就是证明对任一 k - 染色 $f:[NN']\to[k]$,有正整数 $a_1,d_1,\cdots,d_m,d_{m+1}$ 使得 $a+l\sum_{i=1}^{m+1}d_i\leqslant NN'$,且当$(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1})$属于$[0,l]^{m+1}$的同一临界类时 $f(a+\sum_{i=1}^{m+1}x_id_i)$同值.

把$[NN']$等分成 N' 个N数段$I_j=[(j-1)N+1,jN]$$(j=1,\cdots,N')$.利用$f$限制在每个 N 数段 I_j 上的 k - 染色可按下述方法定义$[N']$的一个 k^N - 染色$f':[N']\to[k]^N$(这里$[k]^N$表示所有形如$(y_1,y_2,\cdots,y_N)$的 N 项整数列的集,其中每个 $y_i\in[k]$ $(i=1,\cdots,N)$.$[k]^N$共有k^N个元,用它们代表 k^N 种"色"):对任一 $j\in[N']$,定义

$$f'(j)=(f((j-1)N+1),f((j-1)N+2),\cdots,f(jN))\in[k]^N$$

因 $S(l,1)$ 成立,且 $N'=N(l,1,k^N)$,故对$[N']$的 k^N - 染色f',有正整数 a' 和d',使得 $a'+ld'\leqslant N'$,且有

$$f'(a')=f'(a'+d')=\cdots=f'(a'+(l-1)d') \qquad (*)$$

$(*)$式相当于说f在l个N数段$I_{a'},I_{a'+d'},\cdots,I_{a'+(l-1)d'}$上的限制彼此(平移)相等.

现在来考察 $I_{a'}=[(a'-1)N+1,a'N]$以及 $I_{a'}$ 上的k - 染色 f.因 $S(l,m)$ 成立,而且 $N=N(l,m,k)$,故有正整数 $a,d_1,\cdots,d_m$ 使得

$$(a'-1)N+1\leqslant a<a+l\sum_{i=1}^{m}d_i\leqslant a'N$$

且当$(x_1,\cdots,x_m)$属于$[0,l]^m$ 的同一临界类时$f(a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i)$同值.令 $d_{m+1}=d'N$,则正整数 $a,d_1,\cdots,d_m,d_{m+1}$ 使得

$$a+l\sum_{i=1}^{m+1}d_i\leqslant a'N+ld'N\leqslant NN'$$

当$(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1})$属于$[0,l]^{m+1}$的同一临界类时,因为$(x_1,\cdots,x_m)$属于$[0,l]^m$ 的同一

临界类,故$f(a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i)$同值,而且$a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i\in I_a$;再根据$f$在$I_{a'},I_{a'+d'},\cdots,I_{a'+(l-1)d'}$上的限制彼此(平移)相等(即(*)式),故有

$$f(a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i)=f(a+\sum_{i=1}^{m}x_id_i+d'N)$$



附录1 Schur问题、整数无和类

Schur证明了,如果小于 $n!e$ 的整数以任意方式分成 n 类,那么 $x+y=z$ 必能在某一类内得到整数解.如果 $s(n)$ 是具有此类性质的最小整数,Abbott 和 Moser 证明了对某些 c 和充分大的 n. $s(n)>89^{n/4-c\ln n}$, Abbott和Hanson证明 $s(n)>c(89)^{n/4}$,这一结果改进了Schur自己的估计 $s(n)\geqslant(3^n+1)/2$. Schur的结果事实上对 $n=1,2,3$ 它是强的,但对较大的 n,则不行了. $s(4)=45$ 是Baumert计算出来的.例如,头44个数可被拆成4个无和类:

{1,3,5,15,17,19,26,28,40,42,44}, {2,7,8,18,21,24,27,33,37,38,43}, {4,6,13,20,22,23,25,30,32,39,41}, {9,10,11,12,14,16,29,31,34,35,36}.

最近 Fredericksen 证明了 $s(5)\geqslant158$,并且对所有的后继 Schur 数,该结果改进了下界:

$$s(n)\geqslant c(315)^{n/5}(n>5).$$

Robert Irving 稍稍改进了 Schur 的上界 $[n!e]$ 为 $[n!(e-1/24)]$.

参考文献

[1] H L Abbott. phD thesis[M]. University of Alberta, 1965.

[2] H L Abbott, D Hanson. A problem of Schur and its generalizations[J]. Acta Arith., 1972,20:175-187.

[3] H L Abbott, L Moser. Sum-free sets of integers[J]. Acta Arith., 1966,11:393-396: MR 34 # 69.

[4] L D Baumert. Sum-free sets[J]. J. P. L. Res. Summary No 36 - 10, 1961,1:16-18.

[5] S L G Choil. The largest sum-free subsequence from a sequence of n numbe[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1973,39:42-44: MR 47 # 1771.

[6] S L G Choi, J Komlós, E Szemerédi. On sum-free subsequences[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1975,212:307-313.

[7] H Fredericksen. Five sum-free sets, Proc[C] // 6th Ann. S. E. Conf. Graph Theory, Combin. & Comput. Congressus Numerantiun XIY, Utilitas Math. Pub. Inc 1975,309-314.

[8] R W Irving. An extension of Schur's theorem on sum-free partitions[J]. Acta Arith., 1973,25:55-63.

[9] J Komlós, M Sulyod, E Szemerédi. Linear problems in combinatorial number theory Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1975, 26:113-121.

[10] L Mirsky. The combinatorics of arbitrary partitions[J]. Bull. Inst. Math. Appl., 1975,11:6-9.

[11] I Schur. Uber die Kongruenz $x^m+y^m\equiv z^m \pmod p$[J]. Jahresb. der Deutsche Math. -Verein. 1916,25:114-117.

[12] W D Wallis, A P Street, J S Walli. Combinatorics: Room Squares, Sun-free Sets, Hadamard Matrices, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

[13] S Znóm. Generalisation of a number-theoretic result[J]. Mat. -Fyz. Casopis, 1966,16:357-361.

[14] S Znóm. On k-thin sets and n-extensive graphs[J]. Math. Casopis, 1967,17:297-307.

资料包

附录2 强无和类

Turán已证明,如果整数$[m,5m+3]$以任意方式分为两类,那么,至少在一类中,方程

$$x+y=z$$

有$x\neq y$的解,且这对于$[m,5m+2]$不真.$[m,5m+2]$分解成两无和集合的唯一性已被Znám证实.

Turán又研究了x,y不一定是不相同的问题.定义$s(m,n)$为这样的最小整数,它使得无论$[m,m+s]$被怎样的分为n类,这n类中必有一类包含$x+y=z$的一个解.他的与头一个问题对应的结果是$s(m,2)=4m$.显然,$s(1,n)=s(n)-1$.由Irving的结果推出$s(m,n)\leqslant m[n!(e-1/24)-1]$.Abbott和Znám分别找到$s(m,n)\geqslant 3s(m,n-1)+m$,从而$s(m,n)\geqslant m(3^n-1)/2$.

如果某类不含有方程$x+y=z$或$x+y+1=z$的解,则Abbott和Hanson称其为强无和的.他们证明了,如果$r(n)$是这样的最小的r,它使得无论$[1,r]$怎样分成n类,他们中必有一类含有上述方程的解,则$r(m+n)\geqslant 2r(n)s(m)-r(n)-s(m)+1$.他们用此改进了$s(m,n)$的下界.他们的方法结合Fredericksen的例子给出$s(m,n)>cm(315)^{n/5}$.

参考文献

[1] S Znám. Megjegyzések Turán Pál egy publikálatlan ereményébez[J]. Mat. Lapok, 1963,14:307-310.

附录3 van der Waerden 和 Schur 问题的推广

Rado研究了 van der Waerden 和 Schur 问题的若干推广.例如,他证明了,对任意自然数 a,b,c,必存在 u,使得无论$[1,u]$怎样分成两类都有,至少在一类中 $ax+by=cz$ 有解.他给出了 u 的一个值.但像 Schur 的问题一样,这还不是可能达到的最好的结果.例如,对于 $2x+y=5z$,从定理有 $u=20$,而它对于 $u=15$ 也为真,尽管对更小的 u 它不成立:下列二集合

$$\{1,4,5,6,9,11,14\} \text{ 和 } \{2,3,7,8,10,12,13\}$$

中没有一个包含 $2x+y=5z$ 的解.如果我们允许分成三类,那么45便是这样的最小的 u 值:

$\{1,4,5,6,9,11,14,16,19,20,21,24,26,29,31,34,36,39,41,44\}$,

$\{2,3,7,8,10,12,13,15,17,18,22,23,27,28,32,33,37,38,42,43\}$,

$\{6,7,8,9,25,30,35,40\}$.

对于方程 $\sum a_ix_i=0$,其中 a_i 是非零整数,如果存在一个 $u(n)$(我们假定它为最小的)使得区间$[1,u(n)]$无论怎样分成 n 类,都至少有一类包含方程的解,则 Rado 称此方程为 n - 正则的.又如果方程对所有的 n 都是n - 正则的,那么称方程是正则的,并且他证明了,恰好当$\sum a_j=0$对某些 a_i 的子集成立时,方程是正则的.例如,对 $a_1=a_2=1$ 且 $a_3=-1$,我们对 Schur 的原问题有 $u(n)=s(n)$. Salié 和Abbott 研究了找 $u(n)$ 下界的问题.

上面例子当 $a_1=2,a_2=1,a_3=-5$ 时不是正则的.因为我们可以看出,它是2 - 正则和3 - 正则的,但不是4 - 正则的.如把 5^kl 的每一个数(其中 $5\nmid l$)按照 k 是奇或偶和 $l\equiv\pm1$ 或 $\pm2 \pmod 5$ 分成四类,可以证明,这四类中没有一类含有 $2x+y=5z$ 的解.

对于方程 $2x_1+x_2=2x_3$ 和 $x_1+x_2+x_3=2x_4$,, Salié, Abbott 及 Abbott 和 Hanson 相继得到较好的下界,最后分别得到 $u(n)>c(12)^{n/3}$ 和 $c(10)^{n/3}$.

资料包

参考文献

[1] Walter Deuber. Partitionen and lineare Gleichungssysteme[J]. Math. Z., 1973,133:109-123.

[2] R Rado. Studien zur Kombinatorik[J]. Math. Z., 1933,36:424-480.

[3] E R Williams, M Sc thesis[M], Memorial Univ., 1967.

一个判别 F_n 是否为素数的方程

周宗奇[①]

定理 1 设 $F_n = 2^{2^n} + 1, n \in \mathbf{N}$,若方程

$$x^2 + 2^{2^{n-1}}x + 2^{2r}y^2 \pm y = 0 \quad ①$$

(x, y 均为正奇数,$r \geqslant 1$ 为整数)有整数解,则 F_n 为合数,若无整数解则 F_n 为素数.

在证明定理 1 之前先证明以下定理:

定理 2 方程

$$x^2 + 1 = y^2 + z^2 \quad ②$$

(x 为偶数,y 为奇数且 $\neq 1$)的参数通解为

$$x = 2^{R-r}k(2^Rk \pm 1)/q + 2^rq$$

$$y = 2^{R+1}k \pm 1$$

$$z = 2^{R-r}k(2^Rk \pm 1)/q + 2^rq$$

其中 $r \geqslant 1, R > r, q \mid k(2^Rk \pm 1)$,$k$ 为任意奇数.

证明 设 $x = a + b$,因 y 为奇数且 $y \neq 1$,那么原方程可化为

$$(a + b)^2 + 1 = y^2 + (a + b - s)^2 \quad 0 < s < (a + b)$$

那么有

$$y^2 - 2s(a + b) + s^2 = 1$$

$$s_{1,2} = a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - y^2 + 1}$$

因 $y > 1$,只能有 $y^2 = 4ab + 1$,得 $ab = \frac{(y + 1)}{2} \cdot \frac{(y - 1)}{2}$,设 $\frac{y + 1}{2} = t$,则 $\frac{y - 1}{2} = t - 1$,$ab = t(t - 1)$(此为两连续整数之积).那么,a, b 应均为偶数,若 a, b 一奇一偶,则 $a + b =$ 奇,与 x 为偶矛盾,若 a, b 均奇,a, b 之积不为连续数之积,故只能有 a, b 均偶.

有 $s_{1,2} = a + b \pm (a - b)$,$s_1 = 2a$,$s_2 = 2b$,故方程②的解应为

$$x = a + b, \quad y = \sqrt{4ab + 1}, \quad z = \pm (a - b)$$

若设 $a = 2^rq$ $r \geqslant 1$,q 为奇数,则

$$b = 2^{R-r}k(2^Rk \pm 1)/q, R > r, q \mid k(2^Rk \pm 1)$$

则方程②的通解形式为

$$x = 2^{R-r}k(2^Rk \pm 1)/q + 2^rq$$

---

① 湖北煤炭地质勘查院:周宗奇.通讯地址:湖北省武汉市江夏区纸坊镇物测队院内.邮编:430200

$$y = 2^{R+1}k \pm 1$$

$$z = 2^{R+r}k(2^{R}k \pm 1)/q - 2^{r}q$$

定理 1 的证明：

$F_n = 2^{2^n} + 1 = (2^{2^{n-1}})^2 + 1$，若 F_n 为合数，则必有 $2^{2^{n-1}} = 2^{R-r}k(2^{R}k \pm 1)/q + 2^{r}q$，且 $R = 2r$，即有

$$2^{n-1}_{2-r} = k(2^{2r}k \pm 1)/q + q \qquad ③$$

我们将 ③ 看做 q 为未知数的方程，并设 $x = q, y = k$，则有

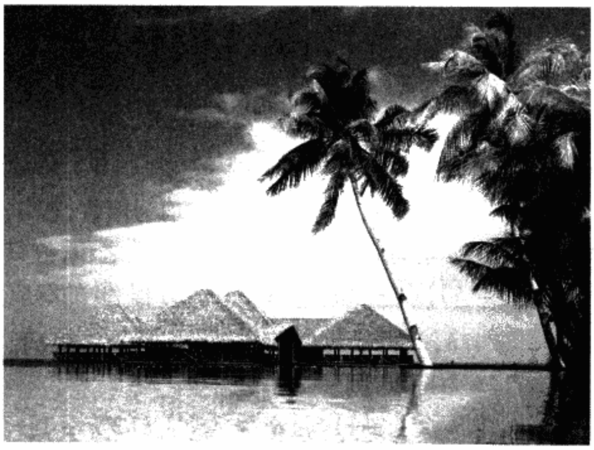
$$x^2 - 2^{n-1}_{2-r}x + 2^{2r}y^2 \pm y = 0 \qquad ④$$

显然，如果 ④ 中有一个方程有整数解，则 F_n 为合数，否则 F_n 为素数. 定理 1 证毕.

另一个相关的猜想：由于 $2^{2^n}+1$ 实际属于 x^2+1 形式的数，这种形式的素数是否有无穷多是一个未解决的难题，本人在此提一个猜测，如果此猜测得以证实，则 $x^2 + 1$ 形式甚至 $x^2 + y^2$ 形式的数中有无穷多个素数的问题，自然就解决了.

猜想如下：

设 $0 \leqslant n < 2$，以于任意给定的整数 a，若 $b > a$，则必存在一个整数 k，$b \leqslant k \leqslant 2b$. 使得 $k^{2^n} + a^{2^n}$ 为一素数.



Classroom Notes

EDITED BY C.O. OAKLEY, Haverford College

Case I ($n = 2$). The general quadratic equation is $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. r_1 and r_2 be its two roots so that

$$r_1 + r_2 = -b/a, \quad r_1 r_2 = c/a \qquad ①$$

Then

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} \qquad ②$$

Extracting the square root of ② and solving with the first equation of ① results in

$$r_1 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a), \quad r_2 = (-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a).$$

These give permuted values for r_1 and r_2, and the two roots are given by $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

Case II ($n = 3$). It is sufficient to consider the reduced cubic

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad ③$$

Let r_1, r_2, and r_3 be its three roots so that

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \qquad ④$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = a \qquad ⑤$$

$$r_1 r_2 r_3 = -b \qquad ⑥$$

Substituting r_1, r_2, and r_3 successively in ③, adding the resulting equations, and using ④ and ⑥ yields $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 - 3r_1 r_2 r_3 = 0$, which factors into

$$(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + \omega r_2 + \omega^2 r_3)(r_1 + \omega^2 r_2 + \omega r_3) = 0 \qquad ⑦$$

where ω and ω^2 are the imaginary cube roots of unity. From ⑦ we have the three possibilities $r_1 = -(r_2 + r_3)$, $r_1 = -(\omega r_2 + \omega^2 r_3)$, $r_1 = -(\omega^2 \gamma_2 + \omega r_3)$. These results suggest that the three roots of (3) can be found by setting

$$r_1 = -(s + t), \quad r_2 = -(\omega s + \omega^2 t), \quad r_3 = -(\omega^2 s + \omega t) \qquad ⑧$$

and determining s and t so that (8) satisfies ④, ⑤, and ⑥.

Now ④ is satisfied for all s and t since $\omega^2 + \omega + 1 = 0$; therefore, ⑤ and ⑥ become, respectively

$$st = -a/3 \qquad ⑨$$

$$s^3 + t^3 = b \qquad ⑩$$

Raising ⑨ to the third power and solving simultaneously with ⑩, using the method of Case I, yields

$$s = \left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right\}^{1/3}, \quad t = \left\{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right\}^{1/3}$$

The first equation of ⑧ then becomes

$$r_1 = \left\{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right\}^{1/3} + \left\{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right\}^{1/3}$$

which is Cardan's result. The other two roots are given by the second and thin equations of ⑧.

Case III ($n = 4$). Here it is sufficient to consider $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ whose roots will be denoted by r_1, r_2, r_3, and r_4. Then

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = a \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_2r_3r_4 + r_1r_3r_4 = -b \\ r_1r_2r_3r_4 = c \end{array}\right\} \qquad ⑪$$

英语之角

Making the substitutions

$$u = r_1 + r_2, \quad v = r_3 + r_4, \quad s = r_1r_2, \quad t = r_3r_4 \qquad ⑫$$

in equations ⑪ yields

$$u + v = 0, \quad s + t + uv = a, \quad sv + tu = -b, \quad st = c$$

These reduce to

$$s + t = a + u^2 \qquad ⑬$$

$$u(s - t) = b \qquad ⑭$$

$$st = c \qquad ⑮$$

Solving ⑬ and ⑭ for s, t in terms of u, a, and b results in

$$s = \frac{1}{2}\left\{a + u^2 + \frac{b}{u}\right\}, \quad t = \frac{1}{2}\left\{a + u^2 - \frac{b}{u}\right\} \qquad ⑯$$

Substituting s, t from ⑯ in ⑮ and simplifying leads to

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0 \qquad ⑰$$

This is a cubic equation in u^2 and can be solved by the method of Case II; from this u is found and hence v. Using the values of u, s and v, t in pairs according equation ⑫ and the technique of Case I determines r_1, r_2, r_3, and r_4.

Equation ⑰ is identical with that obtained by the method of Descart for the solution of the quartic.

Note on a Remark of Wald

M. M. RAO, University of Minnesota

In Part II, applications of the general theory to special cases, of Sequential Analysis, Wald considers the following simple problem in setting up the sequential probability ratio test for the acceptance inspection of a lot where each unit is classified into one of two categories. Let p be the unknown proportion of defectives in the lot. Usually it is possible to specify p_0 and p_1 such that we prefer acceptance if $p \leqslant p_0$, prefer rejection if $p_1 \leqslant p$, and will be indifferent if $p_0 < p < p_1$, where p_0, p, and p_1 are all between 0 and 1. Given α and β, the type I and type II errors respectively, the appoximate equations of lines that divide the sample space into three mutually exclusive sets for the decisions decribed above are given by.

$$a_m = \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} + m \frac{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \quad ①$$

$$r_m = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} + m \frac{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \quad ②$$

i.e.

$$a_m = h_1 + ms, \quad r_m = h_2 + ms \quad ③$$

where a_m and r_m are respectively the acceptance and rejection numbers, and h_1, h_2, s stand for the corresponding quantities in ① and ② above. Clearly, s the slope being the same, the lines for (a_m, m) and (r_m, m) are parallel. The quantity s is important in the test procedure, since the range of its variability with respect to p_0, p_1 is usually of interest; thus, we consider it here.

Wald remarks that it can be shown that s lies between p_0 and p_1, the quantities that appear in ①, ② and ③ above. The proof of this statement is not given there. A. J. Duncan, in this book, has given a proof in a mathematical appendix, using the first mean value theorem for integrals.

Since Wald has limited himself to as simple a mathematics as possible, one feels that it must be possible to give a simpler proof of this remark than the one given in Duncan's book. It

is the purpose of this small note to supply such a proof.

We now prove that

If $s = \dfrac{\log \dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \dfrac{p_1}{p_0} - \log \dfrac{1-p_1}{1-p_0}}$ where $0 < p_0 < p_1 < 1$, then $p_0 < s < p_1$.

Proof. Given that $p_0 < p_1$, so that $p_0(1-p_1) < p_1(1-p_0)$ or

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{p_1-p_0} < \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_1-p_0} \tag{4}$$

since $p_1 - p_0 > 0$, and the inequality is unaltered; that is

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{1-p_0} \times \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{1-p_1} < \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_1}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{p_0} \tag{5}$$

Now this inequality can be written as a product of the following two inequties. Note that no other pair of inequalities whose product is ⑤ may be form. Thus

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{1-p_0} < \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{p_0} \tag{6}$$

$$\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{1-p_1} < \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_1} \tag{7}$$

The motivation in writing this is to separate ⑤ into p_0 powers and p_1 powers, since we want anyway the ratios p_1/p_0 and $(1-p_0)/(1-p_1)$.

Now ⑥ may be simplified as

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) < \left[\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\right]^{p_0}$$

Taking log*s* and then multiplying by minus one, we get

$$\log\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right) > p_0\left[\log\frac{p_1}{p_0} - \log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right]$$

which gives

$$p_0 < \frac{\log\left(\dfrac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\log\dfrac{p_1}{p_0} - \log\left(\dfrac{1-p_1}{1-p_0}\right)} = s$$

A similar simplification of ⑦ gives that $p_1 > s$, and combining these two in ities completes the proof of the remark of Wald.

“希望杯”全国数学邀请赛香港赛区命题委员会工作会议纪要

“希望杯”全国数学邀请赛香港赛区命题委员会首次工作会议于2006年5月20日下午在深圳市四川宾馆召开.出席会议的有“希望杯”全国数学邀请赛香港赛区组织委员会主任委员陈铭贤先生,组织委员会副主任委员、命题委员会主任委员吴康先生,命题委员会副主任委员黄克廉先生,命题委员会常务委员(以简体字笔画为序)卢建川先生、冯跃峰先生、吴重振先生、吴新华先生和黄邦德先生.命题委员会常务委员杨学枝先生、李兴怀先生、欧永和先生原定参加会议,后因公事请假.命题委员会其他委员因各种原因没有通知与会.吴康先生主持了会议.

经过坦率、热烈、融洽、高效率的讨论,会议确认和确定了以下事项:

一、香港赛区首届“希望杯”数学竞赛于2006年7月8日10:40 ~ 12:00(小学,共80分钟)、14:00 ~ 16:00(中学,共120分钟)举行,分小四、小五、小六、中一、中二、中三、中四,共7个年级.(不分初赛、决赛,一次过比赛)

二、小四、小五、小六试卷均为20道填空题,每题5分,满分100分;中一、中二、中三试卷为24道填空题,每题5分,满分120分.每份试卷均按易、中、难题3:5:2的比例为合适.

三、中四试卷为18道填空题,每题5分,以及三道解答题,每题10分,满分120分.填空题和解答题分别按易、中、难题1:1:1和0:2:1的比例为合适.

四、每道填空题可以1空,也可以2空(须说明1空2分,另1空3分);每空答对给满分,答错给0分.每道解答题可按解题步骤分步评分.

五、试题内容须与香港现行中小学课程内容密切相关,可具有一定的灵活性、趣味性、开放性和探究性.试题均用繁体字印刷(不出英文题目).注意每套试题应有适量的基本题,特别是易于阅读和解答的简单题;要顾及香港学生的学习水平、生活背景和习惯;不要偏难偏深,不要过于超前,不要陷入繁杂的计算,文字量和计算量不要过大;不要照抄现成的考题(可以改编).香港课程内容可参阅网站www.emb.gov.hk/简体中文/幼稚园、小学、中学教育/课程发展/学习领域/数学教育/课程纲要.

六、命题程序如下:

1.请“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会提供各个年级各一套试题或若干道试题作为候选试题,委托香港赛区命题委员会副主任委员龙开奋先生联系“希望杯”全国数学邀请赛组织委员会常务委员、命题委员会主任周国镇先生,最好能在2006年5月31日前实现.

2.委托黄克廉先生、吴重振先生于2006年5月28日前提供适当的香港中小学数学竞赛考题资料给命题委员会常务委员.

3.请命题委员会每位常务委员、委员在2006年5月31日前,提供1道或多道试题(以填空题为主)及详细解答。委托吴康先生负责收集.

4.在香港征集试题(方法另拟),委托黄克廉先生负责收集.

5.委托欧永和先生(负责小四)、卢建川先生(负责小五)、黄邦德先生(负责小六)、李兴怀先生(负责中一)、吴新华先生(负责中二)、冯跃峰先生(负责中三)、杨学枝先生(负责中四)命题,在2006年6月14日前提供(电子版)"初稿"(包括解答和评分标准).委托吴康先生负责收集.

6.委托黄克廉先生、吴重振先生组织命题委员会中的香港委员负责审稿,在2006年6月21日前提供对"初稿的审查和修改意见".

7.委托吴康先生、龙开奋先生对"初稿"、"对初稿的审查和修改意见"作审定.在2006年6月28日前提供定稿付印.

(2006年5月21日,深圳)

“希望杯”全国数学邀请赛香港赛区组织委员会顾问、主任委员、副主任委员名单

顾　问

徐利治　著名数学家，数学教育家，博士生导师，教授，《数学研究与评论》主编，《逼近论及其应用》主编，《数学教育学报》顾问，大连理工大学应用数学研究所名誉所长，华中科技大学数学系名誉系主任，《高等学校计算数学学报》名誉主编.

主任委员

陈铭贤　著名教育家，社会活动家，香港当代数学奥林匹克学会会长，香港文教协会会长，美国酒店协会教育学院——北美教育学院副院长，中国河北省邯郸市政府顾问、邯郸市教育局高级教育顾问，前香港城市大学高级学术顾问，前中国科技大学深圳研究院总监，前北京应用技术大学商学院副院长. hkfei2004@yahoo.com.hk

副主任委员

吴　康　数学教育专家，华南师范大学副教授，研究生导师，《中学数学研究》主编，中国数学奥林匹克高级教练员，南方数学奥林匹克研究所常务副所长，中国优选法统筹法与经济数学研究会数学教育专业委员会常务委员，中国高等教育学会教育数学专业委员会常务理事，《数学教育学报》编委，广州市小学数学奥林匹克培训学校顾问，香港当代数学奥林匹克学会副会长. wukang12345@126.com

龙开奋　数学教育专家，广西师范大学副教授，研究生导师，中国数学奥林匹克高级教练员，中国优选法统筹法与经济数学研究会理事、数学教育专业委员会常务委员，中国高等教育学会教育数学专业委员会常务理事，广西高等教育学会数学专业委员会副主任兼秘书长，桂林市数学会秘书长，香港当代数学奥林匹克学会副会长. longkf168@gl.gx.cninfo.net

“希望杯”全国数学邀请赛香港赛区命题委员会名单

顾　问

单　墫　著名数学教育专家，博士，南京师范大学教授，博士生导师，原数学系主任，中国数学奥林匹克高级教练员，前 IMO 中国代表队主教练.

李尚志　著名数学家，数学教育专家，博士，北京航空航天大学理学院院长，教授，博士生导师，中国数学奥林匹克高级教练员，原中国科技大学数学系主任. lisz@ustc.edu.cn

罗增儒　著名数学教育专家，陕西师范大学教授，博士生导师，原教务处处长，中国数学奥林匹克高级教练员. zrluo@snnu.edu.cn

主任委员

吴　康　（兼）

副主任委员

龙开奋　（兼）

黄克廉　香港创思数学教育学会会长，佛教何南金中学副校长. whlabhnkc.edu.hk

常务委员

（以简体字笔画为序）

王卫华　中学数学一级教师，《竞赛数学之窗》主编，中国数学奥林匹克高级教练员. wzh - 94@163.com

卢建川　广州大学数学与信息科学学院副教授，数学系副主任，中国数学奥林匹克高级教练员，广东省高师数学教育研究会副秘书长. kentjysh@21cn.com

冯跃峰　广东省特级教师，深圳市高级中学学术委员会主任，深圳市学科带头人，中学高级教师，中国数学奥林匹克高级教练员. fengyfl11@sina.com 或 fengyf@cn - school.com

李兴怀　广东省特级教师，华南师范大学附中高级教师，中国数学奥林匹克高级教练

员,研究生导师.lixh@hsfz.net.cn

陈汉夫 香港中文大学理学院数学系教授.

杨德胜 上海市特级教师,上海交通大学附中高级教师,中国数学奥林匹克高级教练员.yangdesheng1957@sina.com

杨学枝 福建省特级教师,福州市第二十四中学副校长,高级教师,中国数学奥林匹克高级教练员,福建省数学会理事暨初等数学分会理事长,福州市数学会副理事长,《不等式研究通讯》编委、原主编.yangxuezhi1121@126.com

吴重振 香港小学及初中数学奥林匹克代表队总教练,港岛民生书院训导主任,中国数学奥林匹克高级教练员.ccng@imsc.edu.hk

吴新华 中学高级教师,中山纪念中学副校长,广州大学数学教育硕士研究生导师.wxh@zsjz.com

欧永和 华南师范大学附中高级教师,原数学科组长,中国数学奥林匹克一级教练员.ouyh@hsfz.net.cn

黄邦德 深圳市邦德文化发展有限公司总经理,中国数学奥林匹克一级教练员.yuto97@163.com

黄家乐 香港大学教育学院教授,香港数学学会会长.

委　员

(以简体字笔画为序)

王向东 佛山科技学院教授,理学院副院长,研究生导师,南方数学奥林匹克研究所所长,中国数学奥林匹克高级教练员.dong6210@163.com

尤利华 博士,华南师范大学副教授,研究生导师.ylhua1976@sohu.com

叶中豪 上海教育出版社副编审,中国数学奥林匹克高级教练员.luckyz05@yahoo.com.cn

刘培杰 哈尔滨工业大学出版社第四编辑室主任,副编审,《数学奥林匹克与数学文化》主编.lpj1378@yahoo.com.cn

刘来福 北京师范大学教授,博士生导师,北京数学培训学校校长,中国数学奥林匹克高级教练员.liulaifu@bnu.edu.cn

师广智 《中学生数理化》高中版主编,编审,河南省数学会理事.sgz0563@tom.com

孙治中 中学高级教师,广东省佛山市教研室数学教研员,南方数学奥林匹克研究所副所长.fsszz@163.net

沈文选 湖南师范大学教授,研究生导师,数学奥林匹克研究所副所长,《现代中学数学》常务副主编,中国数学奥林匹克高级教练员.hydeng@hunnu.edu.cn

李建泉 天津师范大学数学科学学院原副院长,副教授,研究生导师,教育科学与数学奥林匹克研究所所长,中国数学奥林匹克高级教练员,天津市数学会副理事长,《数学教育学报》董事会秘书长,《中等数学》编委.leejianquan@eyou.com

或 leejianquan@163.com

杜　坚　广州市执信中学高级教师，原教研室主任，数学科组长，澳门培正中学数学科组长.

苏文龙　广西大学梧州分校科研处处长，教授，研究生导师. wenlongsu@21cn.com

张承宇　深圳中学高级教师，中国数学奥林匹克高级教练员. chzhang@shenzhong.net

陈光捷　湛江市第一中学高级教师，广东省数学奥林匹克高级教练员. chengjmx@yahoo.com.cn

杨健辉　中学高级教师，广州市教育局教研室数学教研员，广州市小学数学奥林匹克培训学校校长.

杨　光　广东省特级教师，广雅中学高级教师，原数学科组长.

吴伟朝　广州大学副教授，研究生导师，中国数学奥林匹克高级教练员，南方数学奥林匹克研究所副所长，《数学竞赛之窗》副主编. wuweichao2004@yahoo.com.cn

林国泰　华南师范大学副教授，研究生导师，原《中学数学研究》副主编.

林　冬　中国人民大学附中一级教师，中国数学奥林匹克一级教练员.

范四清　广东博文学校副校长，高级讲师，中国数学奥林匹克高级教练员. scottfan@21cn.com

罗金宏　广东省特级教师，中国数学奥林匹克高级教练员，中学高级教师，嘉应学院兼职教授，江门市福泉中英文学校校长. fuquanxiaoxue@sina.com.cn

胡大同　中国石油大学附中高级教师，中国数学奥林匹克高级教练员，原中国数学会理事，前 IMO 中国代表队教练. hdtong@263.net

钟湘湖　原惠州市教育局副局长，中学高级教师，惠州市罗增儒奥林匹克学校校长. ddh668@126.com

钱昌本　汕头大学理学院原副院长，副教授，中国数学奥林匹克高级教练员.

梁　晓　中学高级教师，阳江市第一中学校长，广东省数学奥林匹克高级教练员. ycyz2003@tom.com

曹汝成　华南师范大学副教授，研究生导师，原数学系副主任，原《中学数学研究》主编.

黄文斐　广西壮族自治区桂林中学高级教师，原数学科组长，中国数学奥林匹克高级教练员.

（香港委员名单待定）

第二届全国数学奥林匹克研讨会通讯录
上海 —2005

姓名	工作单位	电子信箱
尧林华	江西临川二中	yoh445@sohu.com
陶晓勇	北京教育学院	
唐大昌	北京海淀区教师进修学校	
汤步斌	北京人大附中	tangbubin@yahoo.com.cn
李新暖	天津《中等数学》杂志	
纪翠蓉	天津《中等数学》杂志	zdsx@chinajournal.net.cn
李振权	大连二十四中学	
周红兵	上海上师大二附中	
宋卫兵	上海金山中学	
冯有兵	江西鹰潭一中	
庄建军	江西余江一中	
程炜敏	中山纪念中学	
吴新华	中山纪念中学	
曹四清	广东中山市中山纪念中学三鑫双语学校	csqcsq999@126.com
沈伟忠	广东中山市中山纪念中学三鑫双语学校	s902w@163.com
王树国	湖南师大附中	wsg@hnsdfz.org
符开广	湖南师大附中	fkg999999@163.com
肖登鹏	湖南师大附中	xiaodengpeng@126.com
赵洪波	湖南师大附中	
羊明亮	湖南师大附中	yangmingliang@mail.china.com
孙锡九	郑州一中	
张志平	河南大学数学与信息科学学院	
杜　瑜	河南省实验中学	
王惠兴	河南省实验中学	hnwhx3@sohu.com

邹　明	青岛二中	zm58120413579@163.com
邹黎华	福州第二中学	ZLH90@tom.com
高岚龙	福州高级中学	Littledragon049@163.com
王宏伟	云南师大附中	wanghw@ynsdfz.org
田加贵	云南师大附中	
龚浩生	江西省宜丰中学	ghs418@sohu.com
严贤付	青岛二中	Zhizhe1216@163.com
聂志明	江苏省怀仁中学	zhiminnie1130@sina.com
林　常	福建教育学院	Lin20038866@yahoo.com.cn
张灵君	浙江省乐清市乐成公立寄宿学校(325600)	yqlingjun@163.com
范思琪	广东晋宁二中	fsi012@tom.com
王启东	浙江省上虞市春晖中学(312353)	wqd2110205@sina.com
姚建新	上海市奉贤区教师进修学院(201400)	
方廷刚	四川成都七中	ftg1029@126.com
邓集春	湖南省武冈市第十中学	
吕志勇	延安中学(200335)	zhiyonglv@citiz.net
萧振纲	湖南理工学院(414006)	xiaozg@163.com
石赛英	杭州师范学院	ssy12339@yahoo.com.cn
林永伟	杭州师范学院	lingyongwei88@163.com
冯跃峰	深圳高级中学	fengyf@cn - school.com
黄军华	深圳中学	jhhuang@shenzhong.net
黄　群	广州大学数学与信息科学学院(510006)	hqmirrore@126.com
宁　靓	广州大学数学与信息科学学院(510006)	hqmirrore@126.com
吕松涛	广州大学数学与信息科学学院(510006)	lvsongtao@eyou.com
黄仁寿	湖南省教科院	999huangrenshou@mail.china.com
许鹏飞	湖南长沙市雅礼中学	
蒋太煌	湖南长沙市长郡中学	jth41241@sina.com
沈文选	湖南师范大学	shenwenxuan2005@21cn.com
周建新	上海中学	kexinlisz@hotmail.com
顾　滨	上海中学	
柯新立	上海中学	
陈建豪	上海民办华育中学	janhow chen@yahoo.com.cn

业内信息

袁金龙	安徽师范大学附属中学	
李宁远	广东省中山市第一中学	zsyzlny@163.com
曹建华	上海交大附中	
侯　磊	上海交大附中	houl@yeah.net
苏远东	华中师大一附中	dongdong85866@sohu.com
边红平	武钢三中	bianhongping@yahoo.com.cn
岑爱国	武钢三中	
张正杰	华中师大	
方秦金	龙岩一中	FQj@LYYZ.net
陈木孙	龙岩一中	cms@LYYZ.net
傅龙骧	兰州交大东方中学	Longxiang fu@sina.com
胡圣团	湖南省澧县一中	shengtuan@163.com
李炎辉	湖南省澧县一中	Rong0516@126.com
李庭华	湖南省澧县一中	
曹新跃	江苏省常州高级中学	cxy93070071@yahoo.com.cn
周敏泽	江苏省常州高级中学	zhouminze@hotmail.com
徐德同	江苏省常州高级中学	xudetong878@163.com
邬天泉	浙江台州市椒江区洪家中学	tiqw@163.com
潘　宁	上海当代中学(200070)	
杭顺清	上海当代中学(200070)	ddmb@zb.edu.sh.cn
杨金城	河南省新乡市第一中学	
谷玉萍	河南省新乡市第一中学	
刘初喜	华东师大二附中(201203)	liuchuxi@hsefz.com
唐立华	华东师大二附中(201203)	tanglihua@hsefz.com
范端喜	华东师大二附中(201203)	fanduanxi@hsefz.com
刘利益	哈尔滨师大附中(150080)	liuliyi001@163.com
赵　岩	哈尔滨师大附中(150080)	qiumizhao@hsdfz.com.cn
牟妙俊	浙江温州乐成公立寄宿学校(325600)	
李朝辉	上海复旦附中(200433)	zhuil@163.com
胡海帆	浙江温州中学(325014)	
金荣生	浙江温州中学(325014)	
陈相友	浙江温州中学(325014)	wzzx996@163.com

刘　凌	江西新余一中(338025)	liuling6666@tom.com
许康华	浙江省富阳二中(311400)	xukanghua4101@sohu.com
段春炳	浙江省富阳市永兴中学(311400)	duancb@yxms.net
刘培杰	哈尔滨工业大学出版社(150001)	lpj1378@yahoo.com.cn
张国新	深圳翠园中学	
王淼生	厦门一中	
张承宇	深圳中学	zcy@shenzhong.net
孙庆利	石家庄学院数学系	qinglis@163.com
李兴怀	华南师大附中(510630)	lixh@hsfz.net.cn
韦吉珠	华南师大附中	weijz@yahoo.com
郭希连	武钢三中(430080)	ldh0514@163.com
谢林晋	武钢三中(430080)	HBAMS@163.com
黄　珺	武汉一中(430000)	huangjundd@yahoo.com.cn
李　忠	天津华英学校	lleeom@sina.com
曹瑞彬	江苏省启东中学	caoruibin@126.com
王　生	江苏省启东中学	wsqdzx@126.com
赖百奇	福建省福鼎市求新中学	laibaiqi@n9.com
肖铁荣	上海华东师大三附中	xiaotierong@sohu.com
白伟雄	上海金山教师进修学院(200540)	bwxshjs@163.com
郑日峰	浙江杭州学军中学	zhengrf@hzx.jhs.com
陈金辉	上海复旦附中(200433)	hgai730@sohu.com
蔡小雄	浙江杭州二中	cxx11@etang.com
陈德燕	福州一中	
王　欣	福州一中	
郭要红	安徽师范大学数学系(241000)	guoyaohong1108@163.com
沈虎跃	浙江镇海中学	huyue shen@yahoo.com.cn
蔡亲鹏	海南师范学院	caiqp@hainnu.edu.cn
陶平生	江西科技师范大学数学系	
倪　明	华东师大出版社	
蒋志明	上海金山区教育局	
倪明康	华东师范大学数学系	
裘宗沪	中科院数学所	

吴建平	首都师范大学数学系	wjianp@YEAH.net
陈永高	南京师范大学数学系	
冷岗松	上海大学数学系	
李胜宏	浙江大学数学系	
熊　斌	华东师范大学数学系	
冯志刚	上海中学	
孙文先	台湾九章出版社	
冯祖鸣	美国	
徐红瑾	华东师范大学出版社	
高糜娟	华东师范大学出版社	
应向阳	华东师范大学出版社	
司　林	上海大学数学系	



读者来信　第一封①

刘培杰编辑：

您好，近读沈文选主编之《平面几何试题诠释》，窃以为系“刘培杰数学工作室”策划之又一佳作，读之甚喜.

现对该书下册 p422“一道东南赛试题的背景与引申”亦略作“引申”.

1　一种三角证法

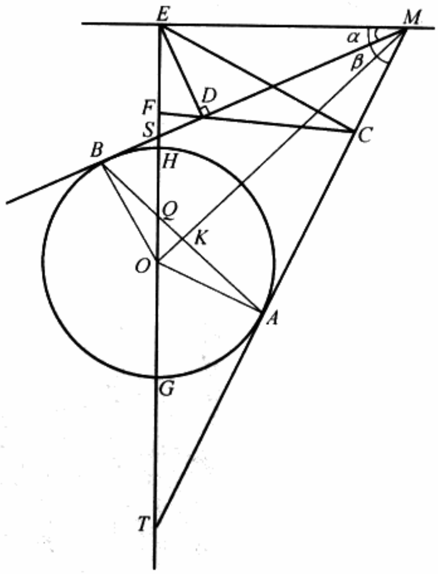


图 1

设 $\angle EMD=\alpha$，$\angle EMC=\beta$ 易得

$$FD=\frac{x\sin^2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$FC=\frac{x\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$EF^2=FD\cdot FC$$

所以

$$EF=\frac{x\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

所以

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{x}(\cot\alpha+\cot\beta)$$

$$OM=\frac{EM}{\cos\angle OME}=\frac{x}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

$$OM=\frac{OA}{\sin\angle OMA}=\frac{R}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$R=x\cdot\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

$$EH=EO-R=x\cdot\tan\frac{\beta+\alpha}{2}-x\cdot\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}=$$

① 作者：武瑞新，武汉市汉阳区永丰派出所.

$$x\cdot\frac{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}=x\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$

$$EG=EO+R=x\cdot\tan\frac{\beta+\alpha}{2}+x\cdot\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}=x\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$

所以
$$\frac{1}{EH}+\frac{1}{EG}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\beta}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\beta}{2}}\right)=\frac{1}{x}(\cot\alpha+\cot\beta)$$

所以
$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{EG}+\frac{1}{EH}$$

因为
$$EG=a+R\quad EH=a-R$$

所以
$$EF=\frac{a^2-R^2}{2a}=\text{定值}$$

2 一种代数证法

设 MD 与 OE 交于 S，MC 与 EO 延长线交于 T，因为

$$\angle FDS=\angle MDC=\angle MEC=\angle ETM$$

所以
$$\triangle FDS\backsim\triangle FTC$$

所以
$$FS\cdot FT=FD\cdot FC=EF^2$$

所以
$$(ES-EF)\cdot(ET-EF)=EF^2$$

所以
$$EF\cdot(ES+ET)=ES\cdot ET$$

所以
$$EF=\frac{ES\cdot ET}{ES+ET}$$

因为 $\triangle EMS\backsim\triangle BOS$，所以

$$\frac{EM}{OB}=\frac{MS}{OS},\quad\frac{EM^2}{OB^2}=\frac{MS^2}{OS^2},\quad\frac{x^2}{R^2}=\frac{x^2+ES^2}{(a-ES)^2}$$

$$(x^2-R^2)\cdot ES^2-2ax^2ES+(a^2-R^2)x^2=0$$

因为 $\triangle OAT\backsim\triangle MET$，所以

$$\frac{EM}{OA}=\frac{MT}{OT},\quad\frac{EM^2}{OA^2}=\frac{MT^2}{OT^2},\quad\frac{x^2}{R^2}=\frac{x^2+ET^2}{(ET-a)^2}$$

$$(x^2-R^2)\cdot ET^2-2ax^2ET+(a^2-R^2)x^2=0$$

由题图可知，$x\neq R$，所以 ES，ET 是方程 $(x^2-R^2)\cdot t^2-2ax^2t+(a^2-R^2)x^2=0$ 的两不等实根，所以

$$ES+ET=\frac{2ax^2}{x^2-R^2},\quad ES\cdot ET=\frac{x^2(a^2-R^2)}{x^2-R^2},\quad EF=\frac{ES\cdot ET}{ES+ET}=\frac{a^2-R^2}{2a}=\text{定值}$$

3 几点引申

设⊙O与OE交于H,G两点,MB与OE交于S,MA与OE交于T,则

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{EG}+\frac{1}{EH} \quad ①$$

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{ES}+\frac{1}{ET} \quad ②$$

$$\frac{1}{EG}+\frac{1}{EH}=\frac{1}{ES}+\frac{1}{ET} \quad ③$$

H,G,C,D 四点共圆 ④

$$EF^2=FH\cdot FG \quad ⑤$$

$$EF^2=FS\cdot FT \quad ⑥$$

$$FH\cdot FG=FS\cdot FT \quad ⑦$$

本文与目前流行的证明思路不同之处在于,不是从直接求 EF 入手,而是从探讨$\frac{1}{EF}$入手,并且为节省篇幅直接利用沈著之图形字母标法.

思路来源:2005年在武汉出现一套名为《中考攻略》的中考模拟试卷,该套试卷共5套试题,其中第四套压轴题最后一问如下:“如图,直角坐标系 XOY 中,O 为坐标原点,$O_1(0,-8)$,⊙O_1的半径为5,P为X轴正半轴上一点,以OP为直径作⊙M,过P作⊙O_1的切线PF,PG交⊙M于R,Q两点,直线RQ交Y轴负半轴于N,当P在X轴正半轴上运动时给出下列两个结论:1. $RP\cdot RQ$的值不变,2. ON的长度不变.其中有且只有一个结论是正确的,请你选择正确的结论,并给出证明.”5套试题中4套压轴题均给出了解答过程,惟独本题只给出:“ON的长度不变,$ON=\frac{39}{16}$”在使用该套试题的所有师生中几乎无人能解答此题,某名校之名师甚至断言这题缺少条件,无法解答.而以本题分量之重,实属正常现象.问题在于本题是否存在适合初中学生的巧妙解法?

如图2,$OB=3$,$OD=13$,因此猜测$\frac{1}{ON}=\frac{1}{OB}+\frac{1}{OD}$,而且本题与第35届IMO预选题及东南赛试题有明显联系.

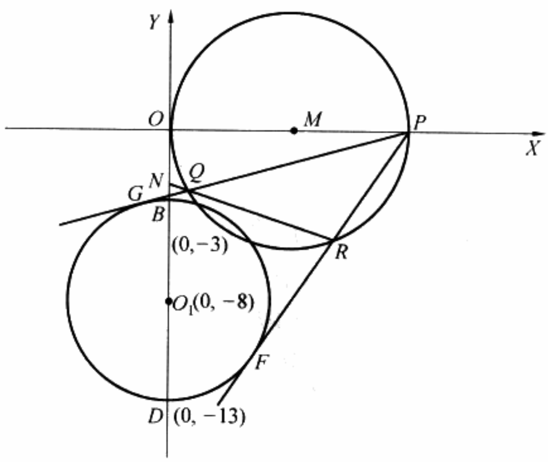


图2

读者来信　第二封

哈尔滨工业大学出版社：

对于你们社所出版的《走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释——历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解》一书中193页的命题1(2001年第14届爱尔兰数学奥林匹克试题)有两种不同于该书中所给出的证法，请编者审读我的证法，如果我的证法有所不妥，请给予改正，下面是我的两种证明方法，请审读.

命题　在 $\triangle ABC$ 中，$AP\perp BC$，O 为 AP 上任意一点，CO，BO 分别与 AB，AC 交于 D，E，求证：$\angle DPA=\angle EPA$.

证明1　令 $\angle DPA=\alpha$，$\angle EPA=\beta$，则 $\angle BPD=90^\circ-\alpha$，$\angle CPE=90^\circ-\beta$，对 $\triangle ABC$ 用塞瓦定理

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AP\cdot\sin\alpha}{BP\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{PC\cdot\sin(90^\circ-\beta)}{AP\cdot\sin\beta}=1$$

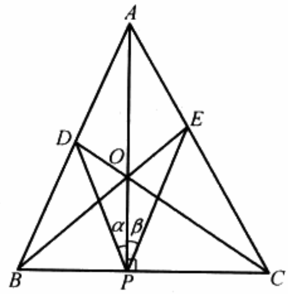


图1

所以
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=1$$
即
$$\tan\alpha=\tan\beta$$
从而
$$\alpha=\beta$$
即
$$\angle DPA=\angle EPA$$

证明2　如图所示，设 $\angle EPA=\alpha$，作 $\angle D'PA=\alpha$，连结 $D'C$，则

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD'}{D'B}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{PC\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}{AP\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AP\cdot\sin\alpha}{BP\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}=1$$

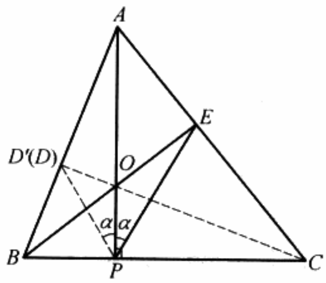


图2

由塞瓦的逆定理知 AP、BE、CD' 共点.

由于 BE、AP 交于点 O，故 CD' 过点 O，即点 D' 为 CO 与 AB 的交点，所以点 D 与点 D' 重合.从而有 $\angle DPA=\angle EPA$.

非常感谢您读完我的两种证明方法.谢谢合作.以上的两种证明方法是我个人所想出的，若与他人相同或类似，纯属偶然.

陈子文

2007.06.10

2006 年全国高中数学联合竞赛试题

（考试时间：上午 8:00 ~ 9:40）

一、选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 已知 $\triangle ABC$，若对任意 $t \in \mathbf{R}$，$|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| \geqslant |\overrightarrow{AC}|$，则 $\triangle ABC$（　　）

A. 必为锐角三角形　　B. 必为钝角三角形　　C. 必为直角三角形　　D. 答案不确定

2. 设 $\log_x(2x^2 + x - 1) > \log_x 2 - 1$，则 x 的取值范围为（　　）

A. $\frac{1}{2} < x < 1$　　B. $x > \frac{1}{2}, x \neq 1$　　C. $x > 1$　　D. $0 < x < 1$

3. 已知集合 $A = \{x \mid 5x - a \leqslant 0\}$，$B = \{x \mid 6x - b > 0\}$，$a, b \in \mathbf{N}$，且 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{2,3,4\}$，则整数对 (a, b) 的个数为（　　）

A. 20　　B. 25　　C. 30　　D. 42

4. 在直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中，$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$，$AB = AC = AA_1 = 1$. 已知 G 与 E 分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点，D 与 F 分别为线段 AC 和 AB 上的动点（不包括端点）. 若 $GD \perp EF$，则线段 DF 长度的取值范围为（　　）

A. $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1)$　　B. $[\frac{1}{5}, 2)$　　C. $[1, \sqrt{2})$　　D. $[\frac{\sqrt{5}}{5}, \sqrt{2})$

5. 设 $f(x) = x^3 + \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$，则对任意实数 a, b，$a + b \geqslant 0$ 是 $f(a) + f(b) \geqslant 0$ 的（　　）

A. 充分必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 数码 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2006}$ 中有奇数个 9 的 2007 位十进制数 $\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$ 的个数为（　　）

A. $\frac{1}{2}(10^{2006} + 8^{2006})$　　B. $\frac{1}{2}(10^{2006} - 8^{2006})$

C. $10^{2006} + 8^{2006}$　　D. $10^{2006} - 8^{2006}$

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 设 $f(x) = \sin^4 x - \sin x\cos x + \cos^4 x$，则 $f(x)$ 的值域是________.

8. 若对一切 $\theta \in \mathbf{R}$，复数 $z = (a + \cos\theta) + (2a - \sin\theta)\mathrm{i}$ 的模不超过 2，则实数 a 的取值范围为________.

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1 与 F_2，点 P 在直线 $l: x - \sqrt{3}y + 8 + 2\sqrt{3} =$

0 上.当 $\angle F_1PF_2$ 取最大值时,比$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值为________.

10. 底面半径为 1 cm 的圆柱形容器里放有四个半径为$\frac{1}{2}$cm 的实心铁球,四个球两两相切,其中底层两球与容器底面相切.现往容器里注水,使水面恰好浸没所有铁球,则需要注水________ cm^3.

11. 方程$(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$ 实数解的个数为________.

12. 袋内有 8 个白球和 2 个红球,每次从中随机取出一个球,然后放回 1 个白球,则第 4 次恰好取完所有红球的概率为________.

三、解答题(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13. 给定整数 $n\geqslant 2$,设 $M_0(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=nx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点.试证明对于任意正整数 m,必存在整数 $k\geqslant 2$,使(x_0^m,y_0^m)为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点.

14. 将 2006 表示成 5 个正整数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 之和.记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$.问:

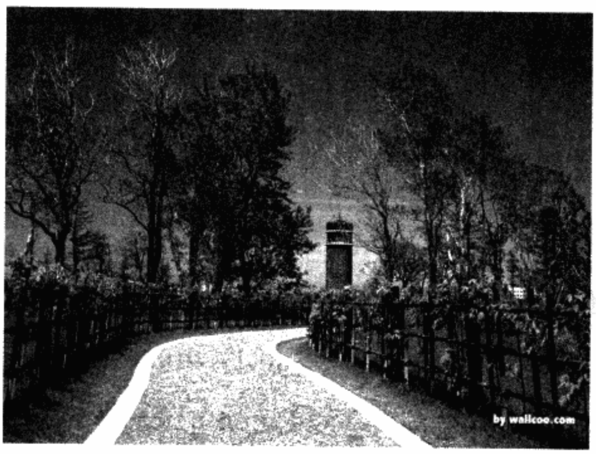
(1) 当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时,S 取到最大值;

(2) 进一步,设对任意 $1\leqslant i,j\leqslant 5$ 有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$,问当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时,S 取到最小值.

说明理由.

15. 设 $f(x)=x^2+a$.记 $f^1(x)=f(x)$,$f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$,$n=2,3,\cdots$,$M=\{a\in\mathbf{R}\mid$ 对所有正整数 n,$|f^n(0)|\leqslant 2\}$.

证明:$M=[-2,\frac{1}{4}]$.



2006年全国高中数学联合竞赛试题参考答案

1.【答】(C)

【解】令$\angle ABC=\alpha$,过A作$AD\perp BC$于D.由$|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$,推出

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2t\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+t^2|\overrightarrow{BC}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2,$$

令$t=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$,代入上式,得

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2|\overrightarrow{BA}|^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha|\overrightarrow{BA}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2$$

即$|\overrightarrow{BA}|^2\sin^2\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2$,也即$|\overrightarrow{BA}|\sin\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|$.从而有$|\overrightarrow{AD}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$.由此可得$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$.

2.【答】(B)

【解】因为$\begin{cases}x>0,x\neq 1\\2x^2+x-1>0\end{cases}$,解得$x>\dfrac{1}{2},x\neq 1$.由

$$\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1\Rightarrow\log_x(2x^3+x^2-x)>\log_x 2\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\2x^3+x^2-x<2\end{cases}$$

解得$0<x<1$;或$\begin{cases}x>1\\2x^3+x^2-x>2\end{cases}$,解得$x>1$,所以$x$的取值范围为$x>\dfrac{1}{2}$,且$x\neq 1$.

3.【答】(C)

【解】$5x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\dfrac{a}{5}$;$6x-b>0\Rightarrow x>\dfrac{b}{6}$.要使$A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$,则

$$\begin{cases}1\leqslant\dfrac{b}{6}<2\\4\leqslant\dfrac{a}{5}<5\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}6\leqslant b<12\\20\leqslant a<25\end{cases}$$

所以数对(a,b)共有$C_6^1C_5^1=30$.

4.【答】(A)

【解】建立直角坐标系,以A为坐标原点,AB为x轴,AC为y轴,AA_1为z轴,则有$F(t_1,0,0)(0<t_1<1)$,$E(0,1,\dfrac{1}{2})$,$G(\dfrac{1}{2},0,1)$,$D(0,t_2,0)(0<t_2<1)$.所以$\overrightarrow{EF}=(t_1,-1,-\dfrac{1}{2})$,$\overrightarrow{GD}=(-\dfrac{1}{2},t_2,-1)$.因为$GD\perp EF$,所以$t_1+2t_2=1$,由此推出$0<t_2<\dfrac{1}{2}$.又$\overrightarrow{DF}=(t_1,-t_2,0)$,$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\sqrt{5t_2^2-4t_2+1}=$

$\sqrt{5(t_2-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}}$,从而有$\sqrt{\frac{1}{5}} \leqslant |\overrightarrow{DF}| < 1$.

5.【答】(A)

【解】显然 $f(x)=x^3+\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数,且单调递增.于是:
若 $a+b\geqslant 0$,则 $a\geqslant -b$,有 $f(a)\geqslant f(-b)$,即 $f(a)\geqslant -f(b)$,从而有 $f(a)+f(b)\geqslant 0$.反之,若 $f(a)+f(b)\geqslant 0$,则 $f(a)\geqslant -f(b)=f(-b)$,推出 $a\geqslant -b$,即 $a+b\geqslant 0$.

6.【答】(B)

【解】出现奇数个 9 的十进制数个数有 $A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$.又由于

$$(9+1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}\quad 以及\quad (9-1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^k9^{2006-k}$$

从而得

$$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9=\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$$

7.【解】 $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x=1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$.令 $t=\sin 2x$,则 $f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2$.因此 $\min\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}g(t)=g(1)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=0$, $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}g(t)=g(-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{9}{8}$. 即得 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{9}{8}$.

8.【解】依题意,得 $|z|\leqslant 2\Leftrightarrow(a+\cos\theta)^2+(2a-\sin\theta)^2\leqslant 4\Leftrightarrow 2a(\cos\theta-2\sin\theta)\leqslant 3-5a^2\Leftrightarrow -2\sqrt{5}a\sin(\theta-\varphi)\leqslant 3-5a^2(\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})$(对任意实数 θ 成立)$\Rightarrow 2\sqrt{5}|a|\leqslant 3-5a^2\Rightarrow|a|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$.故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

9.【解】由平面几何知,要使 $\angle F_1PF_2$ 最大,则过 F_1,F_2,P 三点的圆必定和直线 l 相切于 P 点.设直线 l 交 x 轴于 $A(-8-2\sqrt{3},0)$,则 $\angle APF_1=\angle AF_2P$,即 $\triangle APF_1\sim\triangle AF_2P$,即

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|AP|}{|AF_2|}\qquad ①$$

又由圆幂定理,得

$$|AP|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|\qquad ②$$

而 $F_1(-2\sqrt{3},0)$, $F_2(2\sqrt{3},0)$, $A(-8-2\sqrt{3},0)$,从而有 $|AF_1|=8$, $|AF_2|=8+4\sqrt{3}$.代入①,②得

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{\frac{|AF_1|}{|AF_2|}}=\sqrt{\frac{8}{8+4\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$$

10.【解】设四个实心铁球的球心为 O_1,O_2,O_3,O_4,其中 O_1,O_2 为下层两球的球心,A,B,C,D 分别为四个球心在底面的射影,则 $ABCD$ 是一个边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形.所以注水

高为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.故应注水 $\pi(1+\frac{\sqrt{2}}{2})-4\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$.

11.【解】$(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}\Leftrightarrow$

$$(x+\frac{1}{x^{2005}})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006\Leftrightarrow$$

$$x+x^3+x^5+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}+\frac{1}{x^{2003}}+\frac{1}{x^{2001}}+\cdots+\frac{1}{x}=2006\Leftrightarrow$$

$$2006=x+\frac{1}{x}+x^3+\frac{1}{x^3}+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}\geqslant 2\cdot 1003=2006$$

要使等号成立,必须 $x=\frac{1}{x},x^3=\frac{1}{x^3},\cdots,x^{2005}=\frac{1}{x^{2005}}$,即 $x=\pm 1$.但是 $x\leqslant 0$ 时,不满足原方程.所以 $x=1$ 是原方程的全部解.因此原方程的实数解个数为 1.

12.【解】第 4 次恰好取完所有红球的概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=0.043\ 4$$

13.【证明】因为 $y^2=nx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 $x_0=y_0=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$.显然有 $x_0+\frac{1}{x_0}=n$.若 (x_0^m,y_0^m) 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点,则 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$.记 $k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$,则

$$k_{m+1}=k_m(x_0+\frac{1}{x_0})-k_{m-1}=nk_m-k_{m-1}(m\geqslant 2) \qquad (*)$$

由于 $k_1=n$ 是整数,$k_2=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}=(x_0+\frac{1}{x_0})^2-2=n^2-2$ 也是整数,所以根据数学归纳法,通过(*)式可证明对于一切正整数 m,$k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$ 是正整数.现在对于任意正整数 m,取 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$,使得 $y^2=kx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 (x_0^m,y_0^m).

14.【解】(1) 首先这样的 S 的值是有界集,故必存在最大值与最小值.若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$,且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 取到最大值,则必有

$$|x_i-x_j|\leqslant 1,\quad (1\leqslant i,j\leqslant 5) \qquad (*)$$

事实上,假设(*)不成立,不妨假设 $x_1-x_2\geqslant 2$.则令 $x'_1=x_1-1,x'_2=x_2+1,x'_i=x_i(i=3,4,5)$,有 $x'_1+x'_2=x_1+x_2,x'_1\cdot x'_2=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$.将 S 改写成

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$$

同时有 $S'=x'_1x'_2+(x'_1+x'_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.于是有 $S'-S=x'_1x'_2-x_1x_2>0$.这与 S 在 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 时取到最大值矛盾.所以必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1,(1\leqslant i,j\leqslant 5)$.因此当 $x_1=402,x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 取到最大

值.

(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2$ 时,只有

(Ⅰ)402,402,402,400,400;

(Ⅱ)402,402,401,401,400;

(Ⅲ)402,401,401,401,401.

三种情形满足要求.而后面两种情形是在第一组情形下作 $x'_i=x_i-1,x'_j=x_j+1$ 调整下得到的.根据上一小题的证明可以知道,每调整一次,和式 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 变大.所以在 $x_1=x_2=x_3=402,x_4=x_5=400$ 情形取到最小值.

15.【证明】(1) 如果 $a<-2$,则 $|f^1(0)|=|a|>2,a\notin M$.

(2) 如果 $-2\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$,由题意 $f^1(0)=a,f^n(0)=(f^{n-1}(0))^2+a,n=2,3,\cdots$,则:

① 当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ 时,$|f^n(0)|\leqslant\frac{1}{2}(\forall n\geqslant 1)$.

事实上,当 $n=1$ 时,$|f^1(0)|=|a|\leqslant\frac{1}{2}$,设 $n=k-1$ 时成立($k\geqslant 2$ 为某整数),则对 $n=k$,有

$$|f^k(0)|\leqslant|f^{k-1}(0)|^2+a\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

② 当 $-2\leqslant a<0$ 时,$|f^n(0)|\leqslant|a|(\forall n\geqslant 1)$.

事实上,当 $n=1$ 时,$|f^1(0)|\leqslant|a|$,设 $n=k-1$ 时成立($k\geqslant 2$ 为某整数),则对 $n=k$,有 $-|a|=a\leqslant f^k(0)=(f^{k-1}(0))^2+a\leqslant a^2+a$.注意到当 $-2\leqslant a<0$ 时,总有 $a^2\leqslant-2a$,即 $a^2+a\leqslant-a=|a|$.从而有 $|f^k(0)|\leqslant|a|$.由归纳法,推出 $\left[-2,\frac{1}{4}\right]\subseteq M$.

(3) 当 $a>\frac{1}{4}$ 时,记 $a_n=f^n(0)$,则对于任意 $n\geqslant 1,a_n>a>\frac{1}{4}$ 且

$$a_{n+1}=f^{n+1}(0)=f(f^n(0))=f(a_n)=a_n^2+a$$

对于任意 $n\geqslant 1$,有

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=(a_n-\frac{1}{2})^2+a-\frac{1}{4}\geqslant a-\frac{1}{4}$$

则 $a_{n+1}-a_n\geqslant a-\frac{1}{4}$.所以,$a_{n+1}-a=a_{n+1}-a_1\geqslant n(a-\frac{1}{4})$.

当 $n>\dfrac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$ 时,有

$$a_{n+1}\geqslant n(a-\frac{1}{4})+a>2-a+a=2$$

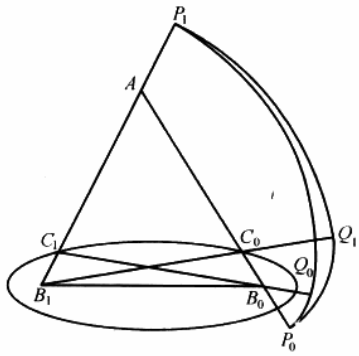
即 $f^{n+1}(0)>2$.因此 $a\notin M$.

综合(1)、(2)、(3),我们有 $M=\left[-2,\frac{1}{4}\right]$.

2006 年全国高中数学联合竞赛加试试卷

（考试时间：上午 10:00 ~ 12:00）

一、以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 AB_i 交于 $C_i(i=0,1)$. 在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P'_0}$，交 AB_0 的延长线于 P'_0. 试证：



(1) 点 P'_0 与点 P_0 重合，且圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相内切于 P_0；

(2) 四点 P_0,Q_0,Q_1,P_1 共圆.

二、已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=x, a_1=y, a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}, n=1,2,\cdots$.

(1) 对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时 a_n 恒为常数？

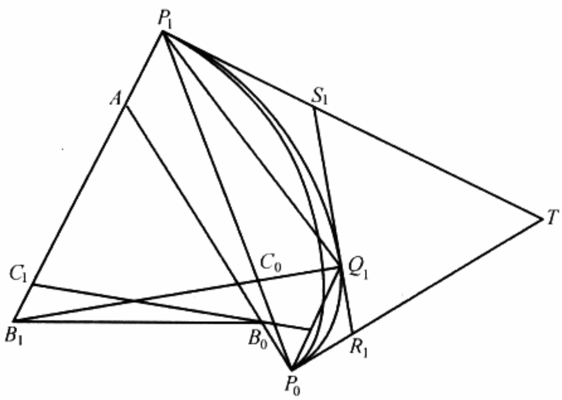
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

三、解方程组

$$\begin{cases} x-y+z-w=2 \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6 \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20 \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66 \end{cases}$$

2006 年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案

一、【证明】(1) 显然 $B_0P_0 = B_0Q_0$，并由圆弧$\overset{\frown}{P_0Q_0}$和$\overset{\frown}{Q_0P_1}$，$\overset{\frown}{Q_0P_1}$和$\overset{\frown}{P_1Q_1}$，$\overset{\frown}{P_1Q_1}$和$\overset{\frown}{Q_1P'_0}$分别相内切于点 Q_0, P_1, Q_1，得 $C_1B_0 + B_0Q_0 = C_1P_1$，$B_1C_1 + C_1P_1 = B_1C_0 + C_0Q_1$ 以及 $C_0Q_1 = C_0B_0 + B_0P'_0$. 四式相加，利用 $B_1C_1 + C_1B_0 = B_1C_0 + C_0B_0$ 以及 P'_0 在 B_0P_0 或其延长线上，有 $B_0P_0 = B_0P'_0$. 从而可知点 P'_0 与点 P_0 重合. 由于圆弧$\overset{\frown}{Q_1P_0}$的圆心 C_0，圆弧$\overset{\frown}{P_0Q_0}$的圆心 B_0 以及 P_0 在同一直线上，所以圆弧 Q_1P_0 和 P_0Q_0 相内切于点 P_0.



(2) 现在分别过点 P_0 和 P_1 引上述相应相切圆弧的公切线 P_0T 和 P_1T 交于点 T. 又过点 Q_1 引相应相切圆弧的公切线 R_1S_1，分别交 P_0T 和 P_1T 于点 R_1 和 S_1. 连接 P_0Q_1 和 P_1Q_1，得等腰三角形 $P_0Q_1R_1$ 和 $P_1Q_1S_1$. 基于此，我们可由

$$\angle P_0Q_1P_1 = \pi - \angle P_0Q_1R_1 - \angle P_1Q_1S_1 =$$
$$\pi - (\angle P_1P_0T - \angle Q_1P_0P_1) - (\angle P_0P_1T - \angle Q_1P_1P_0)$$

而 $\pi - \angle P_0Q_1P_1 = \angle Q_1P_0P_1 + \angle Q_1P_1P_0$，代入上式后，即得

$$\angle P_0Q_1P_1 = \pi - \frac{1}{2}(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T)$$

同理可得 $\angle P_0Q_0P_1 = \pi - \frac{1}{2}(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T)$. 所以四点 P_0, Q_0, Q_1, P_1 共圆.

二、【解】(1) 我们有

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_na_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n + a_{n-1}}, \quad n = 1,2,\cdots \qquad ①$$

所以，如果对某个正整数 n，有 $a_{n+1} = a_n$，则必有 $a_n^2 = 1$，且 $a_n + a_{n-1} \neq 0$.

如果该 $n = 1$，我们得

$$|y|=1 \quad 且 \quad x\neq -y \tag{②}$$

如果该 $n>1$,我们有

$$a_n-1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}-1=\frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}},\quad n\geqslant 2 \tag{③}$$

和

$$a_n+1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}+1=\frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}},\quad n\geqslant 2 \tag{④}$$

将式③和式④两端相乘,得

$$a_n^2-1=\frac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}},\quad n\geqslant 2 \tag{⑤}$$

由式⑤递推,必有式②或

$$|x|=1 \quad 且 \quad y\neq -x \tag{⑥}$$

反之,如果条件②或⑥满足,则当 $n\geqslant 2$ 时,必有 $a_n=$ 常数,且常数是 1 或 -1.

(2) 由③和④,我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1},\quad n\geqslant 2 \tag{⑦}$$

记 $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$,则当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}b_{n-3})b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$$

由此递推,我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}},\quad n\geqslant 2 \tag{⑧}$$

这里

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\quad n\geqslant 2,\quad F_0=F_1=1 \tag{⑨}$$

由⑨解得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right) \tag{⑩}$$

上式中的 n 还可以向负向延伸,例如

$$F_{-1}=0,\quad F_{-2}=1$$

这样一来,式⑧对所有的 $n\geqslant 0$ 都成立.由⑧解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}},\quad n\geqslant 0 \tag{⑪}$$

式⑪中的 F_{n-1},F_{n-2} 由⑩确定.

三、【解】令 $p=x+z,q=xz$,我们有

$$p^2=x^2+z^2+2q$$

$$p^3=x^3+z^3+3pq$$

$$p^4=x^4+z^4+4p^2q-2q^2$$

同样,令 $s=y+w,t=yw$,有

$$s^2 = y^2 + w^2 + 2t$$
$$s^3 = y^3 + w^3 + 3st$$
$$s^4 = y^4 + w^4 + 4s^2t - 2t^2$$

在此记号系统下,原方程组的第一个方程为

$$p = s + 2 \qquad ①$$

于是

$$p^2 = s^2 + 4s + 4$$
$$p^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$
$$p^4 = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16$$

现在将上面准备的 p^2,p^3,p^4 和 s^2,s^3,s^4 的表达式代入,得

$$x^2 + z^2 + 2q = y^2 + w^2 + 2t + 4s + 4$$
$$x^3 + z^3 + 3pq = y^3 + w^3 + 3st + 6s^2 + 12s + 8$$
$$x^4 + z^4 + 4p^2q - 2q^2 = y^4 + w^4 + 4s^2t - 2t^2 + 8s^3 + 24s + 32s + 16$$

利用原方程组的第二至四式化简,得

$$q = t + 2s - 1 \qquad ②$$
$$pq = st + 2s^2 + 4s - 4 \qquad ③$$
$$2p^2q - q^2 = 2s^2t - t^2 + 4s^3 + 12s^2 + 16s - 25 \qquad ④$$

将 ① 和 ② 代入 ③,得

$$t = \frac{s}{2} - 1 \qquad ⑤$$

将 ⑤ 代入 ②,得

$$q = \frac{5}{2}s - 2 \qquad ⑥$$

将 ①、⑤、⑥ 代入 ④,得 $s = 2$.所以有 $t = 0, p = 4, q = 3$.这样一来,x,z 和 y,w 分别是方程 $X^2 - 4X + 3 = 0$ 和 $Y^2 - 2Y = 0$ 的两根,即

$$\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} y = 2 \\ w = 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y = 0 \\ w = 2 \end{cases}$$

详言之,方程组有如下四组解:$x = 3, y = 2, z = 1, w = 0$;或 $x = 3, y = 0, z = 1, w = 2$;或 $x = 1, y = 2, z = 3, w = 0$;或 $x = 1, y = 0, z = 3, w = 2$.

注:如果只得到一组解,或者不完整,最多得 40 分.

关于加试试题的背景说明可见王兴华教授.http://wangxinghua.name 和浙江省数学会网站 http://www.zjms.org.

Этюд о формуле Эйлера

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

Инварианты скольжения многоугольника

Простейший инвариант скольжения многоугольника Эйлера – векторная сумма его сторон: $\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k = \vec{0}$.

Используя это равенство, найдем еще один инвариант скольжения многоугольника Эйлера. Проведем из центра O_2 окружности, вписанной в многоугольник Эйлера, радиусы-векторы $\vec{r}_k$ во все точки касания (рис. 13; на нем $n = 6$). Теперь рассмотрим сумму $\vec{S} = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k$ и покажем, что эта сумма при скольжении многоугольника не меняется. Для этого возьмем производную от этой суммы по времени:

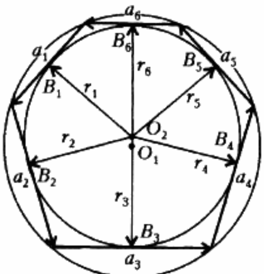


Рис. 13

$\dot{\vec{S}} = \sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{V}_{B_k}$. Здесь $\vec{V}_{B_k}$ – скорость точки B_k конца вектора $\vec{r}_k$. При скольжении эти векторы остаются постоянными по модулю, $|\vec{r}_k| = r$, и вращаются в плоскости рисунка вокруг точки O_2. Поэтому

$$V_{B_k} = \omega_{r_k} r_k = \omega_{r_k} r, \qquad (24)$$

где $\omega_{r_k} = \dot{\varphi}_{r_k}$ – угловая скорость радиуса r_k. Направление скорости $\vec{V}_{B_k}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}_k$, так как оба эти вектора перпендикулярны вектору $\vec{r}_k$ (рис.14). Таким образом,

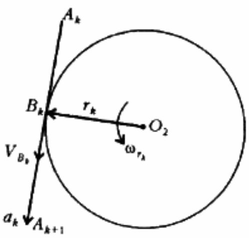


Рис. 14

$$\vec{V}_{B_k} = V_{B_k}\vec{e}_{a_k} = \omega_{r_k} r\vec{e}_{a_k},$$

где $\vec{e}_{a_k}$ – единичный вектор вектора $\vec{a}_k$. Поскольку $\vec{a}_k = a_k\vec{e}_{a_k}$, то $\vec{e}_{a_k} = \frac{\vec{a}_k}{a_k}$. Кроме этого, угловые скорости ω_{r_k} и ω_{a_k} равны $\dot{\varphi}_{a_k}$, так как при скольжении угол между радиусом $\vec{r}_k$ и стороной $\vec{a}_k$ не меняется и всегда прямой. Следовательно, $\vec{V}_{B_k} = \dot{\varphi}_{a_k} r\frac{\vec{a}_k}{a_k}$. Тогда

$$\dot{\vec{S}} = \sum_{k=1}^{n}\vec{V}_{B_k} = r\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k}\vec{a}_k = r\frac{c}{2}\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k = \vec{0}.$$

(Из равенства (8) в первой части статьи следует, что $\frac{\varphi_{a_k}}{a_k} = \frac{c}{2}$, т.е. это отношение не зависит от индекса k и потому может быть вынесено за знак суммы.) Отсюда следует, что сумма $\vec{S}$ не меняется со временем при скольжении многоугольника Эйлера, т.е. является инвариантом скольжения: $\vec{S} = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k = \vec{I}$. Мы будем называть ее векторным инвариантом скольжения. Для каждого многоугольника Эйлера он свой и зависит от величин, которые не меняются при скольжении, т.е. от обоих радиусов и расстояния между центрами данных окружностей. Но тогда инвариантом скольжения является и проекция вектора $\vec{I}$ на любую неподвижную ось. В качестве таковых естественно выбрать линию центров O_1O_2 и ось, перпендикулярную к ней.

При получении формул (11) мы использовали то обстоятельство, что вектор $\vec{r}_1 = \overline{O_2B_1}$ (см. рис.4 в первой части статьи) параллелен вектору $\overline{O_1C_1}$, так как они оба перпендикулярны вектору $\vec{a}_1 = \overline{A_1A_2}$. Следовательно, вектор $\vec{r}_1$ образует с линией центров тот же угол, что и вектор $\overline{O_1C_1}$, равный $\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$. Точно так же вектор $\vec{r}_k$ образует с линией центров угол $\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$. Поэтому инвариантами скольжения являются величины

$$\sum_{k=1}^{n}|\vec{r}_k|\cos\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = r\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}|\vec{r}_k|\sin\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = r\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}.$$

Иначе говоря, поскольку радиус r при скольжении постоянен, инвариантами являются суммы косинусов и синусов углов $\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$. Назовем их, соответственно, первым и вторым инвариантами скольжения:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = I_1, \quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = I_2. \qquad (25)$$

Второй инвариант равен нулю, так как в те моменты, когда многоугольник Эйлера симметричен относитель-

---

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №1.

[编者的话] 2007年在河内举行的47届IMO上,俄罗斯代表队以184分高居世界首位,将中国队从多年稳居的冠军宝座上拉下,这预示着中国在国际数学竞赛上独领风骚的时代已经一去不复返.随之而来的将是一个群雄逐鹿的时代.要在竞争中取胜,必需研究对手,借参加2007莫斯科国际书展之机,本文集编辑部也顺访了

но линии центров, для угла $\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$ найдется в пару угол, равный $-\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Если же такой пары не найдется, то этот угол равен 0° или 180°. (Эта ситуация показана на рисунке 15. На нем векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_5$, а также $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_4$, образуют с линией центров равные по величине и противоположные по знаку углы. Вектор $\vec{r}_6$ образует с этой линией нулевой угол, а вектор $\vec{r}_3$ – угол 180°.) Поэтому сумма синусов равна нулю: $I_2=0$.

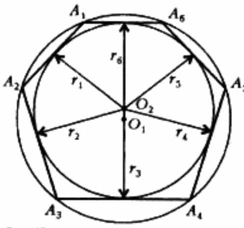


Рис. 15

Отсюда следует, что векторный инвариант скольжения $\vec{I}$ направлен по линии центров и его величина равна rI_1. Пусть $\vec{d}=\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\vec{e}_d$ – орт вектора $\vec{d}$, т.е. $\vec{e}_d=\frac{\vec{d}}{d}$. Тогда

$$\vec{I}=rI_1\vec{e}_d=\frac{r}{d}I_1\vec{d}=\frac{\rho}{\delta}I_1\vec{d}. \quad (26)$$

Еще один инвариант скольжения мы получим, просуммировав равенства (11):

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=n\rho+\delta\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=n\rho+\delta I_1.$$

Разность углов $\varphi_{k+1}-\varphi_k$ равна углу α_k: $\alpha_k=\varphi_{k+1}-\varphi_k$. А так как справа в последнем равенстве стоит величина, не меняющаяся при скольжении многоугольника Эйлера, то мы получаем третий инвариант скольжения:

$$I_3=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha_k}{2}=n\rho+\delta I_1. \quad (27)$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

а

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}-\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

то инвариантами являются также и суммы произведений косинусов и синусов:

$$I_4=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}=0,5(I_3+I_1)$$

и

$$I_5=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2}=0,5(I_3-I_1).$$

Из всех полученных инвариантов, очевидно, «главным» является третий инвариант I_3, так как в него входят углы $\alpha_k\,(=\varphi_{k+1}-\varphi_k)$ и не входят «внешние» углы φ_{k+1} и φ_k.

Задачи (продолжение)

Перейдем теперь к решению задач, в которых будем использовать полученные результаты, связанные с инвариантами скольжения многоугольника Эйлера.

Задача 9. *В многоугольнике Эйлера даны углы, которые образуют радиусы описанной окружности, проведенные в его вершины, с линией центров. Найдите отношение* δ.

Решение. Умножим каждое из равенств (11) на $\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$ и просуммируем полученные равенства. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=\rho\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}+$$

$$+\delta\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства – инвариант скольжения $I_2=0$. Поэтому равенство можно переписать в таком виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sin\varphi_{k+1}+\sin\varphi_k)=\frac{1}{2}\delta\sum_{k=1}^{n}\sin(\varphi_{k+1}+\varphi_k).$$

Учитывая, что $\varphi_{n+1}=360°+\varphi_1$, найдем: $\sin\varphi_{n+1}=\sin\varphi_1$. Поэтому в сумме, стоящей слева, каждое слагаемое повторяется два раза, но тогда выражение в левой части равенства имеет вид $\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k$. Теперь приходим к ответу:

$$\delta=2\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k}{\sum_{k=1}^{n}\sin(\varphi_{k+1}+\varphi_k)}.$$

Задача 10. *Вычислите инварианты скольжения* $\vec{I}$, I_1, I_3 *треугольника Эйлера, если известно* δ *(и тем самым* ρ*).*

Решение. Сначала вычислим $I_1=\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Воспользуемся рисунком 5. На нем $\varphi_1=0°$ и

$$\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}=\cos\frac{\varphi_2}{2}=\cos\frac{\alpha_1}{2}=\frac{O_2B_1}{O_2A_1}=\frac{r}{R-d}=\frac{\rho}{1-\delta}.$$

Угол $\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2}$ равен 180°, поэтому $\cos\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2}=-1$. Третий косинус в сумме равен

$$\cos\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2}=\cos\angle A_1O_2B_3=$$

$$=\cos\angle B_1O_2A_1=\cos\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\rho}{1-\delta}.$$

Тогда (учитывая формулу (12))

$$I_1=2\frac{\rho}{1-\delta}-1=1+\delta-1=\delta.$$

Итак,

$$I_1=\delta. \quad (28)$$

俄罗斯专门刊登数学奥林匹克内容的两大刊物——《中学数学教学》编辑部和《量子》编辑部.宾主相谈甚欢,都表达了希望合作的意向,两家期刊社还向本文集编辑部赠送了近年出版的全部刊物,师夷人之长必先读懂他们的文章.俄罗斯同行所写的文章大多出自名家之手,颇富原创性.回国后,我们一直在寻找合适的译

Векторный инвариант $\vec{I}$ найдем, используя формулу (26):

$$\vec{I} = I_1\frac{\rho}{\delta}\vec{d} = \rho\vec{d}.$$

Инвариант I_3 можно найти либо непосредственно из рисунка 5, либо с помощью формулы (27). Используем второй путь:

$$I_3 = 3\rho + \delta I_1 = 3\rho + \delta^2 = 3\rho + 1 - 2\rho = 1 + \rho. \quad (29)$$

(Здесь мы воспользовались равенством $\delta^2 = 1 - 2\rho$.)

Так как $I_3 = \sum_{k=1}^{3}\cos\frac{\alpha_k}{2} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, то формула (29) позволяет нам получить еще одно выражение для отношения $\rho = \frac{r}{R}$ через углы треугольника:

$$\rho = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1. \quad (30)$$

Замечание. Формулу (30) можно получить также из равенства (23) или из известного равенства $\rho = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Сделайте это самостоятельно.

Задача 11. *Пусть известны угол треугольника Эйлера и ρ. Чему равны остальные углы треугольника?*

Решение. Обозначим известный угол треугольника через α. Запишем уравнение (30) в виде $\cos\beta + \cos\gamma = 1 - \cos\alpha + \rho$, или

$$2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \rho.$$

Но $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$, поэтому

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Для определения углов β и γ имеем два уравнения:

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = \arccos\left(\frac{\rho}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \text{ и } \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда несложно найти β и γ.

Задача 12. *Вычислите инварианты скольжения $\vec{I}$, I_1, I_3 четырехугольника Эйлера, если известно δ (и тем самым ρ).*

Решение. Эти инварианты проще всего найти, когда четырехугольник Эйлера является дельтоидом (см. рис.6). В этом случае $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$. В силу симметрии,

$$\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi_5+\varphi_4}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Точно так же,

$$\cos\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2} = \cos\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2} = -\frac{\rho}{1+\delta}.$$

Отсюда

$$I_1 = \sum_{k=1}^{4}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2} = 2\left(\frac{\rho}{1-\delta} - \frac{\rho}{1+\delta}\right) = \frac{4\rho\delta}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (31)$$

По формуле (26) векторный инвариант выглядит так:

$$\vec{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}}\vec{d}.$$

Третий инвариант получим из рисунка 6. Значения косинусов таковы:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \cos\frac{\alpha_4}{2} = \frac{\rho}{1-\delta}, \quad \cos\frac{\alpha_2}{2} = \cos\frac{\alpha_3}{2} = \frac{\rho}{1+\delta}.$$

Поэтому

$$I_3 = \sum_{k=1}^{4}\cos\frac{\alpha_k}{2} = 2\left(\frac{\rho}{1-\delta} + \frac{\rho}{1+\delta}\right) = \frac{4\rho}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (32)$$

Тот же результат при вычислении I_3 можно получить с помощью формулы (27), в чем вы можете убедиться самостоятельно.

Инварианту $I_3 = \sum_{k=1}^{4}\cos\frac{\alpha_k}{2}$ можно придать геометрический смысл. Пусть центр O_1 описанной окружности лежит внутри многоугольника и h_k – перпендикуляр, опущенный из центра O_1 на сторону a_k многоугольника. Тогда $h_k = R\cos\frac{\alpha_k}{2}$ и, умножив предыдущее равенство на R, найдем $\sum_{k=1}^{n} h_k = RI_3$. Отсюда получаем, что сумма длин этих перпендикуляров также является инвариантом скольжения. Эта формула в случае треугольника является формулой Карно: $h_1 + h_2 + h_3 = R(1+\rho) = R\left(1+\frac{r}{R}\right) = R + r$. Поэтому формулу $\sum_{k=1}^{n} h_k = RI_3$ можно назвать формулой Карно для n-угольника Эйлера. Для четырехугольника Эйлера формула Карно выглядит так:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{4R^2r}{R^2-d^2} = \frac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{R^2+d^2}}$$

(здесь использована формула (32)).

Задача 13. *Пусть известны δ (и тем самым ρ) четырехугольника Эйлера и один из четырех его углов. Вычислите остальные углы.*

Решение. На рисунке 16 изображен четырехугольник Эйлера $A_1A_2A_3A_4$. Обо-

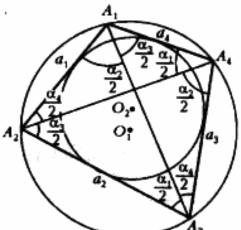


Рис. 16

者.但由于国内俄语教学的缺失,既懂俄语又懂数学的译者即使在俄语大省黑龙江也是廖廖无几.所以在此我们向全国诚征译者,有意者请将此篇文章译出并寄本文集编辑部(译文发表,稿费酌付).

本文是俄罗斯著名刊物《量子》(КВАНТ)2007年第二期的第一篇文章和第四期的第二篇文章,选择

значим соответствующие углы при вершинах $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$, причем известный нам угол – это α. Пусть далее $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ – центральные углы, опирающиеся на стороны a_1,a_2,a_3,a_4 соответственно.

Очевидны такие равенства:

$$\alpha = 0{,}5(\alpha_2+\alpha_3),\ \beta = 0{,}5(\alpha_3+\alpha_4),$$

$$\gamma = 0{,}5(\alpha_4+\alpha_1),\ \varepsilon = 0{,}5(\alpha_1+\alpha_2).$$

Так как четырехугольник Эйлера – вписанный, то $\alpha+\gamma=180^\circ$, $\beta+\varepsilon=180^\circ$. Отсюда ясно, что для ответа на вопрос задачи достаточно найти только угол β. Поскольку четырехугольник Эйлера – описанный, то $a_1+a_3=a_2+a_4$. Из этого равенства получаем

$$2R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_3}{2}\right)=2R\left(\sin\frac{\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_4}{2}\right),$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}-\sin\frac{\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_3}{2}-\sin\frac{\alpha_4}{2}=0. \qquad (33)$$

Инвариант

$$I_3=\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{\alpha_k}{2}=\cos\frac{\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_4}{2}. \qquad (34)$$

После возведения в квадрат уравнений (33) и (34) и последующего их сложения получаем равенство

$$I_3^2=4+2\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}+\cos\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\right),$$

или

$$I_3^2=4+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\varepsilon)+$$

$$+\ 2\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}\right).$$

Так как суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180°, то $\cos\alpha+\cos\gamma=0$ и $\cos\beta+\cos\varepsilon=0$. Поэтому $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\varepsilon=0$. Далее,

$$2\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}\right)=$$

$$=4\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3+\alpha_2-\alpha_4}{4}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3-\alpha_2+\alpha_4}{4}=$$

$$=4\cos\frac{\varepsilon-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Поскольку суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180°, то

$$\cos\frac{\varepsilon-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}=\sin\beta\sin\alpha=$$

$$=\sin\beta\sin\gamma=\sin\varepsilon\sin\alpha=\sin\varepsilon\sin\gamma.$$

Для нахождения угла β, учитывая (32), имеем уравнение

$$4+4\sin\alpha\sin\beta=I_3^2=\frac{8}{1+\delta^2}.$$

Из этого уравнения получаем

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}. \qquad (35)$$

Отсюда и ответ: $\beta=\arcsin\dfrac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)\sin\alpha}$.

Задача 14. *В четырехугольнике Эйлера известны его углы. Вычислите* ρ.

Решение. Очевидно, достаточно задать два соседних угла α и β (в обозначениях предыдущей задачи). Воспользуемся формулой (35), получим из нее значение δ^2:

$$\delta^2=\frac{1-\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (36)$$

Подставив это значение в формулу (14), после преобразований получаем ответ:

$$\rho=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}}. \qquad (37)$$

Эта формула аналогична формуле (30) для треугольника.

Задача 15. *Радиус описанной около четырехугольника Эйлера окружности равен R, а его диагонали равны a и b. Найдите: 1) радиус вписанной окружности r; 2) расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей.*

Решение. Пусть $a=A_2A_4$ и $b=A_1A_3$ (см. рис.16). Тогда $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, и $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{ab}{4R^2}$. Подставив это значение $\sin\alpha\sin\beta$ в формулу (37), получим ответ на первый вопрос:

$$r=\frac{ab}{2\sqrt{4R^2+ab}}.$$

Подставив это же значение в формулу (36), получим ответ на второй вопрос:

$$d=R\sqrt{\frac{4R^2-ab}{4R^2+ab}}.$$

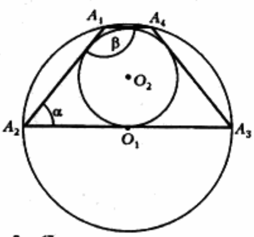


Рис. 17

Задача 16. *Четырехугольник Эйлера является трапецией. Ее большим основанием является диаметр описанной окружности (рис. 17). Чему равен острый угол трапеции?*

Решение. Поскольку в этом случае $\beta=180^\circ-\alpha$, то формулы (36) и (37) запишутся так:

$$\delta^2=\frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\ \text{и}\ \rho=\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}.$$

В этой ситуации $\rho=\delta$, поэтому, приравняв значения δ^2 и ρ^2, получим биквадратное уравнение:

(Продолжение см. на с. 13)

它供大家试译并欣赏有一点特殊的考虑,先说一个郑也夫讲的小轶事.进化论之父达尔文有一段令常人不解的经历.从1846年至1855年,他在研究藤壶(一种海生甲壳动物,成体一般有石灰质壳板,头端朝下固着在岩石、船体或海草上,种类上千).当代一位学者曾说:直到今天达尔文关于藤壶的研究成果仍

Гипотеза Каталана

В.СЕНДЕРОВ, Б.ФРЕНКИН

Выпишем подряд натуральные числа, являющиеся степенями (бóльшими первой) натуральных чисел. Получается последовательность: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, ... Числа 8 и 9 выделены не случайно – это соседние натуральные числа. Возникает вопрос: существуют ли еще соседние степени натуральных чисел?

Впервые этот вопрос поставил бельгийский математик Э.Каталан: в 1844 году он высказал предположение, что уравнение

$$x^y - z^t = 1 \qquad (1)$$

имеет единственное решение $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 3$ в натуральных числах, больших единицы.

Эта гипотеза продержалась почти 160 лет, хотя многие известные математики пытались найти подходы к ее доказательству.

В 2003 году румынский математик П.Михайлеску доказал справедливость гипотезы Каталана. Доказательство Михайлеску весьма сложно и неэлементарно и потому не может быть изложено на страницах нашего журнала. Однако сам результат связан со многими математическими фактами и задачами, которые могут быть изучены в рамках элементарной математики. Например, из доказанной Михайлеску теоремы немедленно получается ответ на вопрос пункта а) задачи М2032 («Квант» №1 за 2007 г.; решение опубликовано в этом номере журнала).

История вопроса

Еще в XIV веке Леви бен Гершон, известный также как Лео Гебракус, доказал, что уравнение $3^x - 2^y = \pm 1$ имеет единственное решение $x = 2$, $y = 3$ в натуральных числах, больших 1. В 1657 году Френикль де Бесси решил в натуральных числах уравнение

$$x^2 - p^y = 1\text{, где } y > 1\text{, а } p - \text{простое число.}$$

В 1738 году Л.Эйлер доказал, что уравнение



Иллюстрация В.Иванюка

然是这个领域中的权威著作.他的房屋中曾经挂满了从世界各地搜集到的腾壶.他的孩子们是在腾壶中长大的,他的一个朋友曾听到过他的孩子问自己的玩友:你家的腾壶在哪里?

当代科学史的研究者好奇:他为什么将他的划时代的进化论研究搁置起来,研究腾壶?传记作家鲍

$x^3+1=y^2$ имеет единственное решение $(2; 3)$ в натуральных числах (о решении этого уравнения и его приложениях см. в решении задачи М2025 в третьем номере нашего журнала за 2007 г.).

В 1850 году В.А.Лебег доказал неразрешимость уравнения $x^y - z^2 = 1$ в целых числах, больших единицы, при условии $y \neq 3$. А в 1921 году Т.Нагель полностью исследовал уравнения $x^3 - z^t = 1$ и $x^y - z^3 = 1$ при $y \neq 2$.

В результате были изучены три случая общего уравнения Каталана (1) при конкретных значениях показателей:

1) $x^3 - z^t = 1$,

2) $x^y - z^3 = 1$,

3) $x^y - z^2 = 1$.

Из них наиболее важным оказался последний: при решении общей проблемы особую роль играет ситуация, когда один из показателей четен.

Заметим еще, что полное рассмотрение третьего случая можно провести с помощью так называемых *целых гауссовых чисел*. Достаточная для этого информация содержится в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.,). Впрочем, эта задача далеко не проста.

Намного сложнее предыдущих оказалась ситуация при четных y. Для уравнения $x^4 - z^t = 1$ задача была решена С.Сельбергом в 1932 году, а окончательное решение уравнения $x^2 - z^t = 1$ было получено лишь в 1960 году китайским математиком Ко Чао.

Далее мы рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Каталана (в основном когда оба показателя степени нечетны). Внимательный читатель может заметить, что на математических олимпиадах иногда встречаются задачи, являющиеся частными случаями уравнения Каталана, так что знакомство с элементарными методами их решения может и в этой ситуации оказаться полезным. Пока же попробуйте решить следующие упражнения.

Упражнения

1. Решите в целых числах, больших чем 1, уравнения:

а) $3^x - 2^y = -1$,

б) $3^x - 2^y = 1$,

в) $z^x - 2^y = 1$,

г) $z^x - 2^y = -1$.

2. Найдите все тройки (a, b, y), где $a, y \in \mathbf{N}$, а b – простое число, такие, что $a^2 - b^y = 1$.

Некоторые предварительные результаты

Для полного доказательства гипотезы Каталана достаточно доказать ее для уравнения

$$x^p - y^q = 1, \qquad (2)$$

где оба натуральных числа x и y больше 1, а p и q – различные простые числа.

Упражнение 3. а) Докажите это.

б*) Пусть $x^y - z^t = 1$, где $x, z \in \mathbf{N}$, $y, t \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, y, t нечетны. Докажите, что числа x и z составные.

Напомним некоторые обозначения. Через (a, b) мы будем обозначать наибольший общий делитель натуральных чисел a и b. Запись же $a|b$ означает, что a является делителем b (читается: a делит b).

Нам понадобится следующее утверждение.

Если x и y – взаимно простые натуральные числа, то

а) $\left(\dfrac{x^n + y^n}{x + y}, x + y\right) \Big| n$ при любом нечетном натуральном n;

б) $\left(\dfrac{x^n - y^n}{x - y}, x - y\right) \Big| n$ при любом натуральном n и $x > y$.

Упражнение 4. Докажите это.

Это простое утверждение позволяет разбить множество всех четверок, удовлетворяющих уравнению (2), на две группы.

Случай I. Если $\left(p, \dfrac{x^p - 1}{x - 1}\right) = 1$, то

$$x - 1 = r^q, \ \frac{x^p - 1}{x - 1} = s^q, \ y = rs,$$

где r и s – некоторые натуральные числа.

Случай II. Если $\left(p, \dfrac{x^p - 1}{x - 1}\right) = p$, то

$$x - 1 = p^{q-1}a^q, \ \frac{x^p - 1}{x - 1} = pv^q, \ y = pav,$$

где a, v – некоторые натуральные числа.

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

В случае нечетного q аналогичные равенства можно получить, рассматривая выражение $\dfrac{y^q + 1}{y + 1}$.

Упражнения

6. Решите уравнения:

а) $3^x = y^z + 1$,

б) $3^x = y^z - 1$,

где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $z > 1$.

7. а) Решите уравнение $(x+1)^y + 1 = x^z$, где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $y > 1$.

б) Решите уравнение $(x+1)^y = 1 + x^z$, где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $y > 1$.

в) (М.Хампел, А.Шинцель) Докажите гипотезу Каталана для случая, когда основания степеней различаются на 1.

Теорема Касселса–Нагеля

Фундаментальный прорыв в доказательстве гипотезы Каталана произошел в середине двадцатого века, спустя более чем столетие со времени постановки задачи: Касселс полностью доказал ее в случае I. Именно, для нечетных показателей Касселс доказал следующее утверждение.

Теорема. *Пусть p и q – простые числа; $p > q \geq 2$; $a^p - b^q = \pm 1$, где a и b – целые числа, большие чем 1. Тогда a делится на q, b делится на p.*

Случай $q = 2$ относится к уравнению $a^p - b^q = -1$:

尔贝引述过达尔文与胡克的一次交谈.胡克对一位法国博物家略有微词,认为他没有专长.而听者有心,达尔文认识到自己也在做着物种的宏观思考,却没有对某一特定物种有所研究.一年后他开始了腾壶研究.还有一些科学史的研究者认为,达尔文想要在公布进化论之前更牢固地确立自己的学术地位.

когда формулировалась и доказывалась теорема, неразрешимость уравнения $a^p - b^2 = 1$ была уже окончательно установлена. При этом утверждение $q|a$ было доказано в работе 1953 года, а гораздо более сложное $p|b$ – семь лет спустя. Для случая $q = 2$ теорему доказал Т.Нагель в работах 1921 и 1934 годов.

Упражнение 8. Выведите из теоремы Касселса невозможность случая 1.

Итак, если (x, y, p, q) – решение уравнения (2), p, q – нечетные простые числа, то справедливы равенства

$$x - 1 = p^{q-1}a^q \text{ и } \frac{x^p - 1}{x - 1} = pv^q,\ y = pav,$$
$$y + 1 = q^{p-1}b^p \text{ и } \frac{y^q + 1}{y + 1} = qu^p,\ x = qbu \qquad (3)$$

при некоторых натуральных a, v, b, u.

Заметим, что теорема Касселса, наряду с некоторыми более ранними результатами, позволяла уже утверждать, что гипотеза Каталана может оказаться неверной лишь при весьма больших основаниях степеней.

Упражнение 9* (А.Роткевич). Пусть $x, y \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$; $z, t \in \boldsymbol{P} \setminus \{2\}$; $x^z - y^t = 1$; $(x, y, z, t) \neq (3, 2, 2, 3)$. Тогда $x, y > 10^6$. Докажите это

Таким образом, теорема Касселса оставляла проблему открытой лишь для чисел $x^z > (10^6)^5$, $y^t > (10^6)^5$. Заметим, что еще недавно было весьма сложно даже с помощью компьютеров оперировать числами, порядок которых превосходит 2^{32}.

Опираясь на равенства (3) и используя современные мощные алгебраические и аналитические методы, Михайлеску и получил свое замечательное доказательство.

О задаче М2032

Утверждение пункта а) задачи М2032 представляет собой ослабленный вариант гипотезы Каталана. Одним из таких ослаблений индуцировано и утверждение пункта б).

В 1956 году в курсе теории чисел В.Ж.Левека отмечалось: «Не доказано даже, что три последовательных целых числа не могут быть степенями...» В 1960 году в статье выдающегося польского математика В.Серпинского о нерешенных проблемах арифметики был сформулирован следующий вопрос: «Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых является степенью натурального числа с натуральным показателем, большим чем 1?» Ответу на этот вопрос мы предпошлем несколько элементарных утверждений о тройках $(n, n+1, n+2)$ натуральных чисел.

Правильной степенью называют число вида a^b, где $a, b \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$.

Упражнения

10. Пусть n, $n + 2$ – правильные степени. Докажите, что $(n, n+2) = 1$.

11. Пусть $(2k)^2 - z^m = 1$, где $k, z, m \in \boldsymbol{N}$. Докажите, что $m = 1$.

12. Пусть $x^m - (2k-1)^2 = 1$, где $x, m, k \in \boldsymbol{N}$. Докажите, что $m = 1$.

13. Пусть n, $n + 1$, $n + 2$ – правильные степени. Докажите, что

а) $n + 1 \neq t^2$,

б) $n \neq t^2$,

где $t \in \boldsymbol{N}$.

Вернемся к вопросу Серпинского. Отрицательный ответ на него дал в 1961 году польский математик А.Маковский. Приведем его доказательство. Без потери общности можно считать, что показатели степеней, упомянутые в задаче, – простые числа. Покажем, что система уравнений

$$\begin{cases} x^p - y^q = 1, \\ y^q - z^r = 1 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z и простых числах p, q, r.

Пусть x, y, z, p, q, r удовлетворяют этой системе. По теореме Касселса имеем $q|x$, $q|z$. Отсюда $q \mid x^p - z^r = 2$, и $q = 2$. Первое уравнение принимает вид $x^p = y^2 + 1$. Но это уравнение, как показал Лебег, не имеет целочисленных решений с положительным y. Отсюда сразу вытекает ответ на вопрос Серпинского.

Заметим, что провести доказательство можно и без использования результата Лебега–Нагеля: нечетность q и r сразу следует из упражнения 13, а $q|x$, $q|z$ сразу приводят к противоречию с упражнением 10.

Заметим также, что *две* правильные степени в тройку $(n, n+1, n+2)$ входить все-таки могут: $(5^2, 26, 3^3)$. Авторам неизвестно, существуют ли другие тройки с этим свойством. Во всяком случае, при $n \leq 2147483645$ таких троек нет.

Об антипростых числах

Напоследок коснемся антипростых чисел – естественного обобщения фигурирующих в проблеме Каталана правильных степеней. Мы называем натуральное число *антипростым*, если каждый его простой множитель входит в разложение с показателем, большим 1. Легко видеть, что в натуральном ряду не могут идти подряд четыре антипростых числа.

Упражнение 14. Докажите это.

В решении задачи М2032 мы рассматривали тройки $(n-1, n, n+1)$ натуральных чисел, в каждой из которых есть два антипростых числа. Мы показали, что среди этих троек бесконечно много таких, в которых $n - 1$ и $n + 1$ – антипростые числа, и бесконечно много таких, в которых число n – одно из антипростых. Могут ли все три числа $n - 1$, n, $n + 1$ быть антипростыми? Ответ авторам неизвестен. Во всяком случае, среди чисел до 2000000 таких троек нет.

达尔文腾壶研究最终以1855年出版的皇皇四卷巨著而告终.

能否将小问题做深做透是衡量一个学者功力的重要指标.本文颇具此特色.这也是俄罗斯数学的优势所在,值得我们学习与借鉴.

⊙ 编后语

在 2007 年商务印书馆推出的商务新知译丛书中有一本“老书”，因为它在中国有多个译本，那就是英国著名数学家 G·H·哈代的《一个数学家的辩白》(王希勇译). 其中有一段颇具戏剧性，见书中第 20 页，其中写道：“在 1913 年初的一个早晨，哈代在餐桌上的信件当中，发现了一个贴着印度邮票的信封，既大又不干净. 打开之后，他发现了几页无论如何也算不上新的稿纸，上面是一行行的不像是英国人手写的符号. 哈代毫无兴致地扫了一眼. 他当时是 36 岁，已经是世界著名数学家了. 他早已发现，世界著名的数学家们遇到怪人的机会多得不得了. 哈代习惯于收到陌生人的手稿 —— 诸如证明埃及大金字塔先知的智慧，犹太教长老的启示，或者培根穿插在所谓莎士比亚戏剧中的密码等等的手稿.”

除去编者不是著名数学家甚至连非著名都远远不算这点与哈代不同以外，编者在 90 多年后的 2007 年夏天遇到的情况与哈代无异.

先是收到了四川省蓬安县蓬安中学蒋明斌先生的两篇文章，蒋先生虽偏安一隅，但在中学数学界特别是数学竞赛界小有名气，所以来稿与刊登均在意料与情理之中. 同样的情况再次出现在半个月后，安徽省枞阳县汤沟中学唐传发先生来稿. 枞阳县恕编者孤陋寡闻仅在一篇报道贪官王长根的文章中看到过. 枞阳虽名气不大但唐传发在平面几何圈内也算是一位顶级发烧友，以爱解难题著称. 窃以为酷爱平面几何之人皆为功利心淡化之人，也是爱数学之人. 因为解一道平面几何问题所费代价与收益是不成比例的. 只有从中得到巨大的乐趣的人才会心理平衡，所以这篇稿件也尚属正常. 但接下来的情况有点出人意料，一位民警“居然”也寄来了发表关于竞赛的稿子，武瑞新，武汉市汉阳区永丰派出所民警，惊讶过后细读，稿子尚有新意，从数学竞赛票友的角度看值得发表.

与1913年哈代遇到的类似场景出现在2007年下半年，一天一个超重大口袋被收发室送来，从外观看不像是来自高校或科研院所寄信件那样外表整洁光鲜.倒是像经常收到的"民科"们宣称证明了"哥德巴赫猜想"或"费马大定理"的稿件，再一看地址：四川省泸洲市纳溪区上马镇银坪村，而作者自己标明的暂住工作地是：广东省中山市小榄镇泰丰工业大道南9号，以编者的想象力要将这样两个地址与IMO，CMO联系起来有些难度.然而像哈代和李特伍德最后判定手稿的作者是个天才一样，读完邓寿才的稿子我也有了自己的判断：来稿者是一位心怀梦想，酷爱数学并受生活所迫的青年.他应该得到人们的认识与鼓励.所以编者推迟了本文集的出版时间，加入了邓寿才的两篇长文.这两篇文章正如阿瑟·I·米勒评价当年爱因斯坦投给《物理学年刊》的题为《论动体的电动力学》的划时代文章那样："像今天不会有任何主要的物理学杂志会发表它，因为它完全没有引用任何文献."（阿瑟·I·米勒，著.爱因斯坦·毕加索.方在庆，任梅红，译.关洪，校.上海科技教育出版社，P207，2003年）

本文集第1辑出版后，天津一位中学生发来邮件说他是在南开大学书店买到的，但他们班只有他在看，其他人都认为太难，内容太深……若说深，为什么要深，这对一本服务于中等教育和大学师范教育的文集来说是否过难了，我们说刚刚好，要说明这点先从一次访谈谈起.2007年8月29日，华东师范大学数学系教授，《数学教学》主编张奠宙先生访问了美国的一个华人数学之家，父亲冯承德、母亲徐云华都是1964年华东师范大学数学系毕业生，毕业后一直到1990年都在天津市中学任教.1990年至今在美国奥克拉荷马州科学与数学中学（Oklahoma School of Science and Mathematics，专门为自然科学和数学方面的优秀生开办的学校，全美大约有20多所）任教.儿子冯祖鸣毕业于北京大学数学系，现为美国参加国际中学生数学竞赛的领队，美国新罕布什尔州EXECTER中学教师.在谈到中国的数学教育时，冯祖鸣有一个惊人之语："中国数学教育的软肋在高中，在高中最后两年的空转."冯承德说："我们学校是两年制，只有11年和12年级.单变量微积分是必修的，然后有70%的学生选修多变量微积分和线性代数.喜欢数学和物理的学生则选修常微分方程和偏微分方程.最后，我讲过实分析和拓扑学.总之，你有能力可尽力选修."徐云华也说："我们学校不仅是数学课程多，物理课程一直教到量子力学出现薛定谔方程，所以我们必须开设微分方程课."

我们也调查了其他发达国家的数学教学大纲，同美国有相似之处.

如澳大利亚数学教学大纲（高中）分为A，B，C三个层次，以适合不同的人学习不同的数学之需.

"数学C包括6个核心专题和7个选修专题，数学C的核心专题为：群的引入；实数系和复数系；矩阵及其应用；向量及其应用；微积分；结构与模式.数学B共有9个专题，分别是：应用几何；函数的引入；变化率；周期函数及其应用；指数、对数函数及其应用；最优化；金融数学；积分的引入；应用统计分析."

（澳大利亚数学大纲（高中）评价及其启示.祝广文.中学数学杂志（高中），2002年第3期.）

编者一直从事奥赛培训工作，所以对冯祖鸣的一番话深有感触.他说："中国的中学

里,许多搞奥赛的教练,还是要学习很多现代的数学,例如图论、数论等.可是一般的数学老师就不大上进了,听到和高考无关的数学就头疼,你能指望这样的数学老师培养出优秀的数学人才吗?"我们这期的稿件中附录多.就是为那些求上进的奥赛教练提供链接,装备头脑,所以说按国际化标准要求刚刚好.

王小波在《智慧与国学》这篇文章中举例说到了一位质问欧几里得学几何学能带来什么好处的学生和一位质问法拉第电磁感应有什么用的贵夫人,评价说他们是中国传统思维方式"器物之用"式的质问.

王小波在那篇文章中说:"我认为在器物的背后,是人的方法和技能,在方法和技能的背后是人对自然的了解.在人对自然了解的背后,是人类了解现在、过去与未来的万丈雄心."

我们希望本文集带给大家的绝不仅仅是器物之用,而是安抚那一颗颗立志探索数学之美的万丈雄心.

在编本期稿件之间编者去莫斯科参加了一个国际书展.莫斯科、圣彼得堡、苏斯达里、弗拉基米尔给我们留下深刻印象.书中几幅照片是美编卞先生所摄,颇具灵感,列于文末,奇图共赏.

本文集是数学工作室的一个系列文集,计划每年出一本.2007年由于种种原因没能及时出来,所以2008年会有两辑出来,另外第一辑的两位责任编辑已先后离开,杨明蕾女士到总编室工作,康云霞女士随夫调入大连理工大学出版社,所以今后会由李广鑫女士接任,借此向离开的表示感谢,向接任的表示欢迎.数学工作室是微型的,但我坚信,正像1973年英国人舒马克的一本书所说《小即是美(Small is beautiful)》.

刘培杰

2007.12.13